Séminaire Henri Cartan

John C. Moore

Espaces classifiants

Séminaire Henri Cartan, tome 12, nº 1 (1959-1960), exp. nº 5, p. 1-26
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1959-1960__12_1_A5_0>

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

30 novembre 1959
et 13 mars 1960

ESPACES CLASSIFIANTS

par John C. MOORE

1. Algèbre élémentaire des groupes classiques.

Le but de cet exposé est de montrer l'existence d'espaces classifiants et de fibrés universels pour les groupes de Lie compacts, et certains groupes limites de ces groupes. Nous travaillerons sur un corps fixe K, qui sera soit celui des nombres réels, soit celui des nombres complexes, soit celui des quaternions. De plus, on a une application fixe $\alpha : K \longrightarrow K$ telle que :

1° α est un antiautomorphisme d'algèbre sur les réels ;

2° si $K = \mathbb{R}$, α est l'identité ;

3° si $K = \mathbb{C}$, $\alpha(i) = - i$;

4° si K est le corps des quaternions, $\alpha(i) = - i$, $\alpha(j) = - j$ et $\alpha(k) = - k$.

DÉFINITION. - Si V est un espace vectoriel à droite sur K, un produit scalaire sur V est une application $(\, , \,) : V \times V \longrightarrow K$ telle que :

1° $(x , y + y') = (x , y) + (x , y')$ pour $x , y , y' \in V$,

2° $(y , x) = \alpha(x , y)$ pour $x , y \in V$;

3° $(x , yk) = (x , y) k$ pour $x , y \in V$ et $k \in K$;

4° $(x , x) \geqslant 0$ pour $x \in V$;

5° $(x , x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ pour $x \in V$.

Pour $x \in V$, soit $\|x\| = \sqrt{(x , x)}$. Le nombre réel positif $\|x\|$ est appelé "norme de x".

PROPOSITION 1. - Si V est un espace vectoriel sur K et (x_i) une base de V, il existe un produit scalaire unique $(\, , \,) : V \times V \longrightarrow K$ tel que $(x_i , x_i) = 1$ pour tout i et $(x_i , x_j) = 0$ pour $i \neq j$.

Démonstration immédiate.

DÉFINITION. - Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire : une base (1)

---

(1) Base signifiera toujours base algébrique.

(x_i) de V est dite orthonormale si $(x_i , x_i) = 1$ pour tout i et $(x_i , x_j) = 0$ pour $i \neq j$.

Un espace vectoriel V muni d'un produit scalaire sera appelé espace préhilbertien (réel, resp. complexe, resp. quaternonien). Quand nous parlerons d'un sous-espace W d'un espace préhilbertien V, il s'agira d'un sous-espace vectoriel muni du produit scalaire induit. Deux sous-espaces W_1 et W_2 de V sont orthogonaux si $(x , y) = 0$ pour $x \in W_1 , y \in W_2$; si W est un sous-espace de V, soit $W^\perp = \{y \mid y \in V$ et $(x , y) = 0$ pour $x \in W\}$. L'espace $W^\perp$ est appelé l'orthogonal de W.

LEMME 1. - Soit V un espace préhilbertien, W un sous-espace de V de dimension finie. Alors $V = W \oplus W^\perp$.

DÉMONSTRATION. - Soit $(x_1 , \dots , x_n)$ une base orthonormale de W, soit $\lambda : V \longrightarrow V$ définie par $\lambda(y) = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i(x_i , y)$. λ est un projecteur : $V \longrightarrow V$, d'image W, et de noyau $W^\perp$, ce qui démontre le lemme.

LEMME 2. - Si V est un espace préhilbertien de base dénombrable, V a une base orthonormale.

DÉMONSTRATION. - Soit (y_n), $n = 0 , 1 , \dots$ une base de V ; posons $x_0 = \frac{y_0}{\|y_0\|}$. Pour $n \geqslant 0$, définissonspar récurrence

$$x'_{n+1} = y_{n+1} - \sum_{0 \leq j \leq n} x_j(x_j , y_{n+1}) \qquad \text{et} \quad x_{n+1} = \frac{x'_{n+1}}{\|x'_{n+1}\|} .$$

Maintenant (x_n) est une base orhtonormale de V, ce qui démontre le lemme.

DÉFINITION. - Si V et W sont des espaces préhilbertiens, une application $T : V \longrightarrow W$ sera dite unitaire si

1° T est K-linéaire ;

2° $(Tx , Ty) = (x , y)$ pour $x , y \in V$.

PROPOSITION.1. - Si V et W sont des espaces préhilbertiens de base dénombrable, il existe un isomorphisme unitaire $T : V \longrightarrow W$.

Cette proposition n'est qu'un corollaire du lemme 2.

DÉFINITIONS. - Soit V un espace vectoriel, $T : V \longrightarrow V$ une transformation linéaire et I l'identité de V. L'espace $V_T = \operatorname{Ker}(I - T)$ est appelé espace des points fixes de T.

Soit V un espace préhilbertien, une transformation $T : V \longrightarrow V$ est <u>de type fini</u> s'il existe un sous-espace W de V de dimension finie tel que :

1° W soit stable par T ;

2° $W^{\perp} \subset V_T$.

Une transformation $T : V \longrightarrow V$ est dite <u>de rang fini</u> s'il existe un sous-espace W de V de dimension finie tel que :

1° W soit stable par T ;

2° $W^{\perp} \subset \operatorname{Ker}(T)$.

LEMME 3. - Soit V un espace préhilbertien.

1° Si S , $T : V \longrightarrow V$ sont des transformations de type fini, $S \circ T : V \rightarrow V$ est une transformation de type fini.

2° Si S et T sont des transformations de rang fini, $S \circ T$ est de rang fini.

LEMME 4. - Soit V un espace préhilbertien et $T : V \longrightarrow V$. Si T est soit de rang fini, soit de type fini, il existe une transformation unique : $T^* : V \longrightarrow V$ telle que $(Tx , y) = (x , T^* y)$ pour $x , y \in V$.

DÉMONSTRATION. - Supposons T de rang fini. Soit W un sous-espace de V de dimension finie tel que $T : W \longrightarrow W$ et $\operatorname{Ker}(T) \subset W^{\perp}$. Soit $(x_1 , \ldots , x_n)$ une base orthonormale de W . Définissons $T^* : V \longrightarrow V$ par $T^*(y) = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i (Tx_i , y)$. Si $x \in W^{\perp}$,

$$(Tx , y) = (0 , y) = 0 ,$$

et

$$(x , T^* y) = (x , \Sigma x_i (Tx_i , y)) = \Sigma (x , x_i)(Tx_i , y) = 0 .$$

De plus :

$$(Tx_i , y) = \sum_j (x_i , x_j)(Tx_j , y) = (x_i , \Sigma x_j (Tx_j , y)) = (x_i , T^* y) ,$$

et T^* a la propriété cherchée.

Soit maintenant S une transformation quelconque telle que $(Tx , y) = (x , Sy)$ pour $x , y \in V$. Si $x \in W^{\perp}$, $0 = (Tx , y) = (x , Sy)$, par conséquent :

$$\operatorname{Im}(S) \subset W^{\perp\perp} = W , \qquad \text{et} \quad Sy = \Sigma x_i (x_i , Sy) = \Sigma x_i (Tx_i , y) , \qquad \text{donc} \quad S = T^* .$$

Si T est de type fini, $T - I$ est de rang fini, et on pose $T^* = (T - I)^* + I$.

DÉFINITION. - Soit V un espace préhilbertien. Une transformation $T : V \to V$ est dite <u>normale</u> si

1° Il existe $T^* : V \to V$ telle que $(Tx , y) = (x , T^* y)$ pour $x , y \in V$;

2° $T.T^* = T^*.T$.

LEMME 5. - Soit V un espace préhilbertien, $T : V \to V$ une transformation normale. Alors :

1° T est de type fini si et seulement si V_T est de codimension finie ;

2° T est de rang fini si et seulement si Ker (T) est de codimension finie.

DÉMONSTRATION. - Supposons V_T de codimension finie. L'image W de $T - I$ est de dimension finie, et comme $T(T - I) = (T - I) T$, on a $T : W \to W$. De plus $T^*(I - T) = (I - T) T^*$ puisque T est normal, et $T^* : W \to W$. Si $y \in W^{\perp}$, soit $(x_1 , \dots , x_n)$ une base orthonormale de W . On a :

$$y - Ty = \sum x_i(x_i , y - Ty) = - \sum x_i(x_i , Ty) = - \sum x_i . \alpha(Ty , x_i)$$
$$= - \sum x_i . \alpha(y , T^* x_i) = 0 \quad .$$

Donc $W^{\perp} \subset V_T$, ce qui démontre la partie 1. La partie 2 se démontre de même.

DÉFINITION. - Soit V un espace préhilbertien, et $T : V \to V$ une transformation linéaire. On dit que :

1° T est <u>symétrique</u> si $(Tx , y) = (x , Ty)$ pour $x , y \in V$;

2° T est <u>définie-positive</u> si T est symétrique et $(Tx , x) > 0$ pour $x \neq 0$;

3° T est <u>symétrique-gauche</u> si $(Tx , y) = - (x , Ty)$ pour $x , y \in V$;

4° T est <u>unitaire</u> si $(Tx , Ty) = (x , y)$ pour $x , y \in V$.

LEMME 6. - Soit V un espace préhilbertien, $T : V \to V$ une transformation unitaire telle que V_T soit de codimension finie. Alors T est de type fini.

DÉMONSTRATION. - T étant unitaire, $(x , x) = (Tx , Tx)$, et T est injective. L'image W de $T - I$ est de dimension finie, et $T : W \to W$. Donc $T : W \xrightarrow{\approx} W$. Soit $x_1 , \dots , x_n$ une base orthonormale de W , posons $y_i = Tx_i$. Maintenant $y_1 , \dots , y_n$ est une base orthonormale de W . Si $x \in W^{\perp}$,

$$x - Tx = \Sigma y_i(y_i , x - Tx) = \Sigma y_i(y_i , Tx) = \Sigma y_i(Tx_i , Tx) = \Sigma y_i(x_i , x) = 0 \quad ,$$

et T est de type fini.

PROPOSITION 2. - Soit V un espace préhilbertien, et $T : V \to V$ une transformation bijective de type fini. Il existe alors des transformations $S , U : V \to V$, uniquement déterminées, telles que :

1° $T = SU$;

2° S est définie positive de type fini ;

3° U est unitaire de type fini.

DÉMONSTRATION. - Soit W un sous-espace de V de dimension finie tel que $T : W \longrightarrow W$ et $W^{\perp} \subset V_T$. Il existe alors des transformations S, $U : W \longrightarrow W$ telles que $T|_W = SU$, S définie positive, U unitaire. Prolongeons S et U à V tout entier en posant $Sx = Ux = x$ pour $x \in W^{\perp}$. Alors $T = SU$, ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION 3. - Soit V un espace préhilbertien, $T : V \longrightarrow V$ une transformation de rang fini. Il existe des transformations A, $B : V \longrightarrow V$, uniquement déterminées, telles que

1° $T = A + B$;

2° A est symétrique de rang fini ;

3° B est symétrique-gauche de rang fini.

DÉMONSTRATION. - On pose $A = \frac{1}{2}(T + T^*)$, $B = \frac{1}{2}(T - T^*)$.

2. La topologie des groupes classiques et l'application exponentielle.

DÉFINITIONS et CONVENTIONS. - Tout espace vectoriel V sur K sera muni de la topologie limite inductive de ses sous-espaces de dimension finie. Bien que nous nous occupions d'espaces préhilbertiens, nous ne nous servirons que rarement de la topologie de la norme. Pour un espace préhilbertien V, soit $\mathfrak{gl}(V)$ l'espace vectoriel réel des transformations $T : V \longrightarrow V$ de rang fini. Pour $T \in \mathfrak{gl}(V)$, on définit la norme de T, notée $\|T\|$, de la façon suivante : soit W un sous-espace de dimension finie de V tel que $T : W \longrightarrow W$ et $W^{\perp} \subset \operatorname{Ker} T$. Soit $x_1, \ldots, x_n$ une base orthonormale de W, on pose :

$$\|T\|^2 = \sum_{1 \leq i \leq n} (Tx_i , Tx_i) \quad .$$

Remarquons que $T^* T$ est symétrique et positive (mais non définie), et que $\|T\|^2 = \sum(T^* Tx_i , x_i)$. $\|T\|^2$ est donc la trace de $T^* T$, et ne dépend pas du choix de la base de W. On définit un produit scalaire sur $\mathfrak{gl}(V)$ en posant $(T_1 , T_2) = \frac{1}{2}(\|T_1 + T_2\|^2 - \|T_1\|^2 - \|T_2\|^2)$.

LEMME 1. - Pour tout espace préhilbertien V, $\mathfrak{gl}(V)$ est un espace préhilbertien réel, ou la norme est donnée par $\|T\|^2 = (T , T)$.

DÉFINITION. - Si V est un espace préhilbertien, $\mathfrak{U}(V)$ est le sous-espace de $\mathfrak{GL}(V)$ formé des transformations symétriques-gauches.

Si K est commutatif, i. e. si $K = \underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$, $\mathfrak{SL}(V)$ est le sous-espace de $\mathfrak{GL}(V)$ formé des transformations de trace nulle, $\mathfrak{SU}(V) = \mathfrak{U}(V) \cap \mathfrak{SL}(V)$.

PROPOSITION 1. - Soit V un espace préhilbertien,

1° $\mathfrak{GL}(V) = \mathfrak{U}(V) \oplus \mathfrak{U}(V)^{\perp}$;

2° $\mathfrak{U}(V)^{\perp}$ est le sous-espace de $\mathfrak{GL}(V)$ formé des transformations symétriques.

DÉMONSTRATION. - Si $T \in \mathfrak{GL}(V)$, on notera aussi T la transformation obtenue en considérant V comme un espace vectoriel réel. Pour $x , y \in V$, notons $\langle x , y \rangle$ la partie réelle de (x , y). Maintenant $\langle \, , \rangle : V \times V \longrightarrow R$ est un produit scalaire qui fait de V un espace préhilbertien réel. Si T est symétrique, $(Tx , y) = (x , Ty)$ pour $x , y \in V$ et $\langle Tx , y \rangle = \langle x , Ty \rangle$, donc T, considérée comme transformation réelle est symétrique. De même, si T est symétrique-gauche, T considérée comme transformation réelle est encore symétrique-gauche. De plus, si on note $\|T\|_R$ la norme de T considérée comme une transformation réelle, on a, si $K = \underset{\sim}{C}$, $\|T\|_R^2 = 2\|T\|^2$, et si K est le corps des quaternions, alors $\|T\|_R^2 = 4\|T\|^2$.

Par conséquent, pour montrer que $(A , B) = 0$ quand A est symétrique-gauche et B symétrique, il suffit de le montrer pour $K = \underset{\sim}{R}$. Dans ce cas,

$$A^* = - A ,$$

$$B^* = B ,$$

$$(A + B)^* (A + B) = - A^2 - AB + BA + B^2 .$$

Mais $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$, donc $\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B^2\|$, et $(A , B) = 0$. Posons maintenant :

$$\theta_1(T) = \frac{T - T^*}{2} , \qquad \theta_2(T) = \frac{T + T^*}{2} ;$$

remarquons que $\theta_1(T)$ est symétrique-gauche, $\theta_2(T)$ symétrique, que $T = \theta_1(T) + \theta_2(T)$, et que θ_1 et θ_2 sont des projecteurs continus pour la topologie de $\mathfrak{GL}(V)$, ce qui démontre la proposition pour $K = \underset{\sim}{R}$.

Supposons maintenant $K = \underset{\sim}{C}$. On définit $\langle \, , \rangle_1 : V \times V \longrightarrow R$ par $\langle x , y \rangle_1 = - \frac{i}{2}((x , y) - (y , x))$. On sait que $\langle x , y \rangle = \frac{1}{2}((x , y) + (y , x))$, par conséquent :

1° $\langle x , x \rangle_1 = 0$;

2° $- \langle x , iy \rangle_1 = \langle x , y \rangle = \langle ix , y \rangle_1$;

3° $(x, y) = \langle x, y\rangle + \langle x, y\rangle_1 i$.

Donc $\langle\ ,\ \rangle_1$ est un produit scalaire symplectique sur l'espace vectoriel réel V . De plus, d'après 2°, on a $\langle x, y\rangle_1 = -\langle ix, y\rangle$. Si $T : V \to V$ est linéaire sur $\underset{\sim}{C}$, soit T^* la transposée de T comme transformation linéaire réelle. On a $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$, d'où

$$\langle Tx, y\rangle_1 = - \langle iTx, y\rangle = - \langle Tix, y\rangle = - \langle ix, T^* y\rangle = \langle x, T^* y\rangle_1 \quad .$$

Donc $(Tx, y) = (x, T^* y)$, et T^* est aussi la transposée de T comme transformation linéaire complexe. La proposition est ainsi démontrée pour $K = \underset{\sim}{C}$. On la démontre de la même façon quand K est le corps des quaternions.

PROPOSITION 2. - Soit V un espace préhilbertien, W un sous-espace de V tel que $V = W \oplus W^\perp$. Alors

1° $\mathfrak{GL}(V) = \mathfrak{GL}(W) \oplus (\mathfrak{GL}(W))^\perp$;

2° $(\mathfrak{GL}(W))^\perp = \mathfrak{GL}(W^\perp) \oplus (\mathfrak{GL}(W) \oplus \mathfrak{GL}(W^\perp))^\perp$.

La démonstration de cette proposition est laissée au lecteur.

LEMME 2. - Soit V un espace préhilbertien, $T_0 , T_1 , \ldots , T_n , \ldots$ une suite d'éléments de $\mathfrak{GL}(V)$, et W un sous-espace de V de dimension finie, tel que $T_n : W \to W$ pour tout n , et $\operatorname{Ker}(T_n) \supset W$.

Si $\sum_0^\infty \|T_n\|$ est finie, il existe un élément unique $T \in \mathfrak{GL}(V)$ tel que $T = \lim_{n\to\infty} (\sum_0^n T_j)$. Cet élément se note $\sum_0^\infty T_j$.

DÉFINITIONS. - Soit V un espace préhilbertien,

$GL(V)$ est le groupe des automorphismes d'espace vectoriel de V de type fini ;

$U(V)$ est le groupe des transformations unitaires de V de type fini.

Si le corps K est commutatif (i. e. est $\underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$) :

$SL(V)$ est le sous-groupe de $GL(V)$ formé des éléments de déterminant 1 ;

$SU(V)$ est le sous-groupe de $U(V)$ formé des éléments de déterminant 1 .

Les groupes ci-dessus sont les <u>groupes classiques</u> de V .

DÉFINITION. - Soit V un espace préhilbertien. Pour tout groupe classique H de V , le sous-espace vectoriel $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{GL}(V)$ est appelé <u>algèbre de Lie</u> de H . L'opération crochet est définie dans $\mathfrak{GL}(V)$ par $[A, B] = AB - BA$. Remarquons que si $A , B \in \mathfrak{H}$, alors $[A, B] \in \mathfrak{H}$.

DÉFINITIONS. - Soit V un espace préhilbertien, on définit

$$\exp : \mathfrak{GL}(V) \to GL(V) \qquad \text{par } \exp(T) = I + \sum_1^\infty \frac{T^n}{n!} \quad .$$

L'application exp est appelée <u>application exponentielle</u>. Remarquons que si $T \in GL(V)$, $T - I \in \mathfrak{Gl}(V)$. On pose alors $\|T\| = \|T - I\|$.

PROPOSITION 3. - Soit V un espace préhilbertien, H un groupe classique de V , alors :

1° $\exp : \mathfrak{H} \to H$;

2° Si A , $B \in \mathfrak{H}$ et $[A , B] = 0$, alors $\exp (A + B) = \exp A . \exp B$;

3° $\|\exp A\| \leq \exp \|A\| - 1$;

4° Si $g : \mathfrak{Gl}(V) \to \mathfrak{Gl}(V)$ est défini par $g(A) = \exp A - I - A$, alors si $\|A\|$, $\|B\| \leq r$, $\|g(A) - g(B)\| \leq (\exp r - 1) \|A - B\|$.

DÉMONSTRATION. - Les parties 1, 2, 3 sont immédiates. Pour démontrer la partie 4, considérons d'abord $\|A^{n+1} - B^{n+1}\|$. Or

$$A^{n+1} - B^{n+1} = \sum_{0 \leq j \leq n} A^{n-j}(A - B) B^j \quad ,$$

d'où :

$$\|A^{n+1} - B^{n+1}\| \leq (n + 1) r^n \|A - B\| \quad .$$

Donc :

$$\|g(A) - g(B)\| \leq \sum_1^{\infty} \frac{\|A^{n+1} - B^{n+1}\|}{(n + 1)!} \leq (\exp r - 1) \|A - B\| \quad .$$

PROPOSITION 4. - Soit V un espace préhilbertien, et $T \in GL(V)$. Si $\|T\| \leq \frac{1}{5}$, il existe $A \in \mathfrak{Gl}(V)$ unique tel que :

1° $\|A\| \leq \frac{1}{3}$;

2° $\exp A = T$.

DÉMONSTRATION. - Soit $C = T - I$, posons $B_0 = 0$, $B_{n+1} = C - g(B_n)$. Comme $\operatorname{Ker} (B_n) \supset \operatorname{Ker} (C)$, $B_n \in \mathfrak{Gl}(V)$, et B_{n+1} est défini pour tout n . De plus

$$B_{n+1} - B_n = g(B_{n-1}) - g(B_n) \quad ,$$

donc

$$\|B_{n+1} - B_n\| = \|g(B_n) - g(B_{n-1})\| \quad .$$

Supposons $\|B_n\| \leq \frac{1}{3}$, on a alors $\|B_{n+1}\| \leq \frac{1}{5} + \|g(B_n)\|$, mais, d'après la partie 4 de la proposition 3,

$$\|g(B_n)\| \leq (\exp \frac{1}{3} - 1) \|B_n\| \leq \frac{4}{30}$$

car $\exp \frac{1}{3} - 1 = 0,3956124 < \frac{4}{10}$ et $\|B_{n+1}\| \leq \frac{1}{3}$ aussi. D'où $\|B_n\| \leq \frac{1}{3}$ pour tout n . Appliquant à nouveau la partie 4 de la proposition 3, on a :

$$\|g(B_n) - g(B_{n-1})\| \leq \frac{1}{2} \|B_n - B_{n-1}\|$$

d'où

$$\|B_{n+1} - B_n\| \leq \frac{1}{2} \|B_n - B_{n-1}\|$$

pour tout n. Soit $A = \lim\limits_{n\to\infty} B_n$, on a $\|A\| \leq \frac{1}{3}$ et $A = C - g(A)$, i. e. $\exp A = T$.

Soit $B \in \mathfrak{GL}(V)$, $\|B\| \leq \frac{1}{3}$ et $\exp A = \exp B$, alors $A + g(A) = B + g(B)$ et $\|A - B\| = \|g(A) - g(B)\| \leq \frac{1}{2} \|A - B\|$, d'où $A = B$ ce qui démontre la proposition.

La démonstration ci-dessus n'est qu'une légère modification de la démonstration de Milnor pour le théorème des fonctions implicites.

DÉFINITION. - Soit V un espace préhilbertien. Pour tout sous-espace W de V de dimension finie, on considère $GL(W)$ comme un sous-espace de $GL(V)$ en identifiant $T \in GL(W)$ à $T' : V \longrightarrow V$ tel que $T'(x) = T(x)$ pour $x \in W$, $T'(y) = y$ pour $y \in W^{\perp}$. $GL(V) = \varinjlim GL(W)$ comme groupe topologique.

De même, $\mathfrak{GL}(W)$ est considéré comme un sous-espace de $\mathfrak{GL}(V)$ en identifiant $T \in \mathfrak{GL}(W)$ à $T' : V \longrightarrow V$ tel que $T'(x) = T(x)$ pour $x \in W$ et $T'(y) = 0$ pour $y \in W^{\perp}$, et $\mathfrak{GL}(V) = \varinjlim \mathfrak{GL}(W)$ comme espace vectoriel topologique. Remarquons que les espaces $\mathfrak{GL}(W)$ sont de dimension finie, par suite la topologie sur $\mathfrak{GL}(V)$ est la topologie d'espace vectoriel localement convexe la plus fine, i. e. $\mathfrak{GL}(V)$ est muni de la topologie limite inductive de ses sous-espaces de dimension finie ([4]).

Si $H(V)$ est l'un des groupes classiques de V, $H(V) = \varinjlim H(W)$, et $\mathfrak{H}(V) = \varinjlim \mathfrak{H}(W)$, W parcourant les sous-espaces de V de dimension finie.

THÉORÈME 1. - Soit V un espace préhilbertien, H un groupe classique de V, alors l'application :

$$\exp : \mathfrak{H} \longrightarrow H$$

est continue, et il existe des ouverts $U_1 \subset \mathfrak{H}$ et $U_2 \subset H$ tels que $\exp : U_1 \longrightarrow U_2$ soit un homémmorphisme.

DÉMONSTRATION. - La démonstration est immédiate à partir de la définition et de la proposition 4.

LEMME 3. - Soit V un espace préhilbertien, W un sous-espace de $\mathfrak{GL}(V)$ tel que $\mathfrak{GL}(V) = W \oplus W^{\perp}$. Soit $F : \mathfrak{GL}(V) \longrightarrow GL(V)$ définie par $F(T) = \exp(\pi_1 T).\exp(\pi_2 T)$, où $\pi_1 : \mathfrak{GL}(V) \longrightarrow W$ et $\pi_2 : \mathfrak{GL}(V) \longrightarrow W^{\perp}$) sont les projections orthogonales. Alors F est continue, et si

$f(T) = F(T) - I - T$, on a :

$$\|f(A) - f(B)\| \leq 2(\exp 2r - 1)\ \|A - B\| \qquad \text{pour} \quad \|A\| , \|B\| \leq r \quad .$$

DÉMONSTRATION. - On a, en posant $\pi_1 A = A_1$, etc. :

$$f(A) - f(B) = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n!} \sum_{i+j=n} (i , j)(A_1^i A_2^j - B_1^i B_2^j) \quad .$$

D'autre part :

$$A_1^i A_2^j - B_1^i B_2^j = A_1^i A_2^j - B_1^i A_2^j + B_1^i A_2^j - B_1^i B_2^j$$

et, pour $0 < i , j < n$,

$$A_1^i A_2^j - B_1^i B_2^j \leq \|A_1 - B_1\| \Big(\sum_{r+s=i-1} \|A_1\|^r \|B_1\|^s \Big) \|A_2\|^j$$

$$+ \|A_2 - B_2\| \Big(\sum_{r+s=j-1} \|A_2\|^r \|B_2\|^s \Big) B_1^i \leq nr^{n-1} \|A - B\| \quad .$$

De plus

$$\|A_1^n - B_1^n\| \leq nr^{n-1} \|A - B\| \qquad \text{et} \quad \|A_2^n - B_2^n\| \leq nr^{n-1} \|A - B\| \quad .$$

D'où :

$$\Big\| \sum_{i+j=n} (i , j)(A_1^i A_2^j - B_1^i B_2^j) \Big\| \leq n2^n r^{n-1} \|A - B\| \quad ,$$

et

$$\|f(A) - f(B)\| \leq \|A - B\| \sum_{2}^{\infty} \frac{n2^n r^{n-1}}{n!} = 2(\exp (2r) - 1)\ \|A - B\| \quad .$$

Le reste de la démonstration est laissé au lecteur.

DÉFINITION. - Soit V un espace préhilbertien. Un sous-groupe H de $GL(V)$ est dit <u>admissible</u> si

1° H est un sous-groupe fermé de $GL(V)$;

2° Il existe une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{GL}(V)$ telle que $\exp : \mathfrak{H} \rightarrow H$;

i. Il existe un voisinage ouvert de 0 dans $\mathfrak{H}$ qui s'applique homéomorphiquement sur un voisinage de l'identité dans H ;

ii. $\mathfrak{GL}(V) = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}^{\perp}$.

THÉORÈME 2. - <u>Soit</u> V <u>un espace préhilbertien</u>, H <u>et</u> F <u>des sous-groupes admissibles de</u> $GL(V)$, <u>avec</u> $H \subset F$. <u>Soit</u> $W = \mathfrak{H}^{\perp} \cap F$, <u>et</u> $X = \{A \mid A \in W$ <u>et</u> $\|A\| < \frac{1}{40}\}$. <u>Alors l'application</u> $h : X \times H \to F$ <u>définie par</u> $h(A , T) = (\exp A).T$

est un homéomorphisme de $X \times H$ sur un voisinage ouvert de l'identité dans F.

DÉMONSTRATION. - Supposons $h(A, S) = h(B, T)$. Posons $C = S.T^{-1}$. On a $h(A, I) = h(B, C)$. Si $\|C\| < \frac{1}{5}$, $C = \exp C'$ et nous pouvons appliquer le lemme précédent. On a alors $F(A, 0) = F(B, C')$ d'où $A = B + C'$, mais on peut supposer $C' \in \mathfrak{H}$, soit $A = B$, $C' = 0$, d'où $C = I$, $S = T$. On en déduit le théorème.

THÉORÈME 3. - Soit V un espace préhilbertien, et $H \subset F$ des sous-groupes admissibles de $GL(V)$. Notons F/H espace des classes à gauche de H dans F et $\pi : F \longrightarrow F/H$ l'application canonique, alors :

1° π est la projection d'un espace fibré localement trivial ;

2° L'espace fibré $\pi : F \longrightarrow F/H$ est principal de groupe structural H.

DÉMONSTRATION. - Ce théorème découle immédiatement du précédent et de la théorie générale des espaces fibrés ([10]).

THÉORÈME 4. - Soit V un espace préhilbertien, $H_1 \subset H_2 \subset F$ des sous-groupes admissibles de $GL(V)$. Si H_1 est un sous-groupe invariant de H_2, l'application canonique $\pi : F/H_1 \longrightarrow F/H_2$ est la projection d'un fibré localement trivial principal de fibre H_2/H_1.

COROLLAIRE 1. - Si V est un espace préhilbertien, W un sous-espace de V tel que $V = W \oplus W^{\perp}$, les applications canoniques :

$$\begin{aligned}
\pi_1 &: U(V) \longrightarrow U(V)/U(W) \\
\pi_2 &: U(V) \longrightarrow U(V)/U(W) \times U(W^{\perp}) \\
\pi_3 &: U(V)/U(W) \longrightarrow U(V)/U(W) \times U(W^{\perp})
\end{aligned}$$

sont des projections d'espaces fibrés localement triviaux principaux.

COROLLAIRE 2. - Si V est un espace préhilbertien, l'espace fibré principal $GL(V) \longrightarrow GL(V)/U(V)$ est trivial.

Le corollaire 2 découle du théorème précédant et de la proposition 2 du paragraphe 1.

3. La topologie algébrique des groupes classiques.

Dans ce paragraphe, nous étudierons un petit peu l'homologie et la cohomologie des groupes classiques et de leurs espaces homogènes. En général, nous nous proposons d'étendre au cas infini les résultats des exposés 2 et 3. L'homologie et la cohomologie seront toujours singulières ; à vrai dire, pour les espaces considérés, ce choix ne change rien. Quand on ne précisera pas les coefficients, il s'agira des entiers. Rappelons que si G est un groupe topologique et A un anneau tel que $H_*(G, A)$ soit plat, $H_*(G ; A)$ est une algèbre de Hopf sur A, avec application diagonale

$$\Delta : H_*(G, A) \longrightarrow H_*(G, A) \otimes_A H_*(G, A) .$$

Cette algèbre de Hopf est associative, et son application diagonale est commutative (i. e. anticommutative). Nous noterons $P_*(G, A)$ l'ensemble de ses éléments primitifs : c'est un module gradué, et on notera $P_n(G, A)$ l'ensemble de ses éléments de degré n. Si A est l'anneau $\underset{\sim}{Z}$ des entiers, on l'omettra. Nous supposerons toujours que l'anneau A est au moins de Dedekind. Si X est un module gradué sur A sans éléments de degré pair, nous noterons $E(X)$ l'algèbre extérieure engendrée par X, munie de l'application diagonale

$$\Delta : E(X) \longrightarrow E(X) \otimes E(X)$$

telle que $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$ pour $x \in X$.

PROPOSITION 1. - Si V est un espace préhilbertien, Y un espace compact, $f : Y \longrightarrow GL(V)$ une application continue, il existe un sous-espace W de V de dimension finie tel que $f(Y) \subset GL(W)$.

DÉMONSTRATION. - Cette proposition découle de ce que $GL(V)$ est muni de la topologie limite inductive des $GL(W)$.

NOTATION. - Si V est un espace vectoriel sur K, on notera $n(V)$ la dimension de V comme espace vectoriel réel si V est de dimension finie. Sinon $n(V) = \infty$.

THÉORÈME 1. - *Soit V un espace préhilbertien sur $\underset{\sim}{C}$, alors*

1° $P_q(U(V))$ *est libre à un générateur pour* $q < n$ *impair, et* 0 *sinon* ;

2° *L'application naturelle* $f : E(P_*(U(V))) \longrightarrow H_*(U(V))$ *est un isomorphisme d'algèbres de Hopf.*

DÉMONSTRATION. - Soit W un sous-espace de V de dimension finie. Le théorème, appliqué à W, n'est autre que le théorème (2,2) de l'exposé 3. De plus, le théorème (2,1) de l'exposé 3 montre que, si $W \subset W'$, W' de dimension finie, l'application naturelle $P_*(U(W)) \longrightarrow P_*(U(W'))$ est injective, et est un isomorphisme pour $q < n(W)$. En appliquant maintenant la proposition 1, on voit que l'algèbre de Hopf $H_*(U(V))$ est l'algèbre de Hopf limite inductive des $H_*(U(W))$ pour les $W \subset V$ de dimension finie. Par suite $P_*(U(V))$ est la limite inductive des $P_*(U(W))$; comme d'autre part, le foncteur algèbre extérieure d'un module commute avec les limites inductives, on en déduit le théorème 1.

THÉORÈME 2. - Soit V un espace préhilbertien sur $\mathbb{C}$, W un sous-espace de V tel que $V = W \oplus W^\perp$; alors l'application

$$f : E(P_*(U(V))/P_*(U(W))) \longrightarrow H_+(U(V)/U(W))$$

est un isomorphisme de coalgèbres.

DÉMONSTRATION. - On sait que l'application canonique $\pi : U(V) \to U(V)/U(W)$ est la projection d'un espace fibré principal, et $U(W)$ s'applique en un point. Par conséquent, au niveau de l'homologie, $P_*(U(W))$ s'applique en 0 dans $H_*(U(V)/U(W))$. De plus, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U(V) \times U(W) & \longrightarrow & U(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (U(V)/U(W)) \times p & \longrightarrow & U(V)/U(W) \end{array}$$

où p est un point, en utilisant le fait que $U(V) \longrightarrow U(V)/U(W)$ est un espace fibré principal, sur lequel $U(W)$ opère à droite. Au niveau de l'homologie, ceci entraîne que l'idéal à gauche (i. e. l'idéal) engendré par $P_*(U(W))$ dans $H_*(U(V))$ s'applique en zéro.

Le quotient de $H_*(U(V))$ par cet idéal est canoniquement isomorphe à $E(P_*(U(V))/P_*(U(W)))$. Maintenant grâce à la suite spectrale de l'espace fibré, et à l'opération de $H_*(U(W))$ sur le terme E^2, on a une application canonique

$$E(P_*(U(V))/P_*(U(W))) \otimes H_*(U(W)) \longrightarrow E^2 \quad .$$

Mais dans cette suite spectrale $E^2 = E^\infty$. On en déduit le résultat.

COROLLAIRE 1. - Dans les hypothèses du théorème précédent, si W est de dimension finie, alors :

1° $\pi_q(U(V)/U(W)) = 0$ pour $q \leq n(W)$;

et

2° $\pi_q(U(V)/U(W)) \xrightarrow{\approx} H_q(U(V)/U(W))$ pour $q = n(W) + 1$.

DÉMONSTRATION. - Si $W = 0$, le résultat est trivial. Si $W \neq 0$, alors, comme $U(W)$ et $U(V)$ sont des groupes topologiques, $\pi_1(U(W)) = H_1(U(W))$, et $\pi_1(U(V)) = H_1(U(V))$, et puisque $H_1(U(W)) \xrightarrow{\approx} H_1(U(V))$, et que $U(W)$ est connexe, $U(V)/U(W)$ est simplement connexe, et on peut appliquer le théorème de Hurewicz.

COROLLAIRE 2. - Dans les hypothèses du théorème précédent, si $n(W) = \infty$, $\pi_q(U(V)/U(W)) = 0$ pour tout q.

THÉORÈME 3. - Soit V un espace préhilbertien sur $\underset{\sim}{C}$; alors :

1° $P_q(SU(V))$ est libre à un générateur pour q impair et $1 < q < n(V)$, et 0 sinon ;

2° L'application naturelle $f : E(P_* SU(V)) \longrightarrow H_*(SU(V))$ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf ;

3° Si W est un sous-espace de V différent de 0 tel que $V = W \oplus W^{\perp}$, l'application canonique $SU(V)/SU(W) \longrightarrow U(V)/U(W)$ est un homéomorphisme.

Ce théorème est une conséquence immédiate du précédent. Nous voulons obtenir maintenant le même genre de résultats quand le corps de base est celui des quaternions.

DÉFINITIONS et NOTATIONS. - En se conformant aux notations de Bott, nous noterons le corps des quaternions $\underset{\sim}{H}$ comme Hamilton.

Si V est un espace préhilbertien sur le corps des quaternions, on note $Sp(V)$ le groupe unitaire $U(V)$, qui prend alors le nom de groupe symplectique de V.

THÉORÈME 4. - Soit V un espace préhilbertien sur $\underset{\sim}{H}$; alors

1° $P_q(Sp(V))$ est libre à un générateur pour $q \equiv 3 \bmod 4$ et $q < n(V)$, et zéro sinon ;

2° L'application naturelle $f : E(P_*(Sp(V))) \longrightarrow H_*(Sp(V))$ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf ;

3° Si W est un sous-espace de V tel que $V = W \oplus W^{\perp}$, l'application naturelle $f : E(P_*(Sp(V))/P_*(Sp(W)) \longrightarrow H(Sp(V)/Sp(W))$ est un isomorphisme de coalgèbres.

DÉMONSTRATION. - C'est exactement la même que celle des théorèmes 1 et 2. Nous n'entrerons pas dans les détails.

COROLLAIRE 1. - Sous les hypothèses du théorème précédent, si W est de dimension finie, alors :

1° $\pi_q(Sp(V)/Sp(W)) = 0$ pour $q \leq n(W) + 2$

et

2° $\pi_q(Sp(V)/Sp(W)) \xrightarrow{\approx} H_q(Sp(V)/Sp(W))$ pour $q = n(W) + 3$.

COROLLAIRE 2. - Sous les mêmes hypothèses, si $n(W) = \infty$, $\pi_q(Sp(V)/Sp(W)) = 0$ pour tout q.

REMARQUE. - On se sert toujours du fait que si V est un espace préhilbertien et W un sous-espace de V, $P_*(Sp(W))$ est un facteur direct de $P_*(Sp(V))$.

La situation quand le corps de base est $\underset{\sim}{R}$ est plus compliquée et nous l'étudierons de façon assez détaillée.

DÉFINITIONS et NOTATIONS. - Si V est un espace préhilbertien sur $\underset{\sim}{R}$, on note $O(V)$ le groupe unitaire $U(V)$ de V, qui prend alors le nom de groupe orthogonal de V, et on note $SO(V)$ le groupe unitaire spécial $SU(V)$ de V, qui prend alors le nom de groupe orthogonal spécial ou groupe des rotations de V.

Comme il y a de la 2-torsion dans l'homologie des groupes orthogonaux, nous diviserons l'étude de leurs propriétés homologiques en deux parties : d'abord l'homologie à coefficients dans l'anneau $\underset{\sim}{Q}_2$ des nombres rationnels dont le dénominateur est une puissance de 2, et ensuite l'homologie à coefficients dans l'anneau $\underset{\sim}{Z}_2$ des entiers modulo 2. La connaissance complète de l'homologie dans ces deux anneaux détermine l'homologie à coefficients dans n'importe quel groupe abélien, en particulier dans les entiers, comme nous ne le montrerons pas plus loin.

THÉORÈME 5. - Soit V un espace préhilbertien sur $\underset{\sim}{R}$ tel que $n(V)$ soit impair ou ∞, alors

1° $P_q(SO(V) ; \underset{\sim}{Q}_2)$ est libre à un générateur pour $q \equiv 3 \bmod 4$, et $q < 2(n(V) - 1)$, et 0 sinon ;

2° L'application naturelle $f : E(P_*(SO(V) ; \underset{\sim}{Q}_2) \longrightarrow H_*(SO(V) ; \underset{\sim}{Q}_2)$ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf ;

3° Si W est un sous-espace de V tel que $V = W \oplus W^{\perp}$ et si $n(W)$ est impair ou ∞, l'application naturelle :

$$\bar{f} : E(P_*(SO(V) ; \underset{\sim}{Q}_2)/P_*(SO(W) ; \underset{\sim}{Q}_2)) \longrightarrow H_*(SO(V)/SO(W) ; \underset{\sim}{Q}_2)$$

est un isomorphisme de coalgèbres.

DÉMONSTRATION. - La démonstration est encore semblable à celle des théorèmes 1 et 2, modulo les résultats de l'exposé 3.

Remarquons qu'un espace préhilbertien de dimension infinie est limite inductive de ses sous-espaces de dimension finie impaire.

THÉORÈME 6. - Soit V un espace préhilbertien sur $\underset{\sim}{R}$ de dimension finie, paire :

1° $P_q(SO(V) ; \underset{\sim}{Q}_2)$ est libre à un générateur pour $q \equiv 3 \bmod 4$, $q < 2(n(V) - 1)$, et pour $q = n(V) - 1$, et zéro sinon ;

2° L'application naturelle $f : E(P_*(SO(V) ; \underset{\approx}{Q}_2)) \longrightarrow H_*(SO(V) ; \underset{\approx}{Q}_2)$ est un isomorphisme ;

3° Si W est un sous-espace de V tel que $n(W)$ soit impair, l'application naturelle :

$$\bar{f} : E(P_*(SO(V) ; \underset{\approx}{Q}_2)/P_*((SO(W) ; \underset{\approx}{Q}_2)) \to H_*(SO(V)/SO(W) ; \underset{\approx}{Q}_2)$$

est un isomorphisme de coalgèbres.

DÉMONSTRATION. - Facile, et laissée au lecteur.

NOTATIONS. - Soit n un entier > 0 et pair. Soit M un module gradué sur A tel que $M_q = 0$ pour $q \neq n$, et M_n libre à un générateur. Soit $C(M)$ la co-algèbre telle que $C(M)_q = 0$ pour $q \neq 0, n$, $C(M)_n = M_1$ et $C(M)_0 = A$, l'application diagonale étant donnée par $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ pour $x \in M_n$.

THÉORÈME 7. - Soit V un espace préhilbertien sur $\underset{\approx}{R}$, W un sous-espace de V de dimension finie, paire, et W' un sous-espace de V tel que W soit un sous-espace de W' de codimension 1 ; alors si $n = n(W)$, $H_n(SO(V)/SO(W) ; \underset{\approx}{Q}_2)$ est libre à un générateur, et

$$E(P_*(SO(V) ; \underset{\approx}{Q}_2)/P_*(SO(W') ; \underset{\approx}{Q}_2) \otimes C(H_n(SO(V)/SO(W) ; \underset{\approx}{Q}_2)$$

est isomorphe comme coalgèbre à $H_*(SO(V)/SO(W) ; \underset{\approx}{Q}_2)$.

DÉMONSTRATION. - Si nous considérons la fibration $SO(V)/SO(W) \longrightarrow SO(V)/SO(W')$, la fibre est une sphère de dimension n, et est totalement non homologue à zéro. Le résultat en découle en appliquant le théorème précédent.

Passons maintenant à l'étude de l'homologie des groupes orthogonaux spéciaux, à coefficients dans $\underset{\approx}{Z}_2$.

THÉORÈME 8. - Soit V un espace préhilbertien sur $\underset{\approx}{R}$.

1° Si W est un sous-espace de V, l'application naturelle

$$i_* : H_*(SO(W) ; \underset{\approx}{Z}_2) \longrightarrow H_*(SO(V) ; \underset{\approx}{Z}_2)$$

est injective, et est un isomorphisme en degré $q < n(W)$;

2° Si $V = W \oplus W^\perp$, $H_*(SO(V) ; \underset{\approx}{Z}_2)$ est isomorphe comme groupe additif à $H_*(SO(W) ; \underset{\approx}{Z}_2) \otimes H_*(SO(V)/SO(W) ; \underset{\approx}{Z}_2)$.

DÉMONSTRATION. - Ce théorème découle du théorème (3,2) de l'exposé 3, par un raisonnement de passage à la limite inductive.

PROPOSITION 2. - Si V est un espace préhilbertien sur $\underset{\sim}{R}$; $V = W \oplus W^{\perp}$,

1° $\pi_q(SO(V)/SO(W)) = 0$ pour $q < n(W)$;

2° Si $n(W)$ est fini et $n = n(W)$,

$$\pi_n(SO(V)/SO(W)) \xrightarrow{\approx} H_n(SO(V)/SO(W)) \quad .$$

4. Fibrés universels et espaces classifiants.

DÉFINITION. - Soit G un groupe topologique. Un fibré universel pour G est un espace fibré localement trivial principal $\pi : X \longrightarrow B$ de fibre et de groupe structural G, tel que $\pi_q(X) = 0$ pour tout q. L'espace de base B est alors un espace classifiant pour G.

THÉORÈME 1. - Soit V un espace préhilbertien sur K ; et F un sous-groupe admissible de $GL(V)$, il existe alors un fibré universel pour F.

DÉMONSTRATION. - Soit W un espace préhilbertien de dimension infinie sur K. Alors $V \oplus W$ est un espace préhilbertien sur K, et

$$\pi_q(GL(W)) \xrightarrow{\approx} \pi_q(GL(V \oplus W)) \qquad \text{pour tout } q \quad .$$

Remarquons que $\pi_q(GL(W)) \xleftarrow{\approx} \pi_q(U(W))$, etc. Par conséquent,

$$\pi_q(GL(V \oplus W)/GL(W)) = 0 \qquad \text{pour tout } q \quad .$$

De plus $F \times GL(W) \subset GL(V \oplus W)$. Si nous posons $X = GL(V \oplus W)/GL(W)$, et $B = GL(V \oplus W)/F \times GL(W)$, l'application canonique $\pi : X \longrightarrow B$ satisfait à la condition.

Remarquons que si $F \subset U(V)$, on peut prendre $X = U(V \oplus W)/U(W)$, et $B = U(V \oplus W)/F \times U(W)$, avec pour $\pi : X \longrightarrow B$ l'application canonique.

REMARQUES. - La raison d'être de la terminologie précédente est que, si $\pi' : Y \longrightarrow C$ est un espace fibré localement trivial principal de groupe structural G, et $\pi : X \longrightarrow B$ un fibré universel pour G, alors, si C est un espace raisonnable, le fibré $\pi' : Y \longrightarrow C$ peut être considéré comme le fibré induit sur C par une application $f : C \longrightarrow B$. En fait, les classes d'équivalence d'espaces fibrés localement triviaux principaux sur C de groupe structural G sont en correspondance bijective canonique avec les classes d'homotopie $f : C \longrightarrow B$. Cet ensemble est noté $\pi(C ; B)$. Si $[f] \in \pi(C ; B)$, et si $Y_f \longrightarrow C$ est le fibré induit sur C, ce fibré est dans la classe d'équivalence représentée par $[f]$. Ces résultats sont classiques ; pour les détails, voir [10].

Il est également bien connu que la cohomologie d'un espace classifiant pour G ne dépend pas du choix de l'espace classifiant. L'espace classifiant est parfois appelé base universelle. Pour plus de détails, voir [3].

5. Remarques complémentaires sur l'homologie et la cohomologie modulo 2 des groupes orthogonaux et spinoriels.

Soit W un espace préhilbertien sur $\mathbb{R}$, muni d'une base $\{e_i\}$ indexée par les entiers >0. Soit W_n le sous-espace de W engendré par $e_1, \dots, e_n$, et posons $O(n) = O(W_n)$. Soit $V = \mathbb{R} \oplus W$, $V_{n+1} = \mathbb{R} \oplus W_n$, et posons

$$SO(n+1) = SO(V_{n+1}) \quad .$$

Soit $T_0 : V_{n+1} \longrightarrow V_{n+1}$ l'élément $\neq 1$ de $O(\mathbb{R}) \subset O(V_{n+1})$, et définissons

$$f_n : O(V_{n+1}) \longrightarrow SO(n+1)$$

par

$$f_n(T) = TT_0\, T^{-1}\, T_0^{-1} \quad .$$

En effet, comme $f_n(T)$ est un commutateur, $\det f_n(T) = 1$, et $f_n(T) \in SO(n+1)$. Si $T' \in O(\mathbb{R}) \times O(n) \subset O(V_{n+1})$, alors $f_n(T) = f_n(TT')$. Par suite f_n induit une application $g_n : O(V_{n+1})/O(\mathbb{R}) \times O(n) \longrightarrow SO(n+1)$. D'autre part $O(V_{n+1})/O(\mathbb{R}) \times O(n)$ n'est autre que l'espace projectif réel $P_n(\mathbb{R})$ de dimension n, donc $g_n : P_n(\mathbb{R}) \longrightarrow SO(n+1)$. En outre, nous avons, pour tout entier n, un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
P_n(R) \arrow[r, "g_n"] \arrow[d] & SO(n+1) \arrow[d] \\
P_{n+1}(R) \arrow[r, "g_{n+1}"] \arrow[d, "\theta'_{n+1}"] & SO(n+2) \arrow[d, "\theta_{n+1}"] \\
S'_{n+1} \arrow[r, "h_{n+1}"] & S_{n+1}
\end{tikzcd}$$

où S_{n+1} est la sphère de dimension $n+1$ de V_{n+2}, $\theta_{n+1}(T) = T(e_{n+2})$, S'_{n+1} est la sphère de dimension $n+1$ obtenue en contractant $P_n(\mathbb{R})$ en un point dans $P_{n+1}(\mathbb{R})$. Supposons

$$\theta_{n+1}\, f_{n+1}\, T = \theta_{n+1}\, f_{n+1}\, T' \quad .$$

Comme $T_0(e_{n+2}) = e_{n+2}$, on a :

$$TT_0 T^{-1} e_{n+2} = T' T_0(T')^{-1} e_{n+2} \quad .$$

Posons : $T^{-1}(e_{n+2}) = x + y$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in W_{n+1}$. On a $T_0(x + y) = - x + y$, de même en posant $(T')^{-1}(e_{n+2}) = x' + y'$, on a $T_0(x' + y') = - x' + y'$, et $T(- x + y) = T'(- x' + y')$, mais $T(x + y) = T'(x' + y') = e_{n+2}$, d'où $T(2x) = T'(2x')$, et $T(x) = T'(x')$. Si $x = 0$, on a aussi $x' = 0$, et les transformations $f_{n+1}(T)$ et $f_{n+1}(T')$ laissent toutes deux e_{n+1} fixe, donc appartiennent toutes deux à $SO(n + 1)$. Si x ou x' est différent de 0 , ils le sont tous deux, et ont même valeur absolue, puisque T et T' sont orthogonales. On a donc soit :

$$T(1) = T'(1) \quad ,$$

soit :

$$T(1) = T'(- 1) \quad ,$$

et dans les deux cas T et T' appartiennent à la même classe de $O(V_{n+2})/O(\mathbb{R}) \times O(V_{n+1})$, et $\theta'_{n+1}(T) = \theta'_{n+1}(T')$. On en déduit que h_{n+1} est injective, et est un homéomorphisme. Ce raisonnement est le même que celui qui interviendra à l'exposé 11 dans le cas complexe.

Maintenant, au niveau de l'homologie,

$$\begin{array}{ccc} H_*(P_{n+1}(\mathbb{R}) , P_n(\mathbb{R}) ; \mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & H_*(SO(n + 2) , SO(n + 1) ; \mathbb{Z}_2) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \\ H_*(S'_{n+1} , p ; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\cong} & H_*(S_{n+1} , p ; \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

Maintenant grâce au diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \to & H_{n+1}(P_n(\mathbb{R});\mathbb{Z}_2) & \to & H_{n+1}(P_{n+1}(\mathbb{R});\mathbb{Z}_2) & \to & H_{n+1}(P_{n+1}(\mathbb{R}),P_n(\mathbb{R});\mathbb{Z}_2) & \to \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots \to & H_{n+1}(SO(n+1),\mathbb{Z}_2) & \to & H_{n+1}(SO(n+2),\mathbb{Z}_2) & \to & H_{n+1}(SO(n+2),SO(n+1);\mathbb{Z}_2) & \to \cdots \end{array}$$

on voit par récurrence que

$$(g_n)_* : H_*(P_n(\mathbb{R}) ; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_*(SO(n + 1) ; \mathbb{Z}_2)$$

est injective pour tout n .

De plus, on vérifie par récurrence que les éléments primitifs non nuls de $H_*(SO(n) ; \mathbb{Z}_2)$ considérée comme algèbre de Hopf sont tous indécomposables, car $H_*(SO(n) ; \mathbb{Z}_2)$ est une sous-algèbre de Hopf de $H_*(SO(n + 1) ; \mathbb{Z}_2)$, la coalgèbre $H_*(SO(n+1)\,;\,\mathbb{Z}_2)//H_*(SO(n)\,;\,\mathbb{Z}_2)$ étant isomorphe à la coalgèbre $H_*(S^n\,;\,\mathbb{Z}_2)$; d'où on déduit qu'il y a au plus une dimension de plus dans les éléments primitifs de $H_*(SO(n+1)\,;\,\mathbb{Z}_2)$ que dans ceux de $H_*(SO(n)\,;\,\mathbb{Z}_2)$ à cause de la suite exacte

$$0 \to P(H_*(SO(n);\mathbb{Z}_2)) \to P(H_*(SO(n+1);\mathbb{Z}_2)) \to P(H_*(SO(n+1);\mathbb{Z}_2)//H_*(SO(n);\mathbb{Z}_2)) \quad ,$$

et ces nouveaux éléments primitifs ne peuvent apparaître qu'en dimension n .

Ceci montre que la cohomologie $H^*(SO(n)\,;\,\mathbb{Z}_2)$ est engendrée par les éléments primitifs, et que dans l'algèbre $H_*(SO(n)\,;\,\mathbb{Z}_2)$, pour tout élément x de dimension >0 , $x^2 = 0$, enfin que cette algèbre est commutative ([9]).

NOTATIONS. - Pour tout espace vectoriel gradué M sur $\mathbb{Z}_2$, on note $E(M)$ l'algèbre extérieure engendrée par M , et $L(M)$ l'algèbre symétrique engendrée par M .

THÉORÈME 1. - *L'algèbre $H_*(SO(n+1)\,;\,\mathbb{Z}_2)$ est commutative, et pour tout élément x de degré >0 , $x^2 = 0$. Il existe une application canonique*

$$g_n : P_n(\mathbb{R}) \longrightarrow SO(n+1)$$

telle que

$$g_{n*} : H_*(P_n(\mathbb{R})\,;\,\mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_*(SO(n+1)\,;\,\mathbb{Z}_2)$$

soit injective. Si on note M l'espace des éléments de degré >0 dans $H_*(P_n(\mathbb{R})\,;\,\mathbb{Z}_2)$, l'application naturelle

$$(\bar{g}_n)_* : E(M) \longrightarrow H_*(SO(n+1)\,;\,\mathbb{Z}_2)$$

induite par g_{n*} est un isomorphisme d'algèbres de Hopf, où la diagonale dans $E(M)$ est l'unique application Δ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H_*(P_n(\mathbb{R})\,;\,\mathbb{Z}_2) \arrow[r] \arrow[d] & H_*(P_n(\mathbb{R})\,;\,\mathbb{Z}_2) \otimes H_*(P_n(\mathbb{R})\,;\,\mathbb{Z}_2) \arrow[d] \\
E(M) \arrow[r, "\Delta"] & E(M) \otimes E(M)
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Nous allons réénoncer le théorème précédent d'une façon différente, en le complétant.

THÉORÈME 2. - *Il existe une application naturelle :*

$$g_n : P_n(\mathbb{R}) \longrightarrow SO(n+1) \quad ,$$

telle que si $y_i \in H_i(SO(n+1) ; \mathbb{Z}_2)$ est l'image de l'élément non nul de $H_i(P_n(\mathbb{R}) ; \mathbb{Z}_2)$ pour $i = 1 , \dots , n$, l'algèbre $H_*(SO(n+1) ; \mathbb{Z}_2)$ soit l'algèbre extérieure engendrée par $y_1 , \dots , y_n$. En posant $y_0 = 1$, l'application diagonale, dans l'algèbre de Hopf $H_*(SO(n+1) , \mathbb{Z}_2)$, est donnée par

$$\Delta(y_k) = \sum_{i+j=k} y_i \otimes y_j \qquad \text{pour } k = 1 , \dots , n \quad .$$

Il y a un élément primitif non nul p_k dans chaque dimension impaire $k < n$, et

$$p_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ i<j}} y_i\, y_j \quad .$$

En outre, on a

$$(*) \qquad \beta(y_{2k}) = y_{2k-1} \qquad \text{pour } 0 < 2k < n+1 \quad ,$$

en notant β l'opération de Bockstein.

(Rappelons que, pour tout espace X , l'opération de Bockstein

$$\beta : \; H_n(X ; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_{n-1}(X ; \mathbb{Z}_2)$$

est composée de l'application $H_n(X ; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(X ; \mathbb{Z})$ associée à la suite exacte $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$, et de l'application naturelle $H_{n-1}(X ; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-1}(X ; \mathbb{Z}_2)$. On a $\beta\beta = 0$).

Le théorème 2 se déduit du théorème 1 par un petit calcul. Les formules donnant les éléments primitifs s'explicitent comme suit :

$$p_1 = y_1 \quad ;$$

$$p_3 = y_3 + y_1\, y_2 \quad ,$$

$$p_5 = y_5 + y_1\, y_4 + y_2\, y_3 \text{ , etc.}$$

Quant à la relation (*), dans $H_*(SO(n+1) ; \mathbb{Z}_2)$, elle résulte de la connaissance (classique) de β dans la cohomologie de l'espace projectif.

Le théorème précédent admet un complément : tous les éléments de torsion de $H_*(SO(n+1) ; \mathbb{Z})$ sont d'ordre 2 exactement (cf. exposé 3, théorème (3,1)). On peut en donner une démonstration différente de celle de l'exposé 3 : tout d'abord, $H_*(SO(n+1) ; \mathbb{Q}_2)$ n'ayant pas de torsion, $H_*(SO(n+1) ; \mathbb{Z})$ n'a pas de torsion p-primaire, pour p premier $\neq 2$. D'autre part, si on calcule l'algèbre d'homologie de $H_*(SO(n+1) ; \mathbb{Z}_2)$ pour l'opération de Bockstein β

(qui est alors une dérivation d'algèbre), on obtient l'algèbre extérieure engendrée par les éléments $y_{2k}\, y_{2k-1}$ $(0 < 2k < n + 1)$ de degrés $4k - 1$; il s'ensuit qu'en chaque degré, cette algèbre d'homologie a même dimension (comme espace vectoriel sur Z_2) que $H_*(X) \otimes Q_2$ (comme module libre sur Q_2). Cela implique (cf. appendice) que tout élément de torsion de $H_*(X)$ est d'ordre 2 .

DÉFINITION. - Pour tout espace préhilbertien V sur $\mathbb{R}$, on note Spin (V) le revêtement universel de $SO(V)$. Le groupe Spin (V) est appelé groupe spinoriel de V .

On peut calculer l'homologie et la cohomologie de Spin (V) pour tout V , mais nous nous contenterons du théorème suivant :

THÉORÈME 3. - Soit V un espace préhilbertien de dimension infinie sur $\mathbb{R}$; $H^*(SO(V) ; Z_2)$ est une algèbre de polynômes à un générateur primitif x_i en chaque dimension impaire $2i - 1$.

Ce théorème résulte du théorème 2 par dualité.

THÉORÈME 4. - Si V est un espace préhilbertien de dimension infinie sur $\mathbb{R}$,

1° L'algèbre de Hopf $H^*(\text{Spin}\ (V) ; Z_2)$ est une algèbre de polynômes à un générateur primitif en chaque dimension impaire > 1 .

2° Toute la torsion de $H_*(\text{Spin}\ (V) ; Z)$ est exactement d'ordre 2 .

3° L'application naturelle $\pi :$ Spin $(V) \longrightarrow SO(V)$ est telle que $\pi_* : H_*(\text{Spin}\ (V) ; Q_2) \xrightarrow{\approx} H_*(SO(V) ; Q_2)$.

DÉMONSTRATION. - Considérons la suite spectrale de cohomologie du revêtement $\pi :$ Spin $(V) \longrightarrow SO(V)$. On a :

$$E_2^{p,q} = H^p(K(Z_2\ , 1) ; Z_2) \otimes H^q(\text{Spin}\ (V) ; Z_2) ;$$

$$E^r \Longrightarrow H^*(SO(V) ; Z_2) .$$

C'est une suite spectrale d'algèbres de Hopf. $H^*(K(Z_2\ , 1) ; Z_2)$ est une algèbre de polynômes à un générateur de degré 1 , ce générateur va sur un générateur de l'algèbre de polynômes $H^*(SO(V) ; Z_2)$, et l'espace de base est totalement non cohomologue à 0 .

Donc $E_2 = E_\infty$, d'où on déduit l'assertion 1° de l'énoncé. L'assertion 3° résulte de ce que $H^p(K(Z_2\ , 1) ; Q_2) = 0$ pour $p > 0$; l'assertion 2° se prouve par un argument analogue à celui utilisé ci-dessus pour $SO(V)$.

THÉORÈME 4 bis. - L'algèbre $H_*(\text{Spin}\ (V) ; Z_2)$ est une algèbre extérieure engendrée par des éléments $x_3\ , x_5\ , x_6\ , \ldots$ (un en chaque degré non puissance de 2).

DÉMONSTRATION. - Puisque $H^*(\mathrm{Spin}\ (V)\ ;\ \mathbb{Z}_2)$ est, comme algèbre de Hopf, un produit tensoriel d'algèbres de Hopf dont chacune est une algèbre de polynômes à un générateur de degré $2k + 1 \geqslant 3$, l'algèbre de Hopf duale $H_*(\mathrm{Spin}\ (V)\ ;\ \mathbb{Z}_2)$ est un produit tensoriel d'algèbres de Hopf dont chacune est la duale d'une algèbre de polynômes à un générateur de degré $2k + 1$. Cette duale est une algèbre extérieure engendrée par des éléments de degrés $2k + 1$, $2(2k + 1)$, $2^2(2k + 1)$, ... , $2^n(2k + 1)$, ... ; d'où le théorème. On calcule facilement l'application diagonale dans l'algèbre extérieure précédente.

REMARQUE. - L'application de revêtement $\mathrm{Spin}\ (V) \longrightarrow SO(V)$ définit une <u>injection</u> de l'algèbre de Hopf $H_*(\mathrm{Spin}\ (V)\ ;\ \mathbb{Z}_2)$ dans l'algèbre de Hopf $H_*(SO(V)\ ;\ \mathbb{Z}_2)$.

6. Remarques finales et questions.

1° En algèbre homologique, on a défini les groupes $\mathrm{Tor}^{U(L)}(R\ ,\ R)$, où L est une algèbre de Lie sur R quelconque, et $U(L)$ son algèbre enveloppante universelle. On connaît des conditions qui assurent que si G est un groupe de Lie de dimension finie et L son algèbre de Lie, $\mathrm{Tor}^{U(L)}(R\ ,\ R) = H^*(G\ ;\ R)$. Quelle est la situation générale ?

Il est clair que si V est un espace préhilbertien,

$$\mathrm{Tor}^{U(\mathfrak{SU}(V))}(R\ ,\ R) = H^*(SU(V)\ ;\ R) \quad ,$$

par passage à la limite inductive.

2° Peut-on donner une classification des algèbres de Lie semi-simples qui sont limite inductive d'algèbres de Lie de dimension finie ?

3° Si X est un complexe simplicial, il y a deux topologies sur X : la topologie métrique et la topologie $C - W$. Ces topologies ont le même type d'homotopie. Soit V un espace vectoriel topologique localement convexe, et X un espace localement homéomorphe à V . Si on change la topologie de X en changeant la topologie de V en une autre topologie d'espace vectoriel localement convexe le type d'homotopie de X change-t-il ?

Dans quelles conditions un tel espace est-il paracompact ?

4° Un théorème de J. H. C. WHITEHEAD affirme que si X et Y sont des $C - W$-complexes connexes, $f : X \longrightarrow Y$ une application telle que $f_* : \pi_q(X) \xrightarrow{\simeq} \pi_q(Y)$ pour tout q , alors f est une équivalence d'homotopie. Un cas particulier dit que si $\pi_q(X) = 0$ pour tout q , X est contractile.

Ce théorème est-il encore vrai si l'on suppose seulement que X est localement homéomorphe à un espace vectoriel topologique localement convexe ?

7. Appendice : la suite spectrale des opérations de Bockstein.

Soit q un nombre premier (on n'utilise pas la notation p, pour réserver la lettre p à la filtration de la suite spectrale). On note $\underset{\sim}{Q}_q$ le groupe additif des nombres rationnels dont le dénominateur est une puissance de q ; pour chaque entier $p \geqslant 0$ ou $\leqslant 0$, soit $\underset{\sim}{Q}_{q,p}$ le sous-groupe des $x \in \underset{\sim}{Q}_q$ tels que $q^p x$ soit entier ; on a en particulier $Q_{q,0} = \underset{\sim}{Z}$. Le groupe $\underset{\sim}{Q}_q$ est filtré par ses sous-groupes $\underset{\sim}{Q}_{q,p}$ (p variant de $-\infty$ à $+\infty$).

Soit X un espace ; soit $C_*(X)$ le groupe des chaînes singulières à coefficients entiers ; filtrons $\underset{\sim}{Q}_q \otimes C_*(X) = A$ par les $\underset{\sim}{Q}_{q,p} \otimes C_*(X)$, notés $F_p A$. Considérons la suite spectrale de cette filtration ; elle aboutit à l'homologie :

$$H_*(X ; \underset{\sim}{Q}_q) = \underset{\sim}{Q}_q \otimes H_*(X) \qquad ,$$

filtrée par les images des $\underset{\sim}{Q}_{q,p} \otimes H_*(X)$. Le noyau de $\underset{\sim}{Q}_{q,p} \otimes H_*(X) \to \underset{\sim}{Q}_q \otimes H_*(X)$ est la composante q-primaire de $\underset{\sim}{Q}_{q,p} \otimes H_*(X)$. Si l'image est notée $F_p(\underset{\sim}{Q}_q \otimes H_*(X))$, on voit que :

$$F_p(\underset{\sim}{Q}_q \otimes H_*(X))/F_{p-1}(\underset{\sim}{Q}_q \otimes H_*(X)) \simeq \underset{\sim}{Q}_{q,p} \otimes \bar{H}_*(X) \otimes \underset{\sim}{Z}_q \qquad ,$$

$\bar{H}_*(X)$ désignant le quotient de $H_*(X)$ par son sous-groupe de torsion. D'autre part, ceci est canoniquement isomorphe au terme E_p^{∞} de la suite spectrale.

On a :

$$E_p^1 = H_*(\underset{\sim}{Q}_{q,p} \otimes C_*(X) \otimes \underset{\sim}{Z}_q) = \underset{\sim}{Q}_{q,p} \otimes H_*(X ; \underset{\sim}{Z}_q) \qquad .$$

Pour chaque p, on a des isomorphismes

$$E_p^{\infty} \simeq E_0^{\infty} , \qquad E_p^1 \approx E_0^1$$

définis par la bijection $\underset{\sim}{Q}_{q,p} \longrightarrow \underset{\sim}{Z}$ (multiplication par q^p), et ils induisent des isomorphismes $E_p^r \approx E_0^r$ pour chaque r. Moyennant ces isomorphismes, la différentielle $d^1 : E_p^1 \longrightarrow E_{p-1}^1$ de la suite spectrale se transforme évidemment dans l'opération de Bockstein

$$H_*(X ; \underset{\sim}{Z}_q) \longrightarrow H_*(X ; \underset{\sim}{Z}_q) \qquad ;$$

c'est bien une différentielle $(d^1 d^1 = 0)$. Les différentielles d^2, d^3, ...

s'identifient aux opérations de Bockstein d'ordre supérieur ; chacune est définie sur l'homologie de la précédente.

On sait que, dans la théorie de la suite spectrale (voir [6], chap. XV), on introduit les groupes :

$$Z_0^{\infty} = \operatorname{Ker} H_*(X \otimes Z_q) \xrightarrow{\delta} H_*(X) ;$$
$$Z_0^r = \operatorname{Ker} H_*(X \otimes Z_q) \longrightarrow H_*(X \otimes Z_{q^{r-1}}) ,$$

et que $E_0^{\infty} = \lim_r E_0^r$ si $Z_0^{\infty} = \bigcap_r Z_0^r$. Or ici l'intersection des Z_0^r se compose des éléments de $H_*(X \otimes Z_q)$ que δ applique en un élément $x \in H_*(X)$ divisible par toute puissance de q. Si $H_n(X)$ est <u>de type fini</u> pour chaque n (<u>ce qu'on supposera désormais</u>), un tel élément x est nul, et par suite on a bien $Z_0^{\infty} = \bigcap_r Z_0^r$. Il s'ensuit que :

$$\bar{H}_*(X) \otimes Z_q = \lim_r E_0^r \quad .$$

Dans chaque degré n, la dimension de E_0^r (comme espace vectoriel sur le corps Z_q) est au moins égale à la dimension de $\bar{H}_n(X) \otimes Z_q$; <u>si, pour un</u> r, <u>ces dimensions sont égales quel que soit</u> n, alors nécessairement $E_0^r = E_0^{r+1} = \ldots = E_0^{\infty}$, c'est-à-dire $d^r = 0$, $d^{r+1} = 0$, etc. Or cela signifie que si un élément de $H_n(X)$ est dans l'image de δ (c'est-à-dire s'il est d'ordre 2) et si son image dans $H_n(X \otimes Z_{q^{r-1}})$ est nulle, alors son image dans $H_n(X \otimes Z_{q^{r'}})$ est nulle si grand que soit r'. Autrement dit, <u>tout élément</u> $u \in H_n(X)$ <u>tel que</u> $q^r u = 0$ <u>est en réalité nul</u> : toute la q-torsion est d'ordre $\leq q^{r-1}$.

Par exemple, $(r = 1)$, si $H_n(X \otimes Z_q)$ a même dimension que $\bar{H}_n(X) \otimes Z_q$ pour tout n, c'est que $H_*(X)$ n'a pas de q-torsion (comme il est bien connu). Pour $r = 2$: si l'homologie de $H_*(X \otimes Z_q)$ pour l'opération de Bockstein a, en chaque degré, même dimension que $\bar{H}_*(X) \otimes Z_q$, alors toute la q-torsion est exactement d'ordre q, etc.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (E.). - Geometric algebra. - New York, London, Interscience Publishers, 1957 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 3).

[2] BOREL (Armand). - Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes des groupes de Lie compacts, Annals of Math., t. 57, 1953, p. 115-207.

[3] BOREL (Armand). - Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes, Amer. J. of Math., t. 76, 1954, p. 273-342.

[4] BOURBAKI (Nicolas). - Espaces vectoriels topologiques, Chap. 1, 2 . - Paris, Hermann, 1953 (Act. scient. et ind., 1189 ; Eléments de Mathématique, 15).

[5] BOURBAKI (Nicolas). - Espaces vectoriels topologiques, Chap. 3, 4, 5 . - Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind., 1229 ; Eléments de Mathématique, 18).

[6] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[7] CHEVALLEY (Claude). - Theory of Lie groups. -Princeton, Princeton University Press, 1946 (Princeton mathematical Series, 8).

[8] MILNOR (J. W.). - Differential topology. - Princeton, 1959 (multigraphié).

[9] MILNOR (J. W.) and MOORE (J. C.). - On the structure of Hopf algebras. - Princeton, 1959 (notes multigraphiées).

[10] STEENROD (Norman). - The topology of fibre bundles. - Princeton, Princeton University Press, 1951 (Princeton mathematical Series, 14).