

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

ADRIEN DOUADY

Périodicité du groupe unitaire

Séminaire Henri Cartan, tome 12, n° 2 (1959-1960), exp. n° 11, p. 1-16

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1959-1960__12_2_A2_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

25 janvier 1960
et 1er février 1960

PÉRIODICITÉ DU GROUPE UNITAIRE

par Adrien DOUADY

I. Structure de H-espace sur l'espace classifiant du groupe unitaire infini.

A. Conventions et notations.

Tous les espaces considérés seront munis de points de base, notés a_0 pour A , etc. Si A est un espace topologique, $S^1 * A$ est sa suspension. SU signifie groupe unitaire spécial, et non suspension de U . Si G' est un sous-groupe d'un groupe topologique G , G/G' est l'ensemble des classes xG' , x parcourant G , muni de la topologie quotient.

Si A est un espace, et $B \subset A$, A/\tilde{B} désignera l'espace obtenu à partir de A en contractant B en un point. Deux applications f_0 et $f_1 : A \rightarrow B$ sont dites faiblement homotopes si, pour tout complexe fini K et toute application continue $g : K \rightarrow A$, $f_0 \circ g$ et $f_1 \circ g$ sont homotopes.

Une application $f : A \rightarrow B$ est une équivalence d'homotopie faible si, pour tout complexe fini K , $g \rightarrow f \circ g$ définit une correspondance biunivoque entre les classes d'homotopie d'applications de K dans A et les classes d'homotopie d'applications de K dans B .

On sait que, si A est connexe, il suffit pour cela que $f_* : \pi_n A \rightarrow \pi_n B$ soit un isomorphisme pour tout n , ou même, si de plus A et B sont simplement connexes (ou plus généralement simples, comme le sont tous les H-espaces) que

$$f_* : H_n(A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(B; \mathbb{Z})$$

soit un isomorphisme pour tout n (théorème de Hurewicz).

Le type faible d'homotopie d'un espace est sa classe dans la relation d'équivalence engendrée par la relation "il existe une équivalence faible d'homotopie de A dans B ".

Une H-loi faible sur un espace A est une application continue

$\psi : A \times A \rightarrow A$ telle que $\psi \circ i_1$ et $\psi \circ i_2$ soient faiblement homotopes à l'identité, i_1 et i_2 étant les injections de A dans $A \times A$ définies par $i_1(a) = (a, a_0)$ et $i_2(a) = (a_0, a)$. Les propriétés classiques des H-espaces

s'étendent aux H-espaces faibles.

Si E est un espace hilbertien de dimension finie, $U(E)$ désignera le groupe des transformations unitaires de E . Si $E' \subset E$, on identifiera $U(E')$ au sous-groupe de $U(E)$ formé des transformations qui laissent fixes les points de l'orthogonal $E \ominus E'$ de E' dans E . Si E est un espace préhilbertien de dimension infinie, on posera $U(E) = \varinjlim U(E')$ et $SU(E) = \varinjlim SU(E')$, limites inductives sur les E' de dimension finie contenus dans E . $\hat{U}(E)$ est le groupe (sans topologie) des transformations unitaires de E . Observons que $U(E)$ est un sous-groupe distingué de $\hat{U}(E)$, et que le commutateur $xyx^{-1}y^{-1}$, où $x \in U(E)$ et $y \in \hat{U}(E)$, appartient à $SU(E)$.

B. H-lois faibles sur certains espaces.

Soit V un espace préhilbertien sur \mathbb{C} , muni d'une base algébrique orthonormale $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$; soit $V_{p,q}$ le sous-espace de V de dimension $q - p$, engendré par les e_n tels que $p < n \leq q$. On pose $V^+ = V_{0,+\infty}$, $V^- = V_{-\infty,0}$, $V_n^+ = V_{0,n}$, $V_n^- = V_{-n,0}$, et

$$B = U(V)/U(V^+) \times U(V^-) = \varinjlim_{p,q} B_{p,q} = U(V_{-p,q})/U(V_q^+) \times U(V_p^-) .$$

On a vu (exposé 5) que B est un espace classifiant pour $U(V^-)$.

Soit V' (resp. V'') le sous-espace de V engendré par les e_n pour n impair (resp. pair), $V'^+ = V' \cap V^+$, etc., $B' = U(V')/U(V'^+) \times U(V'^-)$. Soit :

$$\begin{aligned} \rho' : V &\xrightarrow{\sim} V' && \text{défini par } \rho'(e_n) = e_{2n-1} && , \\ \rho'' : V &\xrightarrow{\sim} V'' && \text{défini par } \rho''(e_n) = e_{2n} && , \\ i' : V' &\rightarrow V && \text{et } i'' : V'' \rightarrow V && . \end{aligned}$$

les injections canoniques.

Remarquons que $\rho' : V^+ \rightarrow V'^+$, $V^- \rightarrow V'^-$. ρ' induit des applications, qu'on notera ρ'_* , ou simplement :

$$\rho' : U(V) \rightarrow U(V'), \quad U(V^+) \rightarrow U(V'^+), \quad B \rightarrow B' .$$

De même, ρ'' , i' , i'' .

LEMME 1. - $i'_* \circ \rho'_*$ et $i''_* \circ \rho''_* : B \rightarrow B$ sont faiblement homotopes à l'identité.

DÉMONSTRATION pour $i' \circ \rho'$. - Soit K un complexe fini, $g : K \rightarrow B = \varinjlim B_{p,q}$. K étant compact, g prend ses valeurs dans l'un des

$B_{p,q}$. L'injection canonique I et l'application $i' \circ \rho' : V_{-p,q} \rightarrow V_{-2p,2q}$ sont deux éléments de l'espace M des applications $V_{-p,q} \rightarrow V_{-2p,2q}$ qui envoient V_p^- (resp. V_q^+) isométriquement sur un sous-espace de V_{2p}^- (resp. V_{2q}^+); M , produit de deux variétés de Stiefel, est connexe par arcs : soit γ un chemin tel que $\gamma(0) = I$, $\gamma(1) = i' \circ \rho'$. Pour tout t , $0 \leq t \leq 1$,

$$\gamma(t) : V_{-p,q} \rightarrow V_{-2p,2q}$$

définit une application

$$\gamma_*(t) : B_{p,q} \rightarrow B_{2p,2q} \quad ,$$

et l'application

$$\gamma_* : B_{p,q} \times I \rightarrow B_{2p,2q} \quad ,$$

ainsi définie, est visiblement continue, ce qui démontre le lemme. Si $x \in U(V)$, notons \dot{x} sa classe dans B .

PROPOSITION 1. - On a une H -loi faible ψ sur B , telle que $\psi(\dot{x}, \dot{y})$ soit la classe de $\rho'_*(x) \cdot \rho''_*(y)$ dans B .

DÉMONSTRATION. - La formule ci-dessus définit une application $B \times B \rightarrow B$: en effet si $x_1 = xu$, $y_1 = yv$, avec $u, v \in U(V^+) \times U(V^-)$, on a

$$\begin{aligned} \rho'(x_1) &= \rho'(x) \rho'(u) \quad , \\ \rho''(y_1) &= \rho''(y) \rho''(v) \quad , \end{aligned}$$

et

$$\rho'(x_1) \rho''(y_1) = \rho'(x) \rho'(u) \rho''(y) \rho''(v) = \rho'(x) \rho''(y) \rho'(u) \rho''(v) \quad ,$$

car $\rho'(u)$ et $\rho''(y)$ commutent : l'un opère sur V' , l'autre sur V'' , et $V = V' \otimes V''$. Donc $\rho'(x_1) \rho''(y_1)$ et $\rho'(x) \rho''(y)$ sont dans la même classe de B . Le fait que ψ soit une H -loi faible découle du lemme 1.

Plus généralement, on obtient par la même méthode le résultat suivant :

SCHOLIE. - Soit $W = \otimes V_\alpha$, où les V_α sont des espaces préhilbertiens de dimension infinie sur $K = \mathbb{R}$, \mathbb{C} , ou le corps \mathbb{H} des quaternions. Pour tout α , soit G_α un groupe classique de V_α (i. e. $U(V_\alpha^0)$ ou $SU(V_\alpha^0)$, V_α^0 étant soit un espace préhilbertien sur $k \subset K$ sous-jacent à V_α , soit un k -sous-espace de V_α tel que $V_\alpha = V_\alpha^0 \otimes_k K$, ou encore $G_\alpha = \{I\}$). Soit G , un groupe classique de W , contenant tous les G_α . Alors $G/\mathbb{H}(G_\alpha)$ est un \mathbb{H} -espace faible.

En particulier, les espaces classifiants des groupes orthogonal et symplectique infinis, et les espaces homogènes

$$U(V)/Sp(V) [\text{resp. } U(V \otimes \mathbb{C})/O(V), \text{ resp. } O(V)/U(V), \text{ resp. } Sp(V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H})/U(V)] ,$$

où V est un espace préhilbertien de dimension infinie sur les quaternions [resp. \mathbb{R} , resp. \mathbb{C} , resp. \mathbb{C}], sont des H -espaces faibles. On définit aussi une H -loi faible sur les groupes classiques infinis eux-mêmes, qui ne coïncide pas avec la loi de groupe, mais qui lui est faiblement homotope.

QUESTIONS.

1° Ces H -lois faibles sont-elles des H -lois ?

2° On peut montrer que ces H -lois sont faiblement homotopiquement associatives et commutatives. Peut-on remplacer ces espaces par des espaces de même type d'homotopie faible, avec des lois exactement associatives ? On sait qu'on ne peut pas en faire des groupes abéliens, car ils ont des invariants de Postnikov non nuls.

C. H -algèbres d'homologie et de cohomologie de B .

B désigne l'espace classifiant $B(U)$ du groupe unitaire d'un espace préhilbertien de dimension infinie.

THÉORÈME 1.

a. La H -algèbre de cohomologie de B est une algèbre de polynômes à un générateur en chaque degré pair : $H^*(B) = \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k, \dots]$, où c_k est de degré $2k$; en posant $c_0 = 1$, l'application diagonale est donnée par

$$\Delta(c_k) = \sum_{i+j=k} c_i \otimes c_j ;$$

b. La H -algèbre d'homologie de B est du même type :

$$H_*^*(B) = \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_k, \dots], \text{ deg } y_k = 2k, \text{ et } \Delta(y_k) = \sum_{i+j=k} y_i \otimes y_j ;$$

c. Le module $P_*^*(B)$ des éléments primitifs de $H_*^*(B)$ a une base (p_1, \dots, p_k, \dots) , où p_k est de degré $2k$, $p_k = (-1)^{k+1} k y_k +$ décomposables, et $\langle p_k, c_k \rangle = 1$..

DÉMONSTRATION. - Algèbre $H^*(B)$: $B_n = U(V_{-n, \infty})/U(V^+) \times U(V_n^-)$, base du fibré principal $\Gamma_n = U(V_{-n, \infty})/U(V^+)$, est un espace classifiant pour $U(V_n^-)$. On a vu (exposé 9) que $H^*(B_n) = \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n]$, où $c_0 = 1$, c_1, \dots, c_n sont les classes de Chern du fibré Γ_n . Si $m > n$, l'injection canonique $B_n \rightarrow B_m$ envoie $c_0, c_1, \dots, c_n \in H^*(B_m)$ sur $c_0, c_1, \dots, c_n \in H^*(B_n)$

et c_{n+1}, \dots, c_m sur 0 . Pour $B = \varinjlim B_n$, on a $H^*(B) = \varprojlim H^*(B_n)$, la limite projective devant être prise au sens des algèbres graduées, i. e.

$H^q(B) = \varprojlim H^q(B_n)$ pour tout q : en l'occurrence, cette limite s'obtient pour un n fini en chaque degré q . On a donc : $H^*(B) = \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k, \dots]$.

Diagonale : On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 \Gamma_n \times \Gamma_n & \rightarrow & \Gamma'_n \times \Gamma''_n & \rightarrow & \Theta & \rightarrow & \Gamma_{2n} \\
 \downarrow & & \downarrow & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\
 B_n \times B_n & \xrightarrow[\approx]{\rho' \times \rho''} & B'_n \times B''_n & \xrightarrow{\lambda} & B_{2n} & & \\
 & & \downarrow \psi & & \uparrow & &
 \end{array}$$

en posant $V_n^- = \rho'(V_n^-)$,

$$\Gamma'_n = U(V_n^+ \otimes V_n^-) / U(V_n^+),$$

$$B'_n = U(V_n^+ \otimes V_n^-) / U(V_n^+) \times U(V_n^-),$$

$\lambda : B'_n \times B''_n \rightarrow B_{2n}$ est l'injection définie par $\lambda(\dot{x}, \dot{y}) = \dot{xy}$ si $x \in U(V_n^+ \otimes V_n^-)$ et $y \in U(V_n^+ \otimes V_n^-)$, Θ est le fibré principal sur $B'_n \times B''_n$ de fibre $U(V_{2n}^-)$ associé au fibré principal $\Gamma'_n \times \Gamma''_n$ de fibre $U(V_n^+) \times U(V_n^-)$, en même temps que l'image réciproque du fibré Γ_{2n} par λ . Les classes de Chern de Θ sont $\zeta_k = \sum_{i+j=k} c_i^1 \otimes c_j^2$, (exposé 9). Par functorialité des classes de Chern,

$$\lambda^*(c_k) = \zeta_k, \quad \rho'^*(c_k) = \rho''^*(c_k) = c_k,$$

$$\Delta(c_k) = I \circ \psi^*(c_k) = (\rho'^* \otimes \rho''^*) \circ I \circ \lambda^*(c_k) = \sum_{i+j=k} c_i \otimes c_j,$$

I désignant l'isomorphisme de Künneth $H^*(A \times B) \rightarrow H^*(A) \otimes H^*(B)$. La partie (a) du théorème 1 est démontrée. Les parties (b) et (c) en découlent en appliquant les résultats de l'exposé 10.

REMARQUE. - Pour démontrer le théorème de Bott, on ne se sert que d'une partie très faible du théorème 1 : on a seulement besoin d'une majoration du nombre de générateurs de $H_q(B)$ pour tout q .

II. Le théorème de Bott.

A. L'application de Bott.

Soit $\alpha : S^1 \rightarrow \hat{U}(V)$ l'application qui, à $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| = 1$, fait correspondre la transformation αu de V qui induit l'homothétie de rapport u sur V^- et l'identité sur V^+ . On a $\alpha u = \rho_*^1(\alpha u) \cdot \rho_*^0(\alpha u)$. Le centralisateur de $\alpha(S^1)$ dans $\hat{U}(V)$ est $\hat{U}(V^+) \times \hat{U}(V^-)$, qui contient $U(V^+) \times U(V^-)$. A l'application

$$\gamma : S^1 * B \rightarrow SU(V)$$

définie par $\gamma(u, \dot{x}) = x \cdot \alpha u \cdot x^{-1} \cdot \alpha u^{-1}$ correspond l'application de Bott

$$h : B \rightarrow \Omega(SU(V))$$

définie par $h(\dot{x}) = (u \rightarrow \gamma(u, \dot{x}))$. Le but de cet exposé est de démontrer le théorème de Bott : $h : B \rightarrow \Omega(SU(V))$ est une équivalence d'homotopie faible.

THÉOREME 2. - L'application $h : B \rightarrow \Omega(SU(V))$ est multiplicative à une homotopie faible près.

DÉMONSTRATION. - On considère sur $SU(V)$ la H-loi faible ψ définie en I. B :

$$\psi(x, y) = \rho_*^1 x \cdot \rho_*^0 y$$

On a

$$\begin{aligned} \gamma(u, \psi(\dot{x}, \dot{y})) &= \gamma(u, \rho_*^1 x \cdot \rho_*^0 y) = \rho_*^1 x \cdot \rho_*^0 y \cdot \alpha u \cdot \rho_*^0 y^{-1} \cdot \rho_*^1 x^{-1} \cdot \alpha u^{-1} \\ &= \rho_*^1 x \cdot \rho_*^0 y \cdot \rho_*^1 \alpha u \cdot \rho_*^0 \alpha u \cdot \rho_*^0 y^{-1} \cdot \rho_*^1 x^{-1} \cdot \rho_*^1 \alpha u^{-1} \cdot \rho_*^0 \alpha u^{-1} \\ &= \rho_*^1 (x \cdot \alpha u \cdot x^{-1} \cdot \alpha u^{-1}) \cdot \rho_*^0 (y \cdot \alpha u \cdot y^{-1} \cdot \alpha u^{-1}) = \psi(\gamma(u, \dot{x}), \gamma(u, \dot{y})) \end{aligned}$$

On en déduit que h est multiplicative quand on munit $\Omega(SU(V))$ de la loi ψ_* définie par

$$\psi_*(a, b) = (u \rightarrow \psi(a(u), b(u)))$$

Mais cette loi est faiblement homotope à la loi naturelle de mise bout à bout des lacets, comme sur tout H-espace faible, ce qui démontre le théorème 2.

B. L'algèbre $H_*(\Omega(SU(\infty)))$.

THÉOREME 3.

a. $H_*(\Omega(SU(n+1))) = \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n]$, où y_i est de degré $2i$;

b. $H_*(\Omega(SU(\infty))) = \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n, \dots]$.

DÉMONSTRATION. -

a. Par récurrence sur n : pour $n = 0$, $SU(1)$ est un point, $\Omega(SU(1))$ aussi, $H_* (\Omega(SU(1))) = \underline{\mathbb{Z}}$.

On considère le fibré $\Omega(SU(n+1)) \rightarrow \Omega(S^{2n+1})$ de fibre $\Omega(SU(n))$. Par hypothèse de récurrence

$$H_* (\Omega(SU(n))) = \underline{\mathbb{Z}}[y_1, \dots, y_{n-1}] .$$

D'autre part ([5], ou [3]) :

$$H_* (\Omega(S^{2n+1})) = \underline{\mathbb{Z}}[y_n] .$$

Le terme E^2 de la suite spectrale du fibré considéré est donc $\underline{\mathbb{Z}}[y_1, \dots, y_{n-1}, y_n]$. Il n'a que des éléments de degré pair, donc $E^\infty = E^2$. On conclut en appliquant le lemme suivant à $H_* (\Omega(SU(n+1)))$:

LEMME 2. - Soit A une algèbre commutative graduée filtrée. Si l'algèbre bi-graduée associée $G(A)$ est une algèbre de polynômes à générateurs de degrés filtrant et complémentaire positifs, A est isomorphe (non canoniquement) à $G(A)$.

Démonstration du lemme. - Soit $G(A) = \underline{\mathbb{Z}}[(y_i)]$. Pour chaque générateur $y_i \in G(A)$, soit $\hat{y}_i \in A$ de filtration égale au degré filtrant de y_i , et dont l'image dans $G(A)$ soit y_i . Soit $\psi : \underline{\mathbb{Z}}[(y_i)] \rightarrow A$ l'homomorphisme d'algèbre défini par $\psi(y_i) = \hat{y}_i$. ψ est un homomorphisme d'algèbres filtrées de $G(A)$, filtrée par le degré filtrant, dans A . Cet homomorphisme induit sur les gradués associés un isomorphisme : l'identité. C'est donc lui-même un isomorphisme, puisque, pour chaque degré total, la filtration est finie, ce qui achève la démonstration du lemme et de la partie (a) du théorème 3. La partie (b) s'en déduit par passage à la limite inductive. Au cours de la démonstration du théorème 3, nous avons récolté des informations sur les générateurs (y_i) qui peuvent s'exprimer ainsi :

PROPOSITION 2. - Soit P_0, \dots, P_n, \dots une suite d'espaces, et pour tout n , $\xi_n \in H_{2n}(P_n)$ et $\gamma_n : S^1 \times P_n \rightarrow SU(n+1)$ telle que $\xi_n \circ \gamma_n : S^1 \times P_n \rightarrow SU(n+1) \rightarrow S^{2n+1}$ applique la suspension $s_n \in H_{2n+1}(S^1 \times P_n)$ sur un générateur de $H_{2n+1}(S^{2n+1})$. Alors :

a. Pour $i \leq n$

$$g_i : P_i \rightarrow \Omega(SU(i+1)) \rightarrow \Omega(SU(n+1)) ,$$

qui correspond à γ_i , applique ξ_i sur un élément $y_i \in H_{2i}(\Omega(SU(n+1)))$,

et les y_i , $i \leq n$, forment une base d'algèbre de $H_*(\Omega(SU(n+1)))$.

b. Idem pour $n = \infty$.

C. L'application génératrice.

Posons :

$$P_n = B_{1,n} = U(V_{-1,n})/U(V_n^+) \times U(V_1^-)$$

$$P = B_1 = U(C \oplus V^+)/U(V^+) \times U(C),$$

où $C = V_1^-$ est le sous-espace vectoriel de V engendré par e_0 .

P_n est un espace projectif de dimension n sur C . L'application $\gamma : S^1 \times B \rightarrow SU(V)$ induit une application $\chi_n : S^1 \times P_n \rightarrow SU(V_{-1,n})$, à laquelle correspond $g_n : P_n \rightarrow \Omega(SU(V_{-1,n}))$. On a aussi :

$$g : P \rightarrow \Omega(SU(C \oplus V^+)).$$

THÉOREME 4.

a. L'image de $g_* : H_*(P_n) \rightarrow H_*(\Omega(SU(C \oplus V^+)))$ contient un système de générateurs de l'algèbre $H_*(\Omega(SU(n+1)))$;

b. Idem si n est infini.

DÉMONSTRATION. - Cela résulte de la proposition 2 et du lemme suivant :

LEMME 3. - On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times P_n & \xrightarrow{\chi_n} & SU(V_{-1,n}) \\ \downarrow \tilde{\chi} & & \downarrow \chi \\ S^1 \times (P_n/P_{n-1}) & \xrightarrow{\epsilon} & SU(V_{-1,n})/SU(V_{-1,n-1}) \end{array}$$

où $\tilde{\chi}$ et χ sont les applications canoniques, et où ϵ est un homéomorphisme de deux espaces homéomorphes à S^{2n+1} .

Démonstration du lemme. - $\chi : SU(V_{-1,n}) \rightarrow S^{2n+1}$ est définie par $\chi(y) = y(e_n)$, et $\chi \circ \gamma(u, \hat{x}) = x \cdot u \cdot x^{-1} \cdot u^{-1}(e_n)$. Or $u^{-1}(e_n) = e_n$ car $e_n \in V_n^+$. Si $\hat{x} \in P_n$ est une droite de $V_{-1,n}$, $x \in U(V_{-1,n})$ est une transformation telle que $x(\hat{x}) = \hat{x}$, et $x \cdot u \cdot x^{-1}$ est la transformation de $V_{-1,n}$ qui induit l'homothétie de rapport u sur la droite \hat{x} , et l'identité sur l'hyperplan orthogonal. Si \hat{x} est un vecteur unitaire de la droite \hat{x} , on a

$$e_n = (e_n | \hat{x}) \hat{x} + e_n - (e_n | \hat{x}) \hat{x},$$

d'où

$$\chi \circ \gamma(u, \hat{x}) = x \cdot u \cdot x^{-1}(e_n) = u(e_n | \hat{x}) \hat{x} + e_n - (e_n | \hat{x}) \hat{x} = e_n + (u - 1)(e_n | \hat{x}) \hat{x} .$$

Cette valeur est le point de base e_n dans les deux cas suivants, et ceux-ci seulement :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 1 \\ \hat{x} \text{ orthogonal à } e_n, \text{ i. e. } \hat{x} \in P_{n-1} \end{array} \right. .$$

On a donc une application continue \mathcal{E} de

$$S^1 \times P_n / \{1\} \times P_n \cup S^1 \times P_{n-1} = S^1 \times (P_n / P_{n-1})$$

dans

$$S^{2n+1} = \text{SU}(V_{-1,n}) / \text{SU}(V_{-1,n-1}) .$$

L'espace de départ étant compact, il suffit de montrer que \mathcal{E} est injective pour en conclure que c'est un homéomorphisme sur son image. Les deux espaces étant des variétés de dimension $2n + 1$, le théorème d'invariance du domaine ([5]) assurera alors que l'image est ouverte, la compacité qu'elle est fermée, la connexion que c'est tout S^{2n+1} . Montrons donc que \mathcal{E} est injective : si $\xi(u, \hat{x}) = e \neq e_n$, \hat{x} est la droite engendrée par $e - e_n$, et, \hat{x} étant un vecteur unitaire choisi dans \hat{x} , u est donné par $u = 1 + \frac{e - e_n}{(e | \hat{x}) \hat{x}}$. Ceci achève la démonstration du lemme.

Démonstration du théorème 4. - Soit, pour tout n , ξ_n un générateur de $H_{2n}(P_n)$. $\tilde{\chi}$ applique $s\xi_n$ sur un générateur de S^{2n+1} , et $\mathcal{E} \circ \tilde{\chi}$ aussi. Nous pouvons donc appliquer la proposition 2 ; en posant

$$y_i = g_{i*}(\xi_i) ,$$

on a

$$H_*(\Omega(\text{SU}(n+1))) = \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n] .$$

Mais on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} P_i & \xrightarrow{g_i} & \Omega \text{SU}(i+1) \\ \downarrow j & & \downarrow j \\ P_n & \xrightarrow{g_n} & \Omega \text{SU}(n+1) \end{array}$$

En particulier, $y_i = j_* g_{i*}(\xi_i) = g_{n*}(j_* \xi_i)$, où $j_* \xi_i$ est d'ailleurs le générateur canonique de $H_{2i}(P_n)$.

REMARQUE 1. - Orientons S^{2n+1} en convenant qu'un repère (t_1, \dots, t_{2n+1}) est direct si le repère $(t_0, t_1, \dots, t_{2n+1})$ de R^{2n+2} , ou t_0 est un vecteur sortant, est direct. P_n est munie de son orientation de variété complexe : si t_1, \dots, t_n est une base sur \mathbb{C} de l'espace tangent en un point, $(t_1, it_1, \dots, t_n, it_n)$ est un repère direct. $S^1 \times P_n$ est munie de l'orientation produit, qui est d'ailleurs la même que celle de $P_n \times S^1$. Avec ces conventions, ε est une application de degré $+1$. Pour le montrer, il suffit de trouver un point où le jacobien de $\chi \circ \gamma$ soit >0 . Le calcul est assez simple pour le point $(-1, e_n)$.

REMARQUE 2. - g_* est un homomorphisme de coalgèbres : l'application diagonale sur $H_*(P_n)$ est donnée par $\Delta(\xi_k) = \sum_{i+j=k} \xi_i \otimes \xi_j$, en posant $\xi_0 = 1$. On a donc dans $H_*(\Omega(SU(n+1)))$:

$$\Delta(y_k) = \sum_{i+j=k} (y_i \otimes y_j) \quad \text{en posant } y_0 = 1,$$

ce qui détermine complètement l'application diagonale.

D. Démonstration du théorème de Bott.

THÉORÈME 5. - $h : B \rightarrow \Omega(SU(V))$ est une équivalence d'homotopie faible.

DÉMONSTRATION. - On connaît la structure des algèbres d'homologie de ces deux espaces ; ce sont des algèbres de polynômes sur des générateurs de degrés 2, 4, 6, 8, ... (théorèmes 1, (b) et 3, (b)). On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_*(P) & \xrightarrow{g_*} & H_*(\Omega(SU(C \oplus V^+))) \\ j_* \downarrow & & \downarrow \Omega j_* \\ H_*(B) & \xrightarrow{h_*} & H_*(\Omega(SU(V))) \end{array}$$

où j désigne les injections canoniques ; $j : SU(C \oplus V) \rightarrow SU(V)$ est une équivalence d'homotopie faible (exposé 5) et il en est de même de Ωj . L'image de g_* engendre l'algèbre $H_*(\Omega(SU(C \oplus V^+)))$, (théorème 4), donc l'image de h^* engendre l'algèbre $H_*(\Omega(SU(C \oplus V^+)))$, et puisque h_* est un homomorphisme d'algèbres (théorème 2), on en déduit que h_* est surjective. Mais pour chaque k , $H_k(\Omega(SU(V)))$ est libre à un nombre fini $r(k)$ de générateurs, et $H_k(B)$ est engendré par $r(k)$ éléments : h_* est nécessairement un isomorphisme. Les deux espaces étant simplement connexes, le théorème de Hurewicz assure que h est une équivalence d'homotopie faible.

COROLLAIRE. - $\pi_i(U(\infty)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } i \text{ impair} \\ 0 & \text{pour } i \text{ pair.} \end{cases}$

DÉMONSTRATION. - $\pi_i(U(\infty)) = \pi_{i+1}(B) = \pi_{i+1}(\Omega(SU(V))) = \pi_{i+2}(SU(\infty))$. D'autre part $U(\infty) = SU(\infty) \times S^1$, d'où $\pi_i(U(\infty)) = \pi_i(SU(\infty))$ pour $i \neq 1$. On en déduit par récurrence que, pour i pair, $\pi_i(U(\infty)) = \pi_0(U(\infty)) = 0$, et pour i impair, $\pi_i(U(\infty)) = \pi_1(U(\infty)) = \mathbb{Z}$.

III. Homomorphismes de Hurewicz.

A. La suspension dans les deux fibrés de Bott.

Considérons d'abord le fibré acyclique $E \rightarrow SU(n+1)$ de fibre $\Omega(SU(n+1))$, ou l'analogue pour $n = \infty$. On sait que :

$H_*(SU(n+1)) = \wedge(x_1, \dots, x_n)$, algèbre extérieure sur l'anneau \mathbb{Z} , où x_i est primitif de degré $2i+1$ (exposés 2, 3 et 5)

$H_*(\Omega(SU(n+1))) = \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n]$ où y_i est de degré $2i$ (théorème 3).

PROPOSITION 3. - La suspension $\sigma : H_k(\Omega(SU)) \rightarrow H_{k+1}(SU)$ est donnée par :

$$\begin{cases} \sigma(y_i) & = x_i \\ \sigma(\text{décomposables}) & = 0 \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. - Considérons l'application $\chi : SU(i+1) \rightarrow S^{2i+1}$. $\Omega\chi$ applique y_i sur l'élément fondamental de $H_{2i}(\Omega(S^{2i+1}))$ (cf. exposé 11, II, B, proposition 2 et II, C, remarque 1). Sa suspension est l'élément fondamental de $H_{2i+1}(S^{2i+1})$. Donc $\sigma(y_i)$ a pour image par χ_* cet élément, et comme il est primitif (exposé 6, paragraphe 2), ce ne peut être que x_i . D'autre part σ s'annule sur les décomposables (exposé 6, paragraphe 3), ce qui démontre la proposition.

Considérons maintenant le fibré acyclique $\Gamma_n \rightarrow B_n$ de fibre $U(n)$. On sait que :

$H^*(U(n)) = \wedge(b_0, \dots, b_{n-1})$, où b_i est primitif de degré $2i+1$;

$H^*(B_n) = \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n]$, où c_i est de degré $2i$;

$H_*(U(\infty)) = \wedge(x_0, \dots, x_n, \dots)$, où x_i est de degré $2i+1$;

$H_*(B) = \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n, \dots]$, avec $\Delta y_k = \sum_{i+j=k} y_i \otimes y_j$ en posant $y_0 = 1$,

où y_i est de degré $2i$ ⁽¹⁾.

On a une base p_1, \dots, p_n, \dots de $P_*(B)$, où $p_k = (-1)^{k+1} ky_k$ + décomposables est de degré $2k$, $\langle p_k, c_k \rangle = +1$, $\langle p_k, \text{décomposables} \rangle = 0$.

PROPOSITION 4.

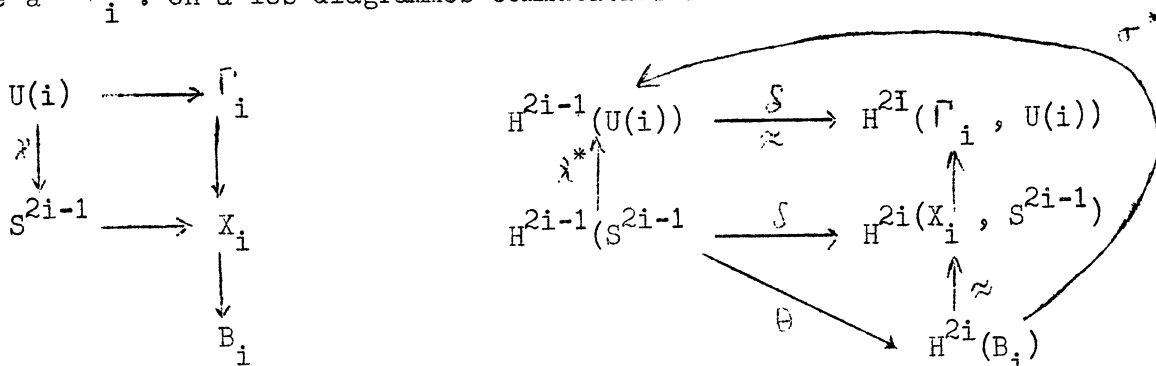
a. La suspension $\sigma^* : H^k(B_n) \rightarrow H^{k-1}(U(n))$ est donnée par :

$$\begin{cases} \sigma^*(c_i) & = b_{i-1} \\ \sigma^*(\text{décomposables}) & = 0 \end{cases}$$

b. La suspension $\sigma : H_k(U(\infty)) \rightarrow H_{k+1}(B)$ est donnée par

$$\begin{cases} \sigma(x_i) & = p_{i+1} \\ \sigma(\text{décomposables}) & = 0 \end{cases} .$$

DÉMONSTRATION. - Soit X_i le fibré de fibre $S^{2i-1} = U(i)/U(i-1)$ sur B_i associé à Γ_i . On a les diagrammes commutatifs suivants :



Si a_i est l'élément fondamental de $H^{2i-1}(S^{2i-1})$, $\theta(a_i) = c_i$ (exposé 9), et $\sigma^*(c_i) = \sigma^* \circ \theta(a_i) = \lambda^*(a_i) = b_{i-1}$. Pour $n > i$, on considère l'homomorphisme d'espaces fibrés :

$$\begin{array}{ccccc} U(i) & \rightarrow & \Gamma_i & \rightarrow & B_i \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ U(n) & \rightarrow & \Gamma_n & \rightarrow & B_n \end{array} .$$

Pour $n = \infty$, on passe à la limite inductive, ce qui démontre la partie (a). La partie (b) se démontre en utilisant le fait que σ et σ^* sont transposées.

B. L'homomorphisme de Hurewicz dans $SU(\infty)$ et $B \approx \Omega(SU(\infty))$.

Soient ε_n le générateur de $\pi_{2n}(B) = \pi_{2n}(\Omega(SU(\infty)))$ et ε'_n le générateur

⁽¹⁾ Les générateurs y_i de $H_*(B)$ et $H_*(\Omega(SU(\infty)))$ se correspondent par l'application h_* de Bott.

de $\pi_{2n+1}(U(\varpi))$ définis par récurrence par les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon'_0 \text{ est le générateur canonique ;} \\ \partial \varepsilon'_n = \varepsilon'_{n-1} \text{ dans le fibré } \Gamma \text{ ;} \\ \partial \varepsilon'_n = \varepsilon_n \text{ dans le fibré } E . \end{array} \right.$$

THÉOREME 6. - L'homomorphisme de Hurewicz $\psi : \pi_* \rightarrow H_*$ est donné dans $U(\varpi)$ par :

$$(a_n) : \psi(\varepsilon'_n) = (-1)^{(n(n-1))/2} n! x_n$$

et dans B par :

$$(b_n) : \psi(\varepsilon_n) = (-1)^{(n(n-1)(n-2))/2} (n-1)! p_n = (-1)^{(n(n-1))/2} n! y_n + \text{décomposables.}$$

DÉMONSTRATION. - Par récurrence :

(a₀) : théorème de Hurewicz et définition de ε'_0 ;

(a_{n-1}) \Rightarrow (b_n) : on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_{2n-1}(U) & \xrightarrow{\psi} & H_{2n-1}(U) \\ \partial \nearrow & & \searrow \sigma \\ \pi_{2n}(B) & \xrightarrow{\psi} & H_{2n}(B) \end{array}$$

où : $\partial(\varepsilon'_n) = \varepsilon'_{n-1}$, $\psi(\varepsilon'_{n-1}) = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} (n-1)! x_{n-1}$,
 $\sigma(x_{n-1}) = p_n = (-1)^{n-1} n y_n + \text{décomposables}$, d'où $\psi(\varepsilon_n)$.

(b_n) \Rightarrow (a_n) : on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_{2n}(\Omega(SU(\varpi))) & \xrightarrow{\psi} & H_{2n}(\Omega(SU(\varpi))) \\ \partial \nearrow & & \searrow \sigma \\ \pi_{2n+1}(SU(\varpi)) & \xrightarrow{\psi} & H_{2n+1}(SU(\varpi)) \end{array}$$

où $\partial(\varepsilon'_n) = \varepsilon_n$, $\psi(\varepsilon_n) = (-1)^{(n(n-1))/2} n! y_n + \text{décomposables}$, $\sigma(y_n) = x_n$,
 $\sigma(\text{décomposables}) = 0$, d'où $\psi(\varepsilon'_n)$, et le théorème est démontré.

COROLLAIRE. - La n-ième classe de Chern d'un fibré vectoriel complexe sur S^{2n} est divisible par $(n-1)!$, et caractérise le type stable de ce fibré.

DÉMONSTRATION. - A un fibré vectoriel complexe sur S_n correspond un élément $k\varepsilon_n \in \pi_{2n}(B)$, qui caractérise son type stable. La n-ième classe de Chern prend sur l'élément fondamental de $H_{2n}(S_n)$ la valeur :

$$\langle \psi(k\varepsilon_n), c_n \rangle = (-1)^* k(n-1)! \langle v_n, c_n \rangle = (-1)^* k(n-1)! .$$

C. Homotopie des groupes unitaires finis.

THÉORÈME 6.

- a. (BOTT) : $\pi_k(U(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } k \text{ impair } < 2n \\ 0 & \text{pour } k \text{ pair } < 2n ; \end{cases}$
- b. (A. BOREL-HIRZEBRUCH) : $\pi_{2n}(U(n)) = \mathbb{Z}_{n!}$;
- c. (TODA) : $\pi_{2n+1}(U(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{si } n \text{ pair } \geq 2 , \\ 0 & \text{si } n \text{ impair } , \end{cases}$
- d. (TODA) : $\pi_{2n+2}(U(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_{(n+1)!}/2 & \text{si } n \text{ impair } \geq 3 , \\ \mathbb{Z}_{(n+1)!} \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{si } n \text{ pair } \geq 4 . \end{cases}$

DÉMONSTRATION. -

a. La fibration $U(n+1) \rightarrow S^{2n+1}$ de fibre $U(n)$ donne la suite exacte

$$\pi_{k+1}(S^{2n+1}) \rightarrow \pi_k(U(n)) \rightarrow \pi_k(U(n+1)) \rightarrow \pi_k(S^{2n+1})$$

d'où, pour $k < 2n$,

$$\pi_k(U(n)) = \pi_k(U(n+1)) = \dots = \pi_k(U(\infty))$$

d'où (a) par le corollaire du théorème 5.

b. On a la suite exacte

$$\pi_{2n+1}(U(n+1)) \xrightarrow{\chi_*} \pi_{2n+1}(S^{2n+1}) \rightarrow \pi_{2n}(U(n)) \rightarrow \widehat{\pi}_{2n}(U(n+1))$$

où $\pi_{2n+1}(U(n+1)) = \mathbb{Z}$, générateur ε'_n , $\pi_{2n}(U(n+1)) = 0$ (partie (a)),
 $\pi_{2n+1}(S^{2n+1}) = \mathbb{Z}$, générateur ξ_{n+1} . Le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_{2n+1}(U(n+1)) & \xrightarrow{\chi_*} & \pi_{2n+1}(S^{2n+1}) \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ H_{2n+1}(U(n+1)) & \xrightarrow{\chi_*} & H_{2n+1}(S^{2n+1}) \end{array}$$

où $\psi(\varepsilon'_n) = (-1)^* n! x_n$, et $\chi_*(x_n) = \psi(\xi_n)$ est l'élément fondamental de $H_{2n+1}(S^{2n+1})$, montre que $\chi_*(\varepsilon'_n) = (-1)^* n! \xi_n$. On en déduit par la suite exacte que $\pi_{2n}(U(n)) = \mathbb{Z}_{n!}$.

c. La variété de Stiefel $U(n+1)/U(n-1)$ est fibrée sur S^{2n+1} de fibre S^{2n-1} , et ce fibré admet une section si et seulement si $n+1$ est pair ([6], theorems 27.10 et 27.11, page 142). L'application de bord

$$\partial : \pi_{2n+1}(S^{2n+1}) \rightarrow \pi_{2n}(S^{2n-1})$$

est donc nulle si n est impair, et non nulle si n pair, car elle donne naissance à l'obstruction $\in H^{2n+1}(S^{2n+1}; \pi_{2n}(S^{2n-1}))$. Le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_{2n}(U(n)) = Z_{n!} \\ & \nearrow \partial & \downarrow \chi_* \\ \pi_{2n+1}(S^{2n+1}) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{2n}(S^{2n-1}) = Z_2 \end{array}$$

montre alors que $\chi_* : \pi_{2n}(U(n)) \rightarrow \pi_{2n}(S^{2n-1})$ est nulle si n impair, surjective si n pair. Appliquant ce résultat, pour $n+1$, à la suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{2n+2}(U(n+1)) & \xrightarrow{\chi_*} & \pi_{2n+2}(S^{2n+1}) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{2n+1}(U(n)) & & \\ & & & & & & \\ & & 0 & \rightarrow & \pi_{2n+1}(U(n+1)) & \rightarrow & \pi_{2n+1}(S^{2n+1}) \\ & & & & \parallel & \xrightarrow{n!} & \parallel \\ & & & & Z & & Z \end{array}$$

on trouve $\partial = 0$ pour n impair, $\partial \neq 0$ pour n pair, d'où (c).

d. Désignons par α l'opération homotopique stable de degré $+1$ définie par l'élément non nul de $\pi_{k+1}(S^k)$.

Cas n impair. - On a vu que $\partial(\alpha \xi) = 0$, d'où $\partial(\alpha^2 \xi) = \alpha \partial(\alpha \xi) = 0$. La suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{2n+3}(S^{2n+1}) & \xrightarrow{\partial=0} & \pi_{2n+2}(U(n)) & \rightarrow & \pi_{2n+2}(U(n+1)) & \rightarrow & \pi_{2n+2}(Z_2) \xrightarrow{\partial=0} \pi_{2n+1}(U(n)) \\ & & & & \parallel & & \parallel \\ & & & & Z_{(n+1)!} & & Z_2 \end{array}$$

donne $\pi_{2n+2}(U(n)) = Z_{(n+1)!}/2$.

Cas n pair. - On a la suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{2n+3}(U(n+1)) & \rightarrow & \pi_{2n+3}(S^{2n+1}) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{2n+2}(U(n)) & \rightarrow & \pi_{2n+2}(U(n+1)) \xrightarrow{\chi_* = 0} \dots \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & & Z_2 & & & & Z_{(n+1)!} \end{array}$$

Mais le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & Z_2 & & Z_{24} \\ & & \parallel & & \parallel \\ \pi_{2n+3}(S^{2n+1}) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{2n+2}(U(n)) & \xrightarrow{\chi_*} & \pi_{2n+2}(S^{2n-1}) \\ \uparrow \alpha^2 & & & & \uparrow \alpha^2 \\ \pi_{2n+1}(S^{2n+1}) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{2n}(U(n)) & \xrightarrow{\chi_*} & \pi_{2n}(S^{2n-1}) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ Z & & Z_{n!} & & Z_2 \end{array}$$

ou les applications de la ligne inférieure sont surjectives, montre que $\chi_* \circ \partial(\alpha^2 \xi)$ est l'élément $\alpha^3(\xi)$ d'ordre 2 dans $\pi_{2n+2}(S^{2n-1}) = \mathbb{Z}_{24}$. Il est donc divisible au plus par 12, ce qui exclut la possibilité $\mathbb{Z}_{2(n+1)!}$, et termine la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BOREL (A.) and HIRZEBRUCH (F.). - Characteristic classes and homogeneous spaces, I., Amer. J. of Math., t. 80, 1958, p. 458-538.
 - [2] BOTT (Raoul). - The stable homotopy of the classical groups, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 43, 1957, p. 933-935.
 - [3] DOUADY (Adrien). - Applications de la suite spectrale des espaces fibrés, Séminaire Cartan, t. 11, 1958/59 : Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires, n° 3.
 - [4] EILENBERG (Samuel) and STEENROD (Norman). - Foundations of algebraic topology. - Princeton, Princeton University Press, 1952 (Princeton mathematical Series, 15).
 - [5] SERRE (Jean-Pierre). - Homologie singulière des espaces fibrés, Annals of Math., t. 54, 1951, p. 425-505 (Thèse Sc. math. Paris. 1951).
 - [6] STEENROD (Norman). - The topology of fibre bundles. - Princeton, Princeton University Press, 1951 (Princeton mathematical Series, 14).
 - [7] TODA (Hirosi). - A topological proof of theorems of Bott and Borel-Hirzebruch for homotopy groups of unitary groups, Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto, t. 32, 1959, p. 103-119.
-