John C. Moore

Algèbres de Hopf universelles

Séminaire Henri Cartan, tome 12, n° 2 (1959-1960), exp. n° 10, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1959-1960__12_2_A1_0>

Séminaire H. CARTAN - J. C. MOORE 10-01
12e année, 1959/60, n° 10
18 janvier 1960

ALGÈBRES DE HOPF UNIVERSELLES

par John C. MOORE

Dans cet exposé, tous les modules sont des K-modules, où K désigne un anneau de base commutatif, fixé une fois pour toutes ; on supposera que K est un anneau de Dedekind. Quand on parle d'algèbre, ou de coalgèbre, ou d'algèbre de Hopf, on suppose toujours que le K-module gradué sous-jacent est connexe, et projectif de type fini (on pourrait travailler sous des hypothèses moins restrictives, mais, pour les applications qu'on a en vue dans les exposés suivants, ces hypothèses suffisent, et les démonstrations sont plus simples). De plus, toutes les algèbres ont une multiplication associative, et toutes les coalgèbres ont une application diagonale associative. Ainsi, une algèbre de Hopf possède une multiplication associative et une application diagonale associative.

Nous considérons d'abord le problème consistant à plonger une coalgèbre dans une algèbre de Hopf. Il y a deux solutions universelles, selon que l'on considère toutes les algèbres de Hopf, ou seulement les algèbres de Hopf à multiplication commutative.

PROPOSITION 1. - *Si* C *est une coalgèbre, il existe une algèbre de Hopf* $T(C)$ *et un morphisme de coalgèbres* $\iota : C \to T(C)$, *tels que si* A *est une algèbre de Hopf et* $f : C \to A$ *un morphisme de coalgèbres, il existe un unique morphisme d'algèbres de Hopf* $\tilde{f} : T(C) \to A$ *tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & A \\ T(C) \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

DÉMONSTRATION. - Soit $J(C)$ le conoyau de $\eta : K \to C$; $J(C)$ est donc canoniquement isomorphe au sous-module des éléments de degré > 0 de C. Soit $T(C)$ l'algèbre de Hopf qui, comme algèbre, est l'algèbre associative libre engendrée par $J(C)$; et soit $\iota : C \to T(C)$ l'application naturelle. Il y a une unique application diagonale Δ dans $T(C)$, telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\ \downarrow \iota & & \downarrow \iota\otimes\iota \\ T(C) & \xrightarrow{\Delta} & T(C) \otimes T(C) \end{array}$$

soit commutatif, et telle que Δ soit un morphisme d'algèbres. On notera que l'image de ι contient un système de générateurs de l'algèbre $T(C)$. Il est clair que $T(C)$ et $\iota : C \to T(C)$ satisfont à la propriété universelle désirée.

PROPOSITION 2. - Si C est une coalgèbre, il existe une algèbre de Hopf à multiplication commutative $L(C)$, et un morphisme de coalgèbres $\iota : C \to L(C)$, tels que si A est une algèbre de Hopf à multiplication commutative et $f : C \to A$ un morphisme de coalgèbres, il existe un unique morphisme d'algèbres de Hopf $\tilde{f} : L(C) \to A$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow \iota & \nearrow \tilde{f} & \\ L(C) & & \end{array}$$

soit commutatif.

DÉMONSTRATION. - Soit $L(C)$ l'algèbre de Hopf qui, comme algèbre, est l'algèbre associative-commutative libre engendré par $J(C)$, et telle que si $\iota : C \to L(C)$ est l'application naturelle, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & C \otimes C \\ \downarrow \iota & & \downarrow \iota\otimes\iota \\ L(C) & \longrightarrow & L(C) \otimes L(C) \end{array}$$

soit commutatif. Ici encore, la propriété universelle désirée est évidemment satisfaite par $\iota : C \to L(C)$.

DÉFINITIONS et RAPPELS. - Si A est une algèbre, $I(A)$ désigne le noyau de $\varepsilon : A \to K$, c'est-à-dire le sous-module des éléments de degré > 0 de A (cf. l'exposé 4). De plus $Q(A) = I(A)/I(A)^2$. L'algèbre A est triviale si l'application naturelle $I(A) \to Q(A)$ est un isomorphisme, i. e. si $I(A)^2 = 0$.

De même, pour une coalgèbre C, le module $P(C)$ des éléments primitifs est le noyau de l'application naturelle $J(C) \to J(C) \otimes J(C)$, et $J(C)^2$ est la coimage d'une certaine application. La coalgèbre C est triviale si l'application naturelle $P(C) \to J(C)$ est un isomorphisme, i. e. si $J(C)^2 = 0$ (exposé 4). On observera que si C est une coalgèbre triviale, alors $L(C)$ est justement l'algèbre de Hopf souvent utilisée et désignée par $L(J(C))$.

Autres conventions et commentaires : Pour tout K-module X, le K-module $\mathrm{Hom}(X, K)$ sera noté X^*. Le module X^* s'appelle le *dual* de X. Si X est projectif de type fini, il en est de même de X^* et $X \to X^{**}$ est un isomorphisme. Si $f : X \to Y$ est un morphisme de K-modules, alors $f^* : Y^* \to X^*$ est défini par :

$$f^*(y^*)(x) = y^*(f(x)) \quad .$$

L'application f^* s'appelle la duale de f.

Soit maintenant A une algèbre ayant pour multiplication $\Phi : A \otimes A \to A$; alors A^* est une coalgèbre avec application diagonale $\Phi^* : A^* \to A^* \otimes A^*$, et $A^{**} = A$. Des considérations analogues s'appliquent aux coalgèbres, ainsi qu'aux algèbres de Hopf. Rappelons que la duale d'une algèbre de Hopf est encore une algèbre de Hopf.

PROPOSITION 3. - *Si* A *est une algèbre, il existe une algèbre de Hopf* $U(A)$ *et un morphisme d'algèbres* $\pi : U(A) \to A$ *tels que si* C *est une algèbre de Hopf et* $f : C \to A$ *un morphisme d'algèbres, il existe un unique morphisme d'algèbres de Hopf* $\tilde{f} : C \to U(A)$ *tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & U(A) \arrow[d, "\pi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

DÉMONSTRATION. - Il suffit de prendre $U(A) = T(A^*)^*$, $\pi : U(A) \to A$ étant l'application duale de $\iota : A^* \to T(A^*)$.

La proposition 3 est duale de la proposition 1.

PROPOSITION 4. - *Si* A *est une algèbre, il existe une algèbre de Hopf à application diagonale commutative* $M(A)$, *et un morphisme d'algèbres* $\pi : M(A) \to A$, *tels que si* C *est une algèbre de Hopf dont l'application diagonale est commutative, et si* $f : C \to A$ *est un morphisme d'algèbres de Hopf, il existe un unique morphisme d'algèbres de Hopf* $\tilde{f} : C \to M(A)$ *rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & M(A) \arrow[d, "\pi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

DÉMONSTRATION. - Il suffit de poser $M(A) = L(A^*)^*$, l'application π : $M(A) \to A$ étant duale de $\iota : A^* \to L(A^*)$.

PROPOSITION 5. - Soit C une coalgèbre ; alors :

1° $T(C)^* = U(C^*)$;

2° $L(C)^* = M(C^*)$;

3° Pour que l'application diagonale de l'algèbre de Hopf $T(C)$ (resp. $L(C)$) soit commutative, il faut et il suffit que l'application diagonale de la coalgèbre C soit commutative.

La démonstration est évidente à partir des définitions.

PROPOSITION 6. - Si C est une coalgèbre, l'application naturelle $J(C) \to Q(L(C))$ est un isomorphisme. Si A est une algèbre, l'application naturelle $P(M(A)) \to I(A)$ est un isomorphisme.

Ceci résulte aussitôt des définitions. On observera que les deux assertions de l'énoncé sont duales l'une de l'autre.

DÉFINITIONS. - Si X est un module, nous noterons X^n le produit tensoriel de n exemplaires de X . Si A est une algèbre, A^n désignera l'algèbre, produit tensoriel de n exemplaires de A . Si C est une coalgèbre, C^n désignera la coalgèbre, produit tensoriel de n exemplaires de C .

Soit π_n le groupe symétrique sur n lettres. Si X est un module, π_n opère sur X^n . En particulier, si $\sigma \in \pi_n$ est la transposition qui échange la i-ème et la $(i+1)$-ième lettre, on a :

$$\sigma(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = (-1)^{rs}\, x_1 \otimes \dots \otimes x_{i-1} \otimes x_{i+1} \otimes x_i \otimes x_{i+2} \otimes \dots \otimes x_n ,$$

PROPOSITION 7. - Soit C une coalgèbre. Si q est un entier > 0 , il existe un entier n tel que l'application naturelle $\iota^n : C^n \to L(C)$ soit un épimorphisme dans les degrés $\leqslant q$. De plus, ι^n est un morphisme de π_n-modules, lorsqu'on fait opérer π_n trivialement sur $L(C)$.

DÉMONSTRATION. - L'application ι^n est composée de $C^n \to L(C)^n$ et de l'application $L(C)^n \to L(C)$ fournie par la multiplication dans $L(C)$. La seconde partie de l'énoncé provient du fait que la multiplication de $L(C)$ est commutative.

La première partie suit du fait que $\iota(J(C))$ est un système de générateurs de $L(C)$ comme algèbre. On notera que ι^n est morphisme de coalgèbres.

PROPOSITION 8. - <u>Soit</u> C <u>une algèbre. Si</u> q <u>est un entier</u> > 0 , <u>il existe un entier</u> n <u>tel que l'application naturelle</u> $\pi^n : M(A) \to A^n$ <u>soit un monomorphisme dans les degrés</u> $\leqslant q$.

<u>De plus,</u> π^n <u>est un morphisme de</u> π_n<u>-modules, lorsqu'on fait opérer</u> π_n <u>trivialement sur</u> $M(A)$.

DÉMONSTRATION. - Duale de la précédente. On notera que π^n est composée de l'application diagonale $M(A) \to M(A)^n$ et de l'application naturelle $M(A)^n \to A^n$. En outre π^n est un morphisme d'algèbres.

DÉFINITIONS et COMMENTAIRES. - Si C est une coalgèbre triviale, avec $J(C) = X$, on notera $L(X)$ l'algèbre de Hopf $L(C)$. De même, si A est une algèbre triviale, avec $I(A) = X$, on notera $M(X)$ l'algèbre de Hopf $M(A)$.

On se propose maintenant de définir une application naturelle :

$$\lambda : L(M(X)) \to M(L(X)) \quad ,$$

qui sera un morphisme d'algèbres de Hopf. Une telle application existe pour deux raisons : tout d'abord, il y a une projection naturelle de $J(M(X))$ sur X , et par suite il existe un morphisme naturel d'algèbres $\lambda_1 : L(M(X)) \to L(X)$; puisque $L(M(X))$ est une algèbre de Hopf, λ_1 définit un unique morphisme d'algèbres de Hopf $\lambda : L(M(X)) \to M(L(X))$ tel que $\pi\lambda = \lambda_1$, où $\pi : M(L(X)) \to L(X)$ est l'application canonique des algèbres. En second lieu, l'inclusion $X \to I(L(X))$ induit un morphisme de coalgèbres $\lambda_2 : M(X) \to M(L(X))$; puisque $M(L(X))$ est une algèbre de Hopf, il existe un unique morphisme d'algèbres de Hopf $\lambda : L(M(X)) \to M(L(X))$ tel que $\lambda\iota = \lambda_2$, où $\iota : M(X) \to L(M(X))$ est l'application canonique des coalgèbres.

λ n'est pas toujours un isomorphisme d'algèbres de Hopf ; mais il en est ainsi sous des hypothèses particulières. Supposons maintenant que X soit un module libre à un générateur x de degré $2n$; écrivons $[x]$ pour X . Une base pour le K-module libre $L([x])$ se compose des éléments $1 , x , x^2 , \dots$; une base pour le K-module libre $M([x])$ se compose des éléments $1 = \gamma_0(x)$, $x = \gamma_1(x)$, $\gamma_2(x)$, ... ; de plus $\gamma_i(x)\, \gamma_j(x) = (i , j)\, \gamma_{i+j}(x)$,

$$(1) \qquad \Delta(\gamma_k(x)) = \sum_{i+j=k} \gamma_i(x) \otimes \gamma_j(x) \quad .$$

THÉORÈME 1. - Si X est un module libre à un générateur x de degré $2n > 0$, l'application $\lambda : L(M(X)) \to M(L(X))$ est un isomorphisme d'algèbre de Hopf.

DÉMONSTRATION. - Considérons l'algèbre $(L([x]))^k$. C'est l'algèbre commutative libre ayant pour générateurs $x_1 , \ldots , x_k$, où x_i désigne $1 \otimes \ldots \otimes x \otimes 1 \ldots$ (x étant à la i-ième place). Soient $s_1 , \ldots , s_k$ les fonctions symétriques élémentaires des lettres $x_1 , \ldots , x_k$; considérons l'application :

$$\pi^k \circ \lambda : L(M([x])) \to (L([x]))^k \qquad \text{(cf. proposition 8).}$$

On a $(\pi^k \circ \lambda)(\gamma_i(x)) = s_i$ pour $i = 1 , \ldots , k$. Par ailleurs, les fonctions symétriques élémentaires $s_1 , \ldots , s_k$ engendrent la sous-algèbre de $(L([x]))^k$ formée des éléments invariants par le groupe symétrique sur k lettres ; et cette algèbre est commutative-libre en ses générateurs. Il s'ensuit que $\pi^k \circ \lambda$ est un isomorphisme en degrés $\leqslant 2kn$. L'image de λ est contenue dans l'algèbre des fonctions symétriques élémentaires, et par conséquent λ est un isomorphisme dans les degrés $\leqslant 2kn$. Puisque k a pu être choisi arbitrairement, il s'ensuit que λ est un isomorphisme.

On observera que si, dans la démonstration précédente, K est de caractéristique 2, il n'est pas nécessaire de supposer que le degré de x soit pair.

DÉFINITIONS et NOTATIONS. - Si x est de degré pair ou si la caractéristique de K est 2, l'algèbre de Hopf $L(M[x]) = M(L[x])$ sera notée $B(x)$. On définit comme suit les éléments $p_n(x) \in B(x)$:

1° $p_1(x) = x$;

2° $p_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} \gamma_j(x)\, p_{n-j}(x) + (-1)^{n+1} n\gamma_n(x)$ pour $n > 0$.

PROPOSITION 9. - Dans l'algèbre de Hopf $B(x)$, les éléments $p_k(x)$ ($k = 1 , \ldots , n , \ldots$) forment une base du K-module $P(B(x))$ des éléments primitifs.

DÉMONSTRATION. - Montrons d'abord que les éléments $p_k(x)$ sont primitifs. C'est évident pour $k = 1$; supposons-le vrai pour $k < n$. D'après la relation (1), on a :

$$\Delta(p_n(x)) = p_n(x) \otimes 1 + 1 \otimes p_n(x)$$

$$+ (-1)^{n+1} \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j(x) \otimes \gamma_{n-j}(x)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{j+1} (\gamma_{j-i}(x) p_{n-j}(x) \otimes \gamma_i(x))$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{j+1} (\gamma_i(x) \otimes \gamma_{j-i}(x) p_{n-j}(x))$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} (p_{n-j}(x) \otimes \gamma_j(x) + \gamma_j(x) \otimes p_{n-j}(x)) \quad .$$

Ceci est égal à :

$$p_n(x) \otimes 1 + 1 \otimes p_n(x) + (-1)^{n+1}\, n \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j(x) \otimes \gamma_{n-j}(x)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n-1} (-1)^{i+1} (\gamma_{i-j}(x) p_{n-i}(x) \otimes \gamma_j(x) + \gamma_j(x) \otimes \gamma_{i-j}(x) p_{n-i}(x))$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} (p_{n-j}(x) \otimes \gamma_j(x) + \gamma_j(x) \otimes p_{n-j}(x))$$

$$= p_n(x) \otimes 1 + 1 \otimes p_n(x) + (-1)^{n+1}\, n \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j(x) \otimes \gamma_{n-j}(x)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^j (p_{n-j}(x) + (-1)^{n-j} (n-j)\, \gamma_{n-j}(x) \otimes \gamma_j(x))$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^j\, \gamma_j(x) \otimes (p_{n-j}(x) + (-1)^{n-j} (n-j)\, \gamma_{n-j}(x))$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} (p_{n-j}(x) \otimes \gamma_j(x) + \gamma_j(x) \otimes p_{n-j}(x))$$

$$= p_n(x) \otimes 1 + 1 \otimes p_n(x) + (-1)^{n+1}\, n \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j(x) \otimes \gamma_{n-j}(x)$$

$$+ (-1)^n \sum_{j=2}^{n-1} j \gamma_j(x) \otimes \gamma_{n-j}(x)$$

$$+ (-1)^n \sum_{j=1}^{n-2} (n-j)\, \gamma_j(x) \otimes \gamma_{n-j}(x)$$

$$+ (-1)^n (x \otimes \gamma_{n-1}(x) + \gamma_{n-1}(x) \otimes x)$$

$$= p_n(x) \otimes 1 + 1 \otimes p_n(x)$$

$$+ (-1)^{n+1}\, n(x \otimes \gamma_{n-1}(x) + \gamma_{n-1}(x) \otimes x)$$

$$+ (-1)^{n}(n-1)(\gamma_{n-1}(x) \otimes x + x \otimes \gamma_{n-1}(x))$$

$$+ (-1)^{n}(x \otimes \gamma_{n-1}(x) + \gamma_{n-1}(x) \otimes x)$$

$$= p_n(x) \otimes 1 + 1 \otimes p_n(x) \quad .$$

Ainsi $p_n(x)$ est primitif, par récurrence sur n.

Considérons maintenant l'application naturelle :

$$\theta : B(x) \to L[x] \quad .$$

On a $\theta(p_1(x)) = x$, $\theta(\gamma_k(x)) = 0$ pour $k > 1$, et par suite $\theta(p_k(x)) = x . \theta(p_{k-1}(x))$ pour $k > 1$. Par conséquent, par récurrence, on trouve que $\theta(p_k(x)) = x^k$. Ceci exprime que le sous-espace de $P(B(x))$ engendré par les éléments $p_1(x)$, $p_2(x)$, ... s'applique isomorphiquement sur $I(L[x])$; d'après la proposition 6, c'est le sous-espace de tous les éléments de $P(B(x))$, ce qui prouve la présente proposition.

PROPOSITION 10. - <u>Supposons que le degré de</u> y <u>soit</u> r <u>fois le degré de</u> x. <u>Alors, il existe un morphisme d'algèbres de Hopf</u> $f : B(y) \to B(x)$ <u>tel que</u> :

$$f(p_k(y)) = p_{rk}(x) \qquad \text{pour tout } k .$$

<u>Si la caractéristique de</u> K <u>est zéro, le morphisme</u> f <u>est unique</u>.

DÉMONSTRATION. - Il y a un unique morphisme d'algèbres :

$$f' : L[y] \to L[x]$$

tel que $f'(y) = x^r$; cette application induit $f : B(y) \to B(x)$, et on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} B(y) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\theta"] & B(x) \arrow[d, "\theta"] \\ L[y] \arrow[r, "f'"] & L[x] \end{tikzcd}$$

On a $f'\, \theta(p_k(y)) = f'(y^k) = x^{rk}$, $\theta(p_{rk}(x)) = x^{rk}$, et par suite l'application f possède la propriété désirée. Les formules récurrentes donnant les éléments $p_i(x)$ et $p_j(y)$ montrent alors l'unicité de f si la caractéristique de K est zéro.

CONVENTION. - Si le degré de y est r fois le degré de x, on peut considérer que $B(y)$ est une sous-algèbre de Hopf de $B(x)$, grâce à la proposition précédente. On peut donc considérer l'algèbre de Hopf quotient $B(x)//B(y)$. Le fait que c'est bien une algèbre de Hopf résulte de la proposition 6 de l'exposé 4.

PROPOSITION 11. - Soient n et r des entiers > 0, n étant pair ; soient x de degré n, y de degré rn ; alors :

1° $Q(B(x)//B(y))_q = 0$ si $q \equiv 0 \mod n$;

2° Si r est une unité de K, $Q(B(x)//B(y))_q = 0$ si $q \equiv 0 \mod rn$, et est libre de base l'image de $\gamma_{kn}(x)$ si $q = kn$, avec $k \not\equiv 0 \mod r$;

3° Si r est une unité de K, $B(x)//B(y)$ est commutative-libre comme algèbre ;

4° Si p est premier et $r = p^i$, la caractéristique de K étant p, $Q(B(x)//B(y))_{kn}$ est libre de base l'image de $\gamma_{kn}(x)$ quel que soit $k > 0$, et le noyau de l'application naturelle $B(x) \to B(x)//B(y)$ est l'idéal engendré par les éléments $\gamma_k(x)^{p^i}$ pour tous les $k > 0$.

DÉMONSTRATION. - On observe d'abord que les algèbres $B(x)$, $B(y)$ et $B(x)//B(y)$ peuvent être obtenues à partir des algèbres correspondantes sur l'anneau $\mathbb{Z}$, en tensorisant (sur $\mathbb{Z}$) par K. En outre, si A est une $\mathbb{Z}$-algèbre, on a $Q(A \otimes_{\mathbb{Z}} K) = Q(A) \otimes_{\mathbb{Z}} K$. On a alors une suite exacte :

$$Q(B(y)) \to Q(B(x)) \to Q(B(x))//B(y)) \to 0 \quad .$$

De plus $p_{rk}(x) = p_k(y)$, de sorte que l'on a, modulo les éléments décomposables :

$$(-1)^{k+1} k\gamma_k(y) \equiv p_k(y) = p_{rk}(x) \equiv (-1)^{rk+1} kr\gamma_{kr}(x) \quad ;$$

et si la caractéristique de K est zéro, ceci implique que :

$$\gamma_k(y) \equiv (-1)^{(r+1)k} r\gamma_{kr}(x) \quad .$$

Les assertions 1°, 2°, et la première moitié de 4° résultent de là aussitôt. En utilisant le théorème 4 de l'exposé 4, l'assertion 2° implique 3°. Il reste donc à prouver la seconde partie de 4°. Sous les hypothèses faites, $y = x^{p^i} = p_{p^i}(x)$. Supposons que, pour $i < j$, $\gamma_i(y) = \gamma_r(x)^{p^i}$; alors :

$$\Delta(\gamma_j(y)) = \sum_{u+v=j} \gamma_u(y) \otimes \gamma_v(y) \quad ,$$

et :

$$\Delta(\gamma_j(x)^{p^i}) = \sum_{u+v=j} \gamma_u(x)^{p^i} \otimes \gamma_v(x)^{p^i} \quad .$$

Par suite $\gamma_j(y) - \gamma_r(x)^{p^j}$ est primitif ; et puisque l'image de cet élément dans $L(x)$ est 0 pour $j > 1$, on a $\gamma_j(y) = \gamma_r(x)^{p^j}$, ce qui prouve la première moitié de l'assertion 4.

PROPOSITION 12. - <u>Soient</u> r <u>et</u> n <u>des entiers</u> > 0, n <u>étant pair ; soient</u> x <u>de degré</u> n, <u>et</u> y <u>de degré</u> rn. <u>Alors</u> :

1° <u>L'algèbre de Hopf</u> $(B(x)//B(y))^*$ <u>est isomorphe à l'algèbre de Hopf</u> $B(x)\backslash\backslash B(y)$; <u>cette dernière étant définie par l'épimorphisme</u> $\tilde{f} : B(x) \to B(y)$ <u>induit par</u> $f : M[x] \to M[y]$ <u>tel que</u> $f(\gamma_{kr}(x)) = \gamma_k(y)$, $f(\gamma_i(x)) = 0$ <u>pour</u> $i \not\equiv 0 \mod r$;

2° <u>L'algèbre de Hopf</u> $B(x)\backslash\backslash B(y)$ <u>est commutative-libre comme algèbre</u> ;

3° <u>La suite</u> :

$$0 \to Q(B(x)\backslash\backslash B(y)) \to Q(B(x)) \to Q(B(y)) \to 0$$

<u>est exacte</u>.

DÉMONSTRATION. - En vertu du théorème 1, on a $B(x) = B(x)^*$ et $B(y) = B(y)^*$. De plus le dual du diagramme

$$\begin{array}{ccc} B(y) & \longrightarrow & B(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L[y] & \longrightarrow & L[x] \end{array}$$

est

$$\begin{array}{ccc} M[y] & \longrightarrow & M[x] \\ \downarrow & & \downarrow \\ B(y) & \longrightarrow & B(x) \end{array}$$

à condition d'identifier $L[y]^*$ et $M[y]$, $L[x]^*$ et $M[x]$. Ceci prouve l'assertion 1.

On a la suite exacte :

$$Q(B(x)\backslash\backslash B(y)) \xrightarrow{\iota} Q(B(x)) \xrightarrow{Q(\tilde{f})} Q(B(y)) \to 0 \quad ,$$

et, par suite, si on montre que ι est un monomorphisme, la proposition sera démontrée grâce à la proposition 1 de l'exposé 4.

Soit $w_0 = 1$, $w_j = 0$ pour $j \equiv 0 \mod r$ $(j > 0)$. Définissons w_j pour les autres valeurs de j , en posant :

$$w_j = \gamma_j(x) \qquad \text{pour} \quad j < r \quad ,$$

$$w_{j+kr} = \gamma_{j+kr}(x) - \sum_{i=1}^{k-1} w_{j+ir}\, \gamma_{(k-i)r}(x) \qquad \text{pour} \quad 0 < j < r \quad .$$

L'application composée :

$$B(x) \to B(x) \otimes B(x) \xrightarrow{\iota \otimes \tilde{f}} B(x) \otimes B(y)$$

envoie w_j en $1 \otimes w_j$. Donc $w_j \in B(x)\backslash\backslash B(y)$, et cette algèbre de Hopf est librement engendrée, comme algèbre commutative, par les éléments w_j relatifs aux j tels que $j \not\equiv 0 \mod r$. Ceci prouve la proposition.

REMARQUE. - Considérons l'algèbre $\overline{B(x)} = \prod_q B(x)_q$; définissons γ par la condition que sa composante dans $B(x)_q$ est 0 si $q \not\equiv 0 \mod n$, et est $\gamma_k(x)$ en degré kn ; définissons y par la condition que sa composante de degré q est 0 si $q \not\equiv 0 \mod rn$, et est $\gamma_{kr}(x)$ en degré krn ; définissons w tel que sa composante de degré q soit 0 si $q \not\equiv 0 \mod n$, et soit w_k en degré kn . Alors w est l'unique élément ayant cette propriété, y est une unité, et $w = \gamma y^{-1}$.