JOHN C. MOORE

La suspension

Séminaire Henri Cartan, tome 12, nº 1 (1959-1960), exp. nº 6, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1959-1960__12_1_A6_0>

14 décembre 1959

LA SUSPENSION

par John C. MOORE

Dans cet exposé, on donnera une étude générale des opérations de suspension dans l'homologie et la cohomologie des espaces fibrés. "Homologie" ou "cohomologie" signifiera toujours homologie ou cohomologie singulière. Nous supposerons connus des résultats classiques sur ces théories, y compris ce qui est courant sur les théorèmes de Künneth, les suites spectrales d'espaces fibrés, et les produits. L'application $\pi : E \to B$ est une <u>application fibrée</u> si

1° π est continue et surjective et

2° si X est un complexe fini et A un sous-complexe de X qui est un rétracte par déformation, et si on se donne une application $f : A \to E$ et un prolongement de πf, $g : X \to B$, alors il existe un prolongement de f, appelé $\tilde{g} : X \to E$, tel que $\pi \tilde{g} = g$.

Ainsi, la notion d'application fibrée dont nous nous servirons sera toujours celle définie par SERRE [1]. On sait que les espaces fibrés classiques sont toujours fibrés en ce sens.

1. La suspension.

Soient $\pi : E \to B$ une application fibrée, b_0 un point de B, et $F = \pi^{-1}(b_0)$, l'espace F est appelé la fibre de l'application fibrée π. Considérons l'homologie à coefficients dans le groupe abélien G. Nous avons une suite exacte :

$$\cdots \longrightarrow H_q(F\ ;\ G) \xrightarrow{i_*} H_q(E\ ;\ G) \xrightarrow{j_*} H_q(E\ ,\ F\ ;\ G) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(F\ ;\ G) \longrightarrow \cdots$$

Soit $H'_q(E\ ,\ F\ ;\ G)$ le conoyau de j_*, et soit $H'_{q-1}(F\ ;\ G)$ l'image de ∂_* ; il y a un isomorphisme canonique

$$\partial_* : H'_q(E\ ,\ F\ ;\ G) \xrightarrow{\approx} H'_{q-1}(F\ ;\ G) \quad .$$

L'homomorphisme de suspension sera un homomorphisme de $H'_{q-1}(F\ ;\ G)$ dans un quotient de $H_q(B\ ,\ b_0\ ;\ G)$.

Pour tout espace topologique X, soit $C(X\ ;\ G) = \sum_q C_q(X\ ;\ G)$ le groupe des chaînes singulières normalisées de X à coefficients dans G. Pour un sous-espace A de X, posons $C(X, A ; G) = C(X ; G)/C(A ; G)$. Si $\pi : E \to B$ est une application fibrée, il y a une surjection canonique

$$\pi : C(E , F ; G) \to C(B , b_0 ; G)$$

et une application induite

$$\pi_* : H_q(E , F ; G) \to H_q(B , b_0 ; G) \quad .$$

Soit $H'_q(B , b_0 ; G)$ le conoyau de

$$\pi_* j_* : H_q(E ; G) \to H_q(B , b_0 ; G) \quad .$$

<u>L'homomorphisme de suspension</u> $\sigma : H'_{q-1}(F ; G) \to H'_q(B , b_0 ; G)$ est l'application canonique induite par $\pi_* \circ \partial_*^{-1}$.

Si l'application d'inclusion $i : F \to E$ est homologiquement triviale en dimension $q - 1$, c'est-à-dire si $i_* : H_{q-1}(F ; G) \to H_{q-1}(E ; G)$ est l'application nulle, alors

$$H'_{q-1}(F ; G) = H_{q-1}(F ; G)$$

et

$$\sigma : H_{q-1}(F ; G) \to H'_q(B ; G) \quad .$$

Remarquons que si la fibre F se contracte dans l'espace E, alors $i : F \to E$ est homologiquement triviale en toute dimension.

Plus généralement, si pour toute application $f : K \to F$, où K est un complexe fini, l'application $if : K \to E$ est homotopiquement triviale, $i : F \hookrightarrow E$ est homologiquement triviale en toute dimension. Dans ce cas, nous dirons que la fibre est <u>faiblement contractile dans</u> E, et dans ce cas l'homomorphisme de suspension est défini sur les groupes d'homologie de la fibre et pas seulement sur un sous-groupe. Remarquons qu'on peut définir une notion de fibre F contractile dans E en dimension inférieure ou égale à n. Cela veut dire que si $F : K \to F$ est une application où K est un complexe fini de dimension inférieure ou égale à n, alors $if : K \to E$ est homotopiquement triviale. Dans ce cas

$$\sigma : H_q(F ; G) \to H'_{q+1}(B , b_0 ; G) \qquad \text{pour} \qquad q \leq n \quad .$$

Jusqu'à présent, nous nous sommes peu souciés de l'homologie de la fibre en dimension 0 . Rappelons que la suite

$$H_0(F ; G) \xrightarrow{i_*} H_0(E ; G) \xrightarrow{j_*} H_0(E , F ; G) \longrightarrow 0$$

est exacte, et que i_* n'est jamais nulle. En fait, si E est connexe, $H_0(E , F ; G) = 0$, i_* est surjective en dimension 0 , et $H'_0(F ; G)$ n'est autre que le groupe d'homologie augmenté de F à coefficients dans G en dimension 0 . Désormais, nous supposerons, lorsque nous parlerons d'une application fibrée $\pi : E \longrightarrow B$, que l'espace total E (et par conséquent la base B) est connexe par arcs (1). Et par suite $H'_0(F ; G)$ n'est autre que le groupe d'homologie augmenté de F en dimension 0 .

Nous nous intéressons maintenant à des conditions qui vont assurer que l'homomorphisme de suspension prend ses valeurs dans le groupe de $H_q(B , b_0 ; G)$ et pas seulement dans un de ses quotients $H'_q(B , b_0 ; G)$. La situation est exactement semblable à celle que nous avons déjà rencontrée à propos de l'injection $i : F \longrightarrow E$. Pour formaliser légèrement la situation nous introduisons quelques définitions.

DÉFINITIONS. - Une application $f : X \longrightarrow Y$ est inessentielle en dimension inférieure ou égale à n si pour toute application $g : K \longrightarrow X$, où K est un complexe fini de dimension inférieure ou égale à n , l'application fg est homotopiquement triviale, i. e. est homotope à une application de K sur un point de Y . L'application $f : X \longrightarrow Y$ est inessentielle (on devrait dire faiblement inessentielle) si pour toute application $g : K \longrightarrow X$, où K est un complexe fini, l'application $fg : K \longrightarrow Y$ est homotopiquement triviale.

Il est clair maintenant que, si la projection $\pi : E \longrightarrow B$ est inessentielle en dimension inférieure ou égale à n , alors

$$H_q(B , b_0 ; G) = H'_q(B , b_0 ; G) \qquad \text{pour} \qquad q \leq n \quad .$$

Par suite, si $\pi : E \longrightarrow B$ est une application fibrée, $b_0 \in B$, $F = \pi^{-1}(b_0)$ et si $i : F \longrightarrow B$ est l'injection canonique, alors si i et π sont inessentielles, l'homomorphisme de suspension

$$\sigma : H_q(F ; G) \longrightarrow H_{q+1}(B ; G)$$

est défini pour tout entier q .

(1) Note du traducteur : pathwise connected :"connexe par chemins". Pour un espace séparé, ces conditions sont équivalentes ; mais on ne s'intéressera qu'aux chemins.

<u>Exemple 1</u>. - Soit B un espace topologique connexe par arcs avec un point de base b_0. Soit E l'espace des chemins de E qui partent de b_0, et $\pi : E \to B$ l'application qui, à tout chemin, fait correspondre son extrémité. La fibre $\Omega = \pi^{-1}(b_0)$ est l'espace des lacets de B. Puisque E est contractile, $\pi : E \to B$ et $i : \Omega \to E$ sont toutes deux inessentielles et l'homomorphisme de suspension

$$\sigma : H_q(\Omega ; G) \to H_{q+1}(B , b_0 ; G)$$

est bien défini en toute dimension.

<u>Exemple 2</u>. - Soit G un groupe topologique, et soit $\pi : E \to B$ la projection d'un fibré universel de G ; alors l'homologie et l'homotopie de E sont triviales, $i : G \to E$ et $\pi : E \to B$ sont toutes deux inessentielles, et la suspension

$$\sigma : H_q(G ; A) \to H_{q+1}(B ; A)$$

est bien définie pour tout entier q et tout groupe de coefficients A.

<u>Exemple 3</u>. - Soit G un groupe de Lie compact simplement connexe et soit T un tore de G. Soit $\pi : G \to G/T$ l'application canonique de G sur l'espace des classes à gauche de T dans G. Comme G est simplement connexe, l'injection $i : T \to G$ est inessentielle.

Ayant passé pas mal de temps à définir la suspension, nous aimerions voir qu'il lui arrive de ne pas être triviale.

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> $\pi : E \to B$ <u>une application fibrée</u> ([2]), <u>et supposons</u> :

1° <u>que</u> B <u>soit simplement connexe</u>

2° <u>que</u> G <u>soit un groupe abélien, et</u> $H_q(B , b_0 ; G) = 0$ <u>pour</u> $q < n$, $\mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(B) , G) = 0$, $H_0(E ; G) = G$ <u>et</u> $H_q(E ; G) = 0$ <u>pour</u> $0 < q < 2n$. <u>Alors</u> :

1° <u>La fibre</u> F <u>de</u> $\pi : E \to B$ <u>est connexe et</u>,

2° <u>La suspension</u> $\sigma : H_q(F ; G) \to H_{q+1}(B , b_0 ; G)$ <u>est un isomorphisme pour</u> $0 < q < 2(n - 1)$ <u>et un épimorphisme pour</u> $q = 2n - 2$.

DÉMONSTRATION. - La suite exacte d'homotopie $\pi_1(B) \to \pi_0(F) \to \pi_0(E)$ montre que la fibre est connexe. Regardons maintenant la suite spectrale de l'application $\pi : (E , F) \to (B , b_0)$. Nous avons $E^2_{p,q} = H_p(B , b_0 ; H_q(F ; G))$. En utilisant

([2]) Jusqu'ici nous ne nous sommes pas servis de cette hypothèse.

le fait que $H_q(E\ ;\ G) = 0$ pour $0 < q < 2n$, on trouve que

$$\partial_* : H_q(E\ ,\ F\ ;\ G) \xrightarrow{\approx} H_{q-1}(F\ ;\ G) \quad \text{pour} \quad q < 2n-1 \quad ,$$

où $H_0(F\ ;\ G)$ désigne le groupe de dimension 0 augmenté, et que

$$\pi_* : H_q(E\ ,\ F\ ;\ G) \longrightarrow H_q(B\ ,\ b_0\ ;\ G)$$

est un isomorphisme pour $q < 2(n-1)$ et un épimorphisme pour $q = 2n-2$, ce qui entraîne le théorème.

Le lecteur se reportera à [1] pour une démonstration plus détaillée de ce théorème. La démonstration originale qui s'y trouve diffère légèrement dans les détails, mais les idées de base sont les mêmes.

Soit $f : E \longrightarrow B$ une application fibrée, $b_0 \in B$, $F = f^{-1}(b_0)$, $x_0 \in F$. Soit $\pi_q(F)$ le groupe d'homotopie de dimension q de F avec point de base en x_0 , $\pi_q(E)$ et $\pi_q(B)$ les groupes d'homotopie de dimension q de E et de B avec point de base respectivement en x_0 et b_0 . Si l'injection $i : F \longrightarrow E$ est inessentielle, nous avons une suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi_q(E) \longrightarrow \pi_q(B) \longrightarrow \pi_{q-1}(F) \longrightarrow 0 \qquad ;$$

si la projection $f : E \longrightarrow B$ est inessentielle, l'application $\pi_q(E) \longrightarrow \pi_q(B)$ est nulle. Et finalement, supposer que l'injection $i : F \longrightarrow E$ et la projection $f : E \longrightarrow B$ sont toutes deux homotopiquement triviales équivaut à supposer que $\pi_q(E) = 0$ pour tout q et par suite E est essentiellement un espace contractile. Dans ce cas $\pi_q(B) \xrightarrow{\approx} \pi_{q-1}(F)$, et nous avons défini un homomorphisme de suspension

$$\sigma : \pi_q(F) \xrightarrow{\approx} \pi_{q+1}(B) \qquad \text{pour tout } q \qquad .$$

Si $\varphi : \pi_q(X) \longrightarrow H_q(X)$ désigne l'homomorphisme de Hurewicz de l'homotopie dans l'homologie, nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_q(F) & \xrightarrow{\sigma} & \pi_{q+1}(B) \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ H_q(F) & \xrightarrow{\sigma} & H_{q+1}(B) \end{array} \qquad .$$

Quand on ne précise pas le groupe des coefficients, il s'agit d'homologie à coefficients dans les entiers. De plus rappelons qu'en dimension strictement positive, $H_q(B, b_0) = H_q(B)$.

2. Interprétation géométrique de la suspension et autres propriétés.

Désormais nous supposerons que tous les espaces sont munis d'un point de base, et que sauf mention du contraire les applications respectent les points de base.

DÉFINITION. - Soient X et Y des espaces ; posons $X \vee Y = (X \times y_0) \cup (x_0 \times Y)$, où x_0 est le point de base de X et y_0 celui de Y.

L'application diagonale $\Delta : X \to X \times X$ induit une application diagonale

$$\Delta_* : H_q(X, x_0 ; G) \to H_q(X \times X, (x_0 \times x_0) ; G) .$$

De plus

$$H_q(X \times X, (x_0 \times x_0) ; G) \approx H_q(X \times X, X \vee X ; G) \oplus H_q(X \vee X, (x_0 \times x_0) ; G) .$$

Précisons cet isomorphisme : si X et Y sont deux espaces (avec points-base x_0 et y_0), on considère l'homomorphisme

$$\alpha_q : H_q(X \times Y, x_0 \times y_0) \to H_q(X \vee Y, x_0 \times y_0)$$

somme de deux homomorphismes composés

$$H_q(X \times Y, x_0 \times y_0) \xrightarrow{u} H_q(X, x_0) \to H_q(X \vee Y, x_0 \times y_0)$$

$$H_q(X \times Y, x_0 \times y_0) \xrightarrow{v} H_q(Y, y_0) \to H_q(X \vee Y, x_0 \times y_0)$$

où u et v sont induits respectivement par les deux projections $X \times Y \to X$ et $X \times Y \to Y$. Considérons la suite exacte

$$\cdots \to H_q(X \vee Y, x_0 \times y_0) \xrightarrow{i_q} H_q(X \times Y, x_0 \times y_0) \xrightarrow{j_q} H_q(X \times Y, X \vee Y)$$

$$\xrightarrow{\partial_q} H_{q-1}(X \vee Y, x_0 \times y_0) \to \cdots$$

Puisque $\alpha_q \circ i_q =$ identité, i_q a un noyau nul pour tout q, donc $\partial_q = 0$ pour tout q, et j_q est surjectif ; la suite exacte

$$0 \to H_q(X \vee Y\ ,\ x_0 \times y_0) \xrightarrow{i_q} H_q(X \times Y\ ,\ x_0 \times y_0) \xrightarrow{j_q} H_q(X \times Y\ ,\ X \vee Y) \to 0$$

se fend grâce à α_q, ce qui identifie canoniquement $H_q(X \times Y\ ,\ X \vee Y)$ à un sous-groupe de $H_q(X \times Y\ ,\ x_0 \times y_0)$, à savoir au noyau de α_q.

Un élément $\alpha \in H_q(X\ ,\ x_0\ ;\ G)$ est <u>primitif</u> si la composante de $\Delta_*(\alpha)$ dans $H_q(X \times X\ ,\ X \vee X\ ;\ G)$ est zéro. Soit $P_q(X\ ;\ G)$ le sous-groupe de $H_q(X\ ;\ G)$ formé des éléments primitifs, et soit

$$P(X\ ;\ G) = \sum_q P_q(X\ ;\ G) \quad .$$

Si $\underset{\sim}{Z}$ est l'anneau des entiers, $P(X\ ;\ \underset{\sim}{Z})$ se note $P(X)$.

PROPOSITION. - <u>Si</u> $\varphi : \pi_q(X) \to H_q(X)$ <u>est l'homomorphisme de Hurewicz</u>,

$$\operatorname{Im} \varphi \subset P_q(X) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Soit $\alpha \in \pi_q(X)$, et soit $f_\alpha : S_q \to X$ un représentant de α, où S_q désigne la sphère de dimension q. Soit i_q le générateur canonique de $H_q(S_q)$, et posons $(f_\alpha)_*(i_q) = \varphi(\alpha)$.

Nous avons un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} H_q(S_q) \arrow[r, "\Delta_*"] \arrow[d, "f_\alpha"] & H_q(S_q \times S_q) \arrow[d, "(f_\alpha \times f_\alpha)"] \\ H_q(X) \arrow[r] & H_q(X \times X) \end{tikzcd}$$

Comme $H(S_q \times S_q) = H(S_q) \otimes H(S_q)$, i_q est primitif. Donc $(f_\alpha)_*(i_q) = \varphi(\alpha)$ est primitif, ce qui démontre la proposition.

DÉFINITION. - Pour tout espace X , soit $C(X)$ l'espace obtenu à partir de $X \times [0\ ,\ 1]$ en identifiant les points $(x\ ,\ 1)$ et $(x_0\ ,\ t)$ en un seul point, où x_0 est le point de base de X . L'espace $C(X)$ est appelé le <u>cône de</u> X , et X se plonge dans $C(X)$ en envoyant le point x au point représenté par $(x\ ,\ 0)$. Le point de base de $C(X)$ est la classe d'équivalence de $(x_0\ ,\ 0)$. Soit $s(X)$ l'espace obtenu à partir de $C(X)$ en contractant le sous-espace X en un point, c'est-à-dire que $s(X)$ est l'espace quotient de $X \times [0\ ,\ 1]$ par la relation obtenue en identifiant les points $(x\ ,\ 0)$, $(x\ ,\ 1)$ et $(x_0\ ,\ t)$ où $x \in X$, $t \in [0\ ,\ 1]$. L'espace $s(X)$ est appelé <u>suspension de</u> X .

DÉFINITION. - L'espace X est de <u>première catégorie</u> si l'application diagonale $\Delta : X \longrightarrow X \times X$ est homotope à une application $\Delta' : X \longrightarrow X \vee X$. L'espace X est faiblement de première catégorie si, pour toute application $f : K \longrightarrow X$, où K est un complexe fini, l'application Δf est homotope à une application

$$(\Delta f)' : K \longrightarrow X \vee X \qquad .$$

PROPOSITION. - <u>Soient</u> X <u>un espace faiblement de première catégorie, et</u> G <u>un groupe abélien ; alors</u> $P_q(X\ ;\ G) = H_q(X\ ,\ x_0\ ;\ G)$.

DÉMONSTRATION. - Soit $\alpha \in H_q(X\ ,\ x_0\ ;\ G)$; alors il existe un complexe fini K , une application $f\ ;\ K \longrightarrow X$ et un élément $\alpha' \in H_q(K\ ,\ k_0\ ;\ G)$ tels que $f_*(\alpha') = \alpha$. Puisque Δf est homotope à une application $(\Delta f)' : K \longrightarrow X \vee X$, on a :

$$\Delta_*(\alpha) = (\Delta f)_*(\alpha') = (\Delta f)'_*(\alpha') \in H_q(X \vee X\ ,\ (x_0 \times x_0)\ ;\ G)$$

et α est primitif.

PROPOSITION. - <u>Si</u> X <u>est un espace</u>, $s(X)$ <u>est de première catégorie</u>.

DÉMONSTRATION. - On définit θ_1 , θ_2 : $s(X) \times [0\ ,\ 1] \longrightarrow s(X)$ par

$$\theta_1(x\ ,\ t\ ,\ t') = \begin{cases} (x\ ,\ tt')\ , & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (x\ ,\ 2t - 1 + t'(1 - t))\ , & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\theta_2(x , t , t') = \begin{cases} (x , 1 - t' + tt') , & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ (x , 2t - tt') , & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

où on désigne un point de $s(X)$ par un représentant de sa classe d'équivalence.

On définit $D : s(X) \times [0 , 1] \longrightarrow s(X) \times s(X)$ par

$$D(x , t , t') = (\theta_1(x , t , t') , \theta_2(x , t , t')) \quad .$$

On a :

$$D(x , t , 0) \in s(X) \vee s(X)$$

et

$$D(x , t , 1) = (x , x) \quad .$$

Ainsi, en définissant $\Delta' : s(X) \longrightarrow s(X) \times s(X)$ par $\Delta'(x , t) = D(x , t , 0)$, nous avons Δ' homotope à Δ et $\operatorname{Im} \Delta' \subset s(X) \vee s(X)$, ce qui démontre le résultat.

Nous sommes maintenant en mesure de faire de nouvelles considérations sur l'opération de suspension. Soit $\pi : E \longrightarrow B$ une application fibrée, $b_0 \in B$, $F = \pi^{-1}(b_0)$. Supposons que $i : F \longrightarrow E$ soit inessentielle. Soit $\alpha \in H_q(F ; G)$, et soient $f : K \longrightarrow F$ une application où K est un complexe fini et α' un élément de $H_q(K)$ tels que $f_*(\alpha') = \alpha$. Puisque i est inessentielle, il existe un prolongement de f , $C(f) : C(K) \longrightarrow E$, et $\pi C(f)$ induit une application $\bar{f} : s(K) \longrightarrow B$. Nous avons maintenant un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} H_q(K , k_0 ; G) & \xleftarrow{\approx} & H_{q+1}(C(K) , K ; G) & \xrightarrow{\approx} & H_{q+1}(s(K) , k_0 ; G) \\ \downarrow f_* & & \downarrow C(f)_* & & \downarrow \bar{f}_* \\ H_q(F , x_0 ; G) & \longleftarrow & H_{q+1}(E , F ; G) & \longrightarrow & H_{q+1}(B , b_0 ; G) \end{array}$$

et si $s_* : H_q(K , k_0 ; G) \xrightarrow{\approx} H_{q+1}(s(K) , k_0 ; G)$ est l'isomorphisme de la ligne du haut, alors

$$\sigma(\alpha) = \sigma f_*(\alpha') = \bar{f}_*(s(\alpha')) \quad .$$

Comme conséquence, nous pouvons énoncer le théorème suivant ;

THÉORÈME. - <u>Soit</u> $\pi : E \longrightarrow B$ <u>une application fibrée</u> $b_0 \in B$, $F = \pi^{-1}(b_0)$, $i : F \longrightarrow E$ l'injection canonique supposée inessentielle, alors l'image de

$$\delta : H_q(F ; G) \longrightarrow H'_{q+1}(B , b_0 ; G)$$

est contenue dans l'image de l'application naturelle

$$\lambda : P_{q+1}(B ; G) \longrightarrow H'_{q+1}(B , b_0 ; G) \quad .$$

3. Quelques propriétés de la suspension dans les espaces fibrés principaux.

DÉFINITION. - Un monoïde topologique est un espace M muni

1° d'une application $\varphi : M \times M \longrightarrow M$ et

2° d'un point $e \in M$,

tels que, si nous écrivons xy pour $\varphi(x , y)$,

1° $(xy)z = x(yz)$ pour $x , y , z \in M$ et

2° $ex = x = xe$ pour $x \in M$.

Un espace fibré principal se compose de :

1° un monoïde topologique M ,

2° un espace fibré $\pi : X \longrightarrow B$,

3° une application $\varphi : M \times X \longrightarrow X$,

tels que :

1° $(xy)z = x(yz)$ pour $x , y \in M , z \in X$

2° $ez = z$ pour $z \in X$

3° $\pi(xz) = \pi(z)$ pour $x \in M , z \in X$ et

4° Si $b_0 \in B$, $F = \pi^{-1}(b_0)$, $z_0 \in F$, et $\lambda : M \longrightarrow F$ est l'application $\lambda(x) = xz_0$, alors

$$\lambda_* : \pi_q(M) \xrightarrow{\approx} \pi_q(F) \qquad \text{pour tout } q .$$

DÉFINITION. - Soit M un monoïde topologique ; prenons e comme point de base de M . Pour tout groupe de coefficients G ,

$$H_q(M \times M ; G) = H_q(M \vee M ; G) \oplus H_q(M \times M , M \vee M ; G) \quad .$$

Soit $Q_q(M ; G)$ le conoyau de l'application

$$\varphi_q : H_q(M \times M , M \vee M ; G) \longrightarrow H_q(M , e ; G) \quad ,$$

restriction de l'application $H_q(M \times M , e ; G) \rightarrow H_q(M , e ; G)$ définie par la loi de composition de M , au sous-groupe de $H_q(M \times M , e ; G)$, noyau de $\alpha_q : H_q(M \times M , e ; G) \longrightarrow H_q(M \vee M , e ; G)$. Posons :

$$Q(M\ ;\ G) = \sum_q Q_q(M\ ;\ G) \quad .$$

THÉORÈME. - Soit $\pi : E \to B$ une application fibrée principale de monoïde M, $b_0 \in B$, et $M = \pi^{-1}(b_0)$. Alors, si $i : M \to E$ est inessentielle, la suspension $\sigma : H_q(M\ ;\ G) \to H'_{q+1}(B\ ,\ b_0\ ;\ G)$ s'annule sur le noyau de l'application naturelle $H_q(M\ ;\ G) \to Q_q(M\ ;\ G)$, et induit par suite une application :

$$\sigma : \ Q_q(M\ ;\ G) \to H'_{q+1}(B\ ,\ b_0\ ;\ G) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Nous supposons que tous les espaces sont suffisamment réguliers ; sinon il faudrait ramener dans des complexes finis toutes les classes d'homologie considérées.

Dans les notations pour l'homologie nous omettons le groupe G des coefficients. Nous avons d'abord un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H_{q+1}(M \times E\ ,\ M \times M) \arrow[r, "Q_1"] \arrow[d, "\partial_*"] & H_{q+1}(E\ ,\ M) \arrow[r] \arrow[d, "\approx"] & H_{q+1}(B\ ,\ b_0) \\
H_q(M \times M\ ,\ e \times e) \arrow[r, "Q_2"] & H_q(M\ ,\ e) &
\end{tikzcd}$$

le composé des deux homomorphismes de la première ligne est 0 ; Q_1 et Q_2 sont induits par $M \times E \to E$ et $M \times M \to M$. Or

$$H_q(M \times M\ ,\ e \times e) = H_q(M \vee M\ ,\ e \times e) \oplus H_q(M \times M\ ,\ M \vee M) \quad ,$$

de sorte que si nous montrons que $H_q(M \times M\ ,\ M \vee M)$ est contenu dans l'image de ∂_*, le théorème sera démontré. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H_{q+1}(M \times E\ ,\ M \times M) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\partial^1_*"] & H_{q+1}(M \times E\ ,\ (M \times M) \cup (M \vee E)) \arrow[d, "\partial^2_*"] \\
H_q(M \times M\ ,\ M \vee M) \arrow[r, "g_*"] & H_q((M \times M) \cup (M \vee E)\ ,\ M \vee E)
\end{tikzcd} \quad .$$

Puisque $H_q(M \times E\ ,\ M \vee E) = 0$ pour tout q, ∂^2_* est un isomorphisme pour tout q. De plus g_* est un isomorphisme parce que c'est une application d'excision. Ainsi, pour prouver le théorème, il suffit de montrer que ∂_* est un épimorphisme.

Or on a $H_q(M \vee E\ ,\ M \vee M) \xrightarrow{\approx} H_q((M \times M) \cup (M \vee E)\ ,\ M \times M)$ par excision, et on a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & 0 \arrow[d] & & \\
{} \arrow[r, "\partial_*"] & H_{q+1}(M \times E\ ,\ (M \times M) \cup (M \vee E)) \arrow[r] & H_q(M \vee E\ ,\ M \vee M) \arrow[r, "h_*"] \arrow[d] & H_q(M \times E\ ,\ M \times M) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
 & 0 \arrow[r] & H_{q-1}(M \vee M) \arrow[r] & H_{q-1}(M \times M) &
\end{tikzcd}$$

ce qui montre que h_* est un monomorphisme, et que par suite ∂_* est un épimorphisme ; le théorème est établi.

Nous n'entrerons pas dans les détails pour la formulation des résultats précédents en cohomologie : on obtient exactement le dual de ce qu'on a en homologie.

Pour tout espace X , et tout groupe G de coefficients, on a

$$H^*(X \times X\ ;\ G) = H^*(X \vee X\ ;\ G) \oplus H^*(X \times X\ ,\ X \vee X\ ;\ G) \quad .$$

Soit $Q^*(X\ ;\ G)$ le conoyau de $H^*(X \times X\ ,\ X \vee X\ ;\ G) \longrightarrow H^*(X\ ;\ G)$ pour l'application induite par l'application diagonale, et $Q^q(X\ ;\ G)$ la composante de degré q de $Q^*(X\ ;\ G)$.

Si X est un monoïde topologique, la multiplication de X induit une application $H^*(X\ ;\ G) \longrightarrow H^*(X \times X\ ;\ G)$, et le groupe des éléments primitifs de la cohomologie, i. e. ceux dont l'image se trouve dans $H^*(X \vee X\ ;\ G)$, se notera $P^*(X\ ;\ G)$, sa composante de degré q se notera $P^q(X\ ;\ G)$.

THÉORÈME. - <u>Soit</u> $\pi\ :\ E \longrightarrow B$ <u>un espace fibré principal de monoïde</u> M , <u>tel que</u> E <u>soit acyclique. Alors l'homomorphisme de suspension en cohomologie</u>

$$\sigma^*\ :\ H^{q+1}(B\ ;\ G) \longrightarrow H^q(M\ ;\ G)$$

<u>jouit des propriétés suivantes</u> :

1° $\operatorname{Im} \sigma^* \subset P^*(M\ ;\ G)$

2° σ^* s'annule sur le noyau de l'application canonique $H^*(B\ ;\ G) \longrightarrow Q^*(B\ ;\ G)$, et induit par suite une application

$$\sigma^*\ :\ Q^*(B\ ;\ G) \longrightarrow P^*(M\ ;\ G) \qquad \text{de degré } -1\ .$$

3° Si $H^*(B\ ,\ b_0) = 0$ pour $q \leq n$, alors

$$H^{q+1}(B\ ;\ G) \longrightarrow H^q(M\ ;\ G)$$

est un isomorphisme pour $q \leqslant 2n - 1$.

Remarquons que si le groupe des coefficients est un corps, la suspension en cohomologie n'est autre que la transposée de la suspension en homologie. On pourrait donner beaucoup d'autres théorèmes plus précis que les précédents, mais nous n'insisterons pas plus longtemps.

BIBLIOGRAPHIE

[1] SERRE (J. P.). - Homologie singulière des espaces fibrés et applications, Annals of Math., Series 2, t. 54, 1951, p. 425-505 (Thèse Sc. math. Paris. 1951).