Séminaire Henri Cartan

Adrien Douady

La suite spectrale d'Adams

Séminaire Henri Cartan, tome 11, n° 2 (1958-1959), exp. n° 18, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_2_A9_0>

LA SUITE SPECTRALE D'ADAMS [2]

par Adrien DOUADY

CONVENTIONS. - Dans cet exposé et le suivant, p désignera un nombre premier. Sauf mention expresse du contraire, tous les groupes d'homologie seront pris à coefficients dans Z_p. Tous les produits tensoriels seront pris sur Z_p. Si $f : X' \to X$ est une application simpliciale, on notera $H_i(f)$, $\pi_i(f)$ ou $H_i(X, X')$, $\pi_i(X, X')$ les groupes d'homologie ou d'homotopie relatifs $H_i(\bar{X}, X')$, $\pi_i(\bar{X}, X')$, où $\bar{X}$ désigne le "mapping cylinder" de f (voir aussi l'exposé de Eckmann au colloque de Lille, 1959).

I. Complexes géométriques

A. Fibrés de type (p, t).

Soit t un entier ≥ 0 ou ∞, $(V_i)_{0<i\leq t}$ une suite d'espaces vectoriels sur Z_p. Le groupe abélien simplicial $L = \prod_{0<i\leq t} L(V_i, i-1)$, défini dans l'exposé 8, II, B, est fibré sur $K = \prod_{0<i\leq t} K(V_i, i)$, de fibre $F = \prod_{0<i\leq t} K(V_i, i-1)$. L'image réciproque de ce fibré par une application simpliciale $g : X \to K$ est un fibré principal X' de base X, de fibre F.

DÉFINITION. - Un tel fibré sera appelé fibré de type (p, t) ou (p, t)-fibré sur X.

Les V_i étant fixés, les classes de ces fibrés correspondent aux éléments de $\prod_{0<i\leq t} H^i(X ; V_i)$.

LEMME I A. - *Soit $X' \to X$ un (p, t)-fibré, et $Y' \to Y$ une application simpliciale telle que l'application $H_i(Y' ; Z_p) \to H_i(Y ; Z_p)$ soit nulle pour $0 < i \leq t$. Alors, pour toute application $f : Y \to X$, il existe une application $f' : Y' \to X'$ telle que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{f'} & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

soit commutatif.

De plus, une telle application f' ayant été choisie, les applications qui rendent le diagramme commutatif correspondent aux applications de Y' dans F, et leurs classes aux éléments de $\prod_{0<i\leq t} H^{i-1}(Y' ; V_i)$.

DÉMONSTRATION. - L'application $H^i(Y ; V_i) \to H^i(Y' ; V_i)$ est aussi nulle pour $0 < i \leq t$. En effet $H^i(Y ; V_i) = \mathrm{Hom}\,(H_i(Y) , V_i)$. Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} Y' & & X' & \longrightarrow & L \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X & \longrightarrow & K \end{array}$$

L'application composée $Y' \to K$ correspond à des cocycles sur Y' images réciproques de cocycles sur Y , donc cohomologues à 0 . Cette application se factorise donc par $Y' \to L \to K$ et, en vertu de la propriété universelle des fibrés images réciproques, il existe une application $f' : Y' \to X'$, unique quand on a choisi $Y' \to L$, qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\ & X' \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[d] \\ & X \arrow[r] & K \end{tikzcd}$$

La deuxième partie est un résultat immédiat de la théorie générale des fibrés principaux (Séminaire H. CARTAN, 1956/57, exposé 4).

B. Complexes géométriques.

DÉFINITION. - Un complexe géométrique au-dessus de X est une suite d'ensembles simpliciaux $(X^n)_{n\geq 0}$, avec $X^o = X$, et d'homomorphismes $\mathcal{C}^n : X^{n+1} \to X^n$. On ne fait aucune hypothèse sur $\mathcal{C}^n \circ \mathcal{C}^{n+1}$.

On associe à tout complexe géométrique (X^n) le complexe coaugmenté de A^*-modules (où A^* désigne l'algèbre de Steenrod en caractéristique p) :
$C^n = H'_*(X^n , X^{n+1})$ avec $d^n : H'_*(X^n , X^{n+1}) \to H'_*(X^{n+1} , X^{n+2})$ et
$\varepsilon : H_*(X) \to H'_*(X^o , X^1)$

On a $d^n \circ d^{n-1} = 0$ et $d^o \circ \varepsilon = 0$ comme il ressort du diagramme :

$$
\begin{array}{ccc}
H^{\cdot}_{*}(X^{n-1}, X^{n}) \longrightarrow H_{*}(X^{n}) & & \\
\downarrow & & \\
H^{\cdot}_{*}(X^{n}, X^{n+1}) & & \\
\downarrow & & \\
H_{*}(X^{n+1}) \longrightarrow H^{\cdot}_{*}(X^{n+1}, X^{n+2}) & &
\end{array}
$$

Le complexe C est bigradué par les $C^{n}_{i+n} = H_{i}(X^{n}, X^{n+1})$. Le degré total est i , et d est de bidegré $\binom{+1}{0}$, et de degré total -1 .

Le complexe géométrique (X^{n}) sera dit (p , t)-acyclique si $\mathcal{C}^{n}_{*} : H_{i}(X^{n+1}) \to H_{i}(X^{n})$ est nulle pour $0 < i \leq t$ et pour tout n . Cette condition entraîne $\tilde{H}^{n}_{i+n}(C) = 0$ pour $0 < i \leq t$ et pour tout n . Le complexe géométrique (X^{n}) sera dit (p , t)-fibré si les applications $X^{n+1} \to X^{n}$ sont (p , t)-fibrées pour tout n . Il sera dit $(m - 1)$-connexe si $\pi_{i}(X^{n}) = 0$ pour $i < m$ et pour tout n . Le lemme I.A donne immédiatement :

PROPOSITION I B. - Soit (X^{n}) un complexe (p , t) fibré au-dessus de X , (Y^{n}) un complexe (p , t)-acyclique au-dessus de Y . Pour toute application $f : Y \to X$, on peut trouver des applications $f^{n} : Y^{n} \to X^{n}$ telles que le diagramme

$$
\begin{array}{ccccccc}
\dots\ Y^{n+1} & \longrightarrow & Y^{n} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & Y \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\dots\ X^{n+1} & \longrightarrow & X^{n} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X
\end{array}
$$

soit commutatif.

REMARQUE. - Sous cette forme, cette proposition est à rapprocher de la proposition 11a, page 78 de [1], chapitre 5, relative à des modules A et A' sur un même anneau K :

"Soit X un complexe acyclique sur A à droite, X' un complexe injectif sur A' à droite, et soit $f : A \to A'$. Alors il existe une application $F : X \to X'$ au-dessus de f ".

DÉFINITION. - On appellera (p , t)-résolution géométrique de X tout complexe géométrique au-dessus de X à la fois (p , t)-fibré et (p , t)-acyclique.

C. Filtration définie par un complexe géométrique.

Etant donné un complexe géométrique (X^n) au-dessus de X, on filtre $\pi_i(X)$ par les images des $\pi_i(X^n)$, en posant :

$$F^n \pi_i(X) = \operatorname{Im} \pi_i(X^n) \to \pi_i(X)$$

$$F^\infty \pi_i(X) = \bigcap_n F^n \pi_i(X)$$

Si (X^n) et (Y^n) sont des complexes géométriques, et (f^n) une application de (Y^n) dans (X^n) au-dessus de $f : Y \to X$, on a

$$f_*(F'^n \pi_i(Y)) \subset F^n \pi_i(X) \quad ,$$

où F' et F désignent les filtrations définies par les complexes donnés. Ceci résulte de :

$$\begin{array}{ccc} Y^n & \to & X^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \to & X \end{array} \quad .$$

En appliquant la proposition IB, on obtient le résultat suivant : si (X^n) est un complexe (p , t)-fibré et (X'^n) un complexe (p , t)-acyclique au-dessus d'uh même ensemble simplicial X, on a

$$F'^n \pi_i(X) \subset F^n \pi_i(X) \quad ,$$

où F et F' désignent les filtrations définies par les complexes donnés. En particulier, s'il existe des (p , t)-résolutions de X, elles définissent toutes la même filtration de $\pi_i(X)$; on l'appellera la filtration (p , t)-canonique.

THÉORÈME I C.- Soit X un ensemble simplicial $(m - 1)$-connexe, et soit $t < 2m - 1$. Alors les éléments de $\pi_i(X)$ dont la filtration (p , t)-canonique est infinie sont, pour $i \leq t$, les éléments divisibles par toute puissance de p dans $\pi_i(X)$. Plus précisément :

a. si $\omega \in \pi_i(X)$ est divisible par p^n, on a $\omega \in F^n \pi_i(X)$;

b. si ω n'est pas divisible par p^n, alors $\omega \notin F^{2n(i-m+1)} \pi_i(X)$.

REMARQUE. - On verra (théorème II B') que les hypothèses faites sur X et t entraînent l'existence d'une (p , t)-résolution.

DÉMONSTRATION.

a. Par récurrence sur n . Il n'y a rien à démontrer pour $n = 0$.

Soit $\omega = p^n \gamma$, avec $n \geq 1$. Dans la suite exacte

$$\pi_i(X^1) \xrightarrow{\ C_*\ } \pi_i(X) \xrightarrow{\ \partial\ } \pi_{i-1}(F)$$

du fibré X^1 , $\pi_{i-1}(F)$ est un espace vectoriel sur Z_p , donc $\partial(p\gamma) = p(\partial\gamma) = 0$, et $p\gamma$ est dans l'image de $\pi_i(X^1)$: $p\gamma = C'_*\eta$, d'où $\omega = p^n\gamma = C_* p^{n-1}\eta$. Par l'hypothèse de récurrence, $p^{n-1}\eta$ est de filtration $n - 1$, donc dans l'image de $\pi_i(X^n)$, et ω est donc de filtration n .

b. Nous nous appuierons sur le lemme ;

LEMME I C.- Soit X un ensemble simplicial $(m - 1)$-connexe. Alors il existe un ensemble simplicial U et une application $f : X \to U$ tels que

1° $\pi_i(U)$ soit un $Z_{p^{2n}}$-module pour $i < 2m - 1$;

2° Le noyau de $f_* : \pi_i(X) \to \pi_i(U)$ soit formé des éléments divisibles par p^n dans $\pi_i(X)$, pour $i < 2m - 1$.

Montrons que le lemme entraîne la partie b du théorème :

Soit (U^k) le complexe $(p , 2m - 2)$-fibré au-dessus de U tel que $U^{k+1} \to U^k$ ait pour fibré

$F^k = K(\pi_{i_k}(U^k) \otimes Z_p , i_k - 1)$, où $\pi_{i_k}(U^k)$ est le premier groupe d'homotopie non nul de U^k

et que

$\partial : \pi_{i_k}(U^k) \to \pi_{i_k-1}(F^k)$ soit l'application canonique de $\pi_{i_k}(U^k)$ sur son quotient par le sous-groupe des éléments divisibles par p .

On a

$$\pi_i(U^{k+1}) = \pi_i(U^k) \quad \text{pour } i \neq i_k$$

$$\pi_{i_k}(U^{k+1}) = p\,\pi_{i_k}(U^k)$$

d'où il résulte, en tenant compte de $p^{2n}\pi_i(U) = 0$ pour $i < 2m - 1$, que

$i_k \geqslant m$ + partie entière $k/2n$, si le second membre est $< 2m - 1$, soit $F^{2n(i-m+1)}\ \pi_i(U) = 0$ pour $i < 2m - 1$, F désignant la filtration définie par le complexe (U^k) .

Soit (X^k) une $(p\ ,\ t)$-résolution de X ; d'après la proposition I B, il existe une application (f^k) de $(X^k) \to (U^k)$ au-dessus de f . On a
$F^{2n(i-m+1)}\ \pi_i(X) \subset f_*^{-1}\ F^{2n(i-m+1)}\ \pi_i(U) = \operatorname{Ker} f_*' = p^n\ \pi_i(X)$, ce qui démontre b .

DÉMONSTRATION du lemme. - (Pour les notations, voir exposé suivant, I).

Soit $SX = S^1 \wedge X$ la suspension de X , et E l'espace (contractile) des chemins partant du point de base e dans SX , ou plutôt le fibré simplicial sur X qui en tient lieu. Soit $h : SX \to SX$ l'opération déduite d'une application $S^1 \to S^1$ de degré p^n . Soit enfin U le fibré sur SX image récirpoque de E par h , de fibre ΩSX . On a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Omega SX \arrow[d] \arrow[dr] & \\
U \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\
SX \arrow[r] & SX
\end{tikzcd}$$

d'où les suites exactes

$$\begin{tikzcd}
\pi_{i+1}\ SX \arrow[r] \arrow[d, "h_*"] & \pi_i\ \Omega SX \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_i\ U \arrow[r] \arrow[d] & \pi_i\ SX \arrow[r] \arrow[d, "h_*'"] & \pi_{i-1}\ \Omega SX \arrow[r] \arrow[d, equal] & {} \\
\pi_{i+1}\ SX \arrow[r] & \pi_i\ \Omega SX \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \pi_i\ SX \arrow[r] & \pi_{i-1}\ \Omega SX \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Pour $i < 2m - 1$, tout élément $\gamma \in \pi_{i+1}\ SX$ est la suspension d'un élément γ' de $\pi_i\ X$, c'est-à-dire $\gamma = \varepsilon \wedge \gamma'$, où ε désigne le générateur de $\pi_1\ S^1$. On a donc $h_*(\gamma) = (p^n\ \varepsilon) \wedge \gamma' = p^n(\varepsilon \wedge \gamma') = p^n\ \gamma$ pour tout $\gamma \in \pi_{i+1}\ SX$. On en déduit que $\operatorname{Ker}(\pi_i\ \Omega SX \to \pi_i\ U) = p^n\ \pi_i\ \Omega SX$.

On en déduit également la suite exacte

$$0 \to (\pi_i\ \Omega SX)_{p^n} \to \pi_i\ U \to {}_{p^n}(\pi_i\ XS) \to 0 \qquad ,$$

avec les notations $A_q = A/qA$, ${}_qA = \operatorname{Ker} A \xrightarrow{q} A$. Les deux groupes extrêmes sont des Z_{p^n} -modules, donc $\pi_i(U)$ est un $Z_{p^{2n}}$ -modules, donc $\pi_i(U)$ est un

$Z_{p^{2n}}$-module. En composant avec l'application naturelle $X \to \Omega SX$, qui induit un isomorphisme $\pi_i(X) \to \pi_i(\Omega SX)$ pour $i < 2m - 1$, on obtient l'application $f : X \to U$ du lemme, qui est ainsi démontré.

II. La résolution et la suite spectrale d'Adams.

A. Le foncteur V.

On désigne par A^* l'algèbre de Steenrod des opérations cohomologiques stables de type (Z_p, Z_p), et on se place dans la catégorie $\mathcal{C}$ des A^*-modules à droite M gradués par degrés inférieurs ≥ 0, avec multiplication

$$M_q \otimes A^i \to M_{q-i} \quad .$$

Pour tout ensemble simplicial X, l'homologie $H_*(X ; Z_p)$ est un tel module. La duale de l'algèbre de Steenrod $A_* = \oplus A_i$, $A_i = \operatorname{Hom}_{Z_p}(A^i, Z_p)$, est un A^*-module injectif appartenant à $\mathcal{C}$. Si W est un Z_p-espace vectoriel gradué par degrés inférieurs positifs, $W \otimes A_*$ est un A^*-module injectif appartenant à $\mathcal{C}$ (exposé 15, proposition 9 bis). Si M est un A^*-module de $\mathcal{C}$, on appellera VM le sous-module de M formé des $m \in M$ tels que $m.IA^* = 0$, où IA^* désigne l'idéal des éléments de degré > 0 de A^*. On a donc $VM = \operatorname{Hom}_{A^*}(Z_p, M)$, Z_p étant muni d'une structure de A^*-module gradué homogène de degré 0. On notera VM_i les composantes homogènes de VM (mais $V(M_i)$ n'a aucun sens).

Si $f : M \to M'$ est A^*-linéaire, on a $Vf : VM \to VM'$. On définit ainsi, si $f : X \to X'$ est une application simpliciale, $Vf_* : VH_*(X) \to VH_*(X')$, et, si $Y \subset X$, $V\partial : VH_*(X, Y) \to VH_*(Y)$.

Le foncteur V jouit des propriétés suivantes :

II A 1. Soit W un Z_p-espace vectoriel gradué. Si $M = W \otimes A_*$, on a $VM = W$. Si $G = \prod_{i \geq m} K(V_i, i)$, on a

$$VH_i(G) = V_i = \pi_i(G) \quad \text{pour} \quad 0 < i < 2m \quad .$$

II A 2. L'homomorphisme de Hurewicz se factorise en

$$\pi_i(X) \xrightarrow{\eta} VH_i(X) \longrightarrow H_i(X)$$

(η apparaîtra comme un homomorphisme latéral (edge homomorphism) de la suite spectrale d'Adams. Il sera surjectif dans la zone stable chaque fois que les différentielles correspondantes seront nulles).

II A 3. $Vf : VM \longrightarrow VM'$ est une injection si et seulement si f est une injection. (Exposé 15, corollaire de la proposition 6 bis).

II A 4. Si M' et M'' sont des A^*-modules, le produit tensoriel $M' \otimes_{Z_p} M''$ devient un A^*-module grâce à l'application diagonale $\Delta : A^* \longrightarrow A^* \otimes A^*$. On a alors $VM' \otimes VM'' \subset V(M' \otimes M'')$, Plus précisément, $V(M' \otimes M'')$ n'est pas un sous-module bihomogène de $M' \otimes M''$; mais $VM' \otimes VM''$ en est la partie bihomogène.

B. <u>La résolution d'Adams.</u>

THÉORÈME II B et DÉFINITION. <u>Soit</u> X <u>un ensemble simplicial</u> $(m-1)$-<u>connexe, et soit</u> $t < 2m-1$. <u>Alors il existe une</u> (p, t)-<u>résolution</u> (X^n) <u>de</u> X, $(m-1)$-<u>connexe, et telle que la transgression</u> $V\theta : VH_i(X^n) \longrightarrow VH_{i-1}(F^n) = \pi_{i-1} F^n$ <u>soit un isomorphisme pour</u> $i \leq t$.

<u>Une telle résolution est appelée</u> (p, t)-<u>résolution d'Adams de</u> X. <u>Si</u> (X^n) <u>et</u> (X'^n) <u>sont deux</u> (p, t)-<u>résolutions d'Adams de</u> X, <u>soit</u> $(f^n) : (X^n) \longrightarrow (X'^n)$ <u>au-dessus de l'identité. Alors</u> $f^n_* : \pi_i(X^n) \longrightarrow \pi_i(X'^n)$ <u>est un isomorphisme pour tout</u> i.

DÉMONSTRATION. On pose $X^o = X$ et on construit X^n par récurrence. Soit, pour tout $i \leq t$, h_i un projecteur de $H_i(X^n)$ sur $VH_i(X^n)$. Il correspond aux h_i des applications $\bar{h}_i : X^n \longrightarrow K(VH_i(X^n), i)$, qui définissent

$$\bar{h} : X^n \longrightarrow K = \prod_{i \leq t} K(VH_i(X^n), i)$$

Dans le fibré acyclique L sur K, de fibre $F^n = \prod K(VH_i(X^n), i-1)$, la transgression θ_o est définie sur le sous-A^*-module de $H_*(K)$ formé des éléments de degré $\leq t$, et est A^*-linéaire sur ce sous-module. Soit X^{n+1} le fibré sur X image réciproque de L par $\bar{h}$, de fibre F^n. La transgression $\theta = \theta_o \circ \bar{h} : H_*(X^n) \longrightarrow H_*(F^n)$ est définie sur les éléments de degré $\leq t$, et définit un isomorphisme :

$$V\theta : VH_i(X^n) \xrightarrow{\simeq} \pi_{i-1}(F^n) \quad .$$

Enfin la suite spectrale de ce fibré donne pour $i \leq t$ une suite exacte :

$$H_i(X^{n+1}) \longrightarrow H_i(X^n) \xrightarrow{\theta} H_{i-1}(F^n) \quad .$$

Comme $V\theta$ est un isomorphisme, θ est injective, et l'application

$H_i(X^{n+1}) \to H_i(X^n)$ est nulle pour $i \leq t$; (X^n) est donc bien une résolution.

La deuxième partie se démontre également par récurrence sur n : si $f_*^n : \pi'_*(X^n) \xrightarrow{\approx} \pi'_*(X'^n)$ est un isomorphisme, il en est de même de $f_*^n : H'_*(X^n) \xrightarrow{\approx} H'_*(X'^n)$ (exposé 4, théorème 5), et de $Vf_*^n : VH'_*(X^n) \xrightarrow{\approx} VH'_*(X'^n)$. On en déduit que $f_*^{n+1} : \pi_i(F^n) \to \pi_i(F'^n)$ est un isomorphisme pour tout $i \leq t$, et aussi pour $i > t$ puisqu'alors les deux π_i sont nuls. En appliquant le lemme des cinq aux suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
\pi_{i+1} X^n & \to & \pi_i F^n & \to & \pi_i X^{n+1} & \to & \pi_i X^n & \to & \pi_{i-1} F^n \\
\downarrow \approx & & \downarrow \approx & & \downarrow & & \downarrow \approx & & \downarrow \approx \\
\pi_{i+1} X'^n & \to & \pi_i F'^n & \to & \pi_i X'^{n+1} & \to & \pi_i X'^n & \to & \pi_{i-1} F'^n
\end{array}$$

On voit que $\pi_i X^{n+1} \to \pi_i X'^{n+1}$ est également un isomorphisme.

REMARQUE. - Les f_*^n , et a fortiori les f^n , ne sont pas uniques. Autrement dit la résolution d'Adams de X admet des automorphismes non homotopes à l'identité au-dessus de l'identité de X . Ce n'est donc pas un foncteur de X , mais seulement un semi-foncteur , de même par exemple que la clôture algébrique d'un corps est un semi-foncteur de ce corps.

C. La suite spectrale d'une résolution géométrique.

Soit X un ensemble simplicial, et (X^n) un complexe géométrique au-dessus de X . Pour $r \geq q$, posons $\pi_i(q , r) = \pi_i(X^q , X^r)$, et $\pi_i(q) = \pi_i(q , \infty) = \pi_i(X^q)$. Pour $(q , r) \geq (q' , r')$, on a des homomorphismes $\eta(q' , r' ; q , r) : \pi_i(q , r) \to \pi_i(q' , r')$, et pour $q \leq r \leq s$, $\partial(q , r , s) : \pi_i(q , r) \to \pi_{i-1}(r , s)$, qui vérifient les axiomes de CARTAN-EILENBERG ([1], 15, paragraphe 7, p. 333) :

(SP 1) : $\eta(q , r ; q , r)$ est l'identité de $\pi(q , r)$;

(SP 2) : $\eta(q'' , r'' ; q' , r') \circ \eta(q' , r' ; q , r) = \eta(q'' , r'' ; q , r)$ si $(q , r) \geq (q' , r') \geq (q'' , r'')$;

(SP 3) : $\eta(r' , s' ; r , s) \circ \partial(q , r , s) = \partial(q' , r' , s') \circ \eta(q' , r' ; q , r)$ si $(q , r , s) \geq (q' , r' , s')$;

(SP 4) : $\pi_i(r , s) \xrightarrow{\eta} \pi_i(q , s) \xrightarrow{\eta} \pi_i(q , r) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(r , s) \xrightarrow{\eta} \pi_{i-1}(q , s)$

est une suite exacte.
On pose par définition $\pi_i(q , r) = \pi_i(0 , r)$ pour $q \leq 0$, ce qui tient lieu de (SP 5) de [1].

DÉFINITION. - On appellera spectre ou système spectral la donnée d'une famille π de groupes abéliens $\pi_i(q , r)$ et d'homomorphismes η et ∂ vérifiant (SP 1) à (SP 5) .

À tout spectre π , on associe une suite spectrale en posant

$$ {}^rE_i^q = \operatorname{Im} \pi_{i-q}(q , q + r) \longrightarrow \pi_{i-q}(q , q + 1)/\partial\, \pi_{i-q+1}(q - r + 1 , q) $$

${}^rE$ est muni d'une différentielle rd de bidegré $\binom{r}{r-1}$ induite par $\partial(q , q + r , q + r + 1)$, et ${}^{r+1}E$ est l'homologie de ${}^rE$ pour cette différentielle.

On a :

$$ {}^{\infty}E_i^q = \operatorname{Im} \pi_{i-q}(q) \longrightarrow \pi_{i-q}(q , q + 1)/\partial\, \pi_{i-q+1}(0 , q) $$

$$ = \operatorname{Im}(\pi_{i-q}(q) \longrightarrow \pi_{i-q}(0))/\operatorname{Im}(\pi_{i-q}(q + 1) \longrightarrow \pi_{i-q}(0)) , $$

comme il résulte du diagramme

$$
\begin{tikzcd}
\pi_{i+1}(0 , q + 1) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \pi_{i+1}(0 , q) \arrow[dd] \arrow[dr] & \\
& & & \pi_i(q , q + 1) \\
\pi_i(q + 1) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \pi_i(q) \arrow[ur] \arrow[dl] & \\
& \pi_i(0) & &
\end{tikzcd}
$$

${}^{\infty}E$ est donc le gradué associé à $\pi(0)$ filtré par les images des $\pi(q)$ par les $\eta(0 , \infty ; q , \infty)$. Dès que $r \geq q + 1$, on a ${}^{r+1}E_i^q \subset {}^rE_i^q$ et ${}^{\infty}E_i^q \subset {}^rE_i^q$. La suite spectrale est dite <u>faiblement convergente</u> si ${}^{\infty}E = \bigcap_r {}^rE$.

DÉFINITION. - Soit X un ensemble simplicial, (X^n) un complexe géométrique au-dessus de X . On appelle <u>suite spectrale d'homotopie</u> du complexe (X^n) , la suite spectrale du système spectral $\pi_i(q , r) = \pi_i(X^q , X^r)$ des groupes d'homotopies relatifs du complexe. Si (X^n) est une résolution d'Adams de X , (cf. II B), sa suite spectrale d'homotopie s'appelle suite spectrale d'Adams de X.

THÉORÈME II C.- *Soit X un ensemble simplicial $(m-1)$-connexe et $t < 2m-1$. Si les $\pi_i(X)$ sont des groupes de type fini pour tout i, la suite spectrale de toute (p, t)-résolution de X est faiblement convergente.*

DÉMONSTRATION.

a. Posons : $R^q = \bigcap_r \operatorname{Im} \pi(q+r) \longrightarrow \pi(q)$. D'après le théorème I C appliqué à X^q, on a $R^q = p^{\infty}\pi(q)$. On trouve dans [1], chapitre 15, page 320, proposition 2,2 :

"La suite spectrale est faiblement convergente si et seulement si chaque $R^{n+1} \longrightarrow R^n$ est un monomorphisme".

Cette proposition vient en contemplant le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_i(n, n+r) \arrow[r] \arrow[d, "f_r"] & \pi_{i-1}(n+r) \arrow[d, "g_r"] \arrow[dr] & \\
\pi_i(n) \arrow[ur] \arrow[dr, "f_{\infty}"'] & \pi_i(n, n+1) \arrow[r, "\partial"'] & \pi_{i-1}(n+1) \arrow[r] & \pi_{i-1}(n) \\
 & & &
\end{tikzcd}$$

$$\operatorname{Im} f_r = \overset{-1}{\partial} \operatorname{Im} g_r \; ; \quad \bigcap_r \operatorname{Im} f_r = \overset{-1}{\partial}\Big(\bigcap_r \operatorname{Im} g_r\Big) \; ; \quad \operatorname{Im} f_{\infty} = \overset{-1}{\partial}(0)$$

$$\text{Convergence faible} \iff \operatorname{Im} f_{\infty} = \bigcap_r \operatorname{Im} f_r \iff \bigcap_r (\operatorname{Im} g_r) \cap \operatorname{Im} \partial = 0$$

b. Dans la suite exacte $\pi_{i+1}(n, n+1) \longrightarrow \pi_i(n+1) \xrightarrow[\eta]{} \pi_i(n) \longrightarrow \pi_i(n, n+1)$, les deux groupes extrêmes sont des espaces vectoriels sur Z_p. Il en est donc de même de $\operatorname{Ker}\eta$ et $\operatorname{Coker}\eta$. Mais $\pi_i(n+1)$ étant de type fini, R^{n+1} se compose d'éléments d'ordre premier à p. On en déduit $R^{n+1} \cap \operatorname{Ker}\eta = 0$, d'où le théorème II C.

D. Calcul partiel des Ext_{A^*}.

PROPOSITION II D 1. - Si M est un module de la catégorie $\mathcal{C}$ (cf. II A), il existe une résolution injective

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow L^0 \longrightarrow L^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow L^n \longrightarrow \cdots$$

avec $L_i^n = 0$ pour $i < n$.

DÉMONSTRATION. - Il suffit de prendre une résolution minimale (cf. exposé 15, paragraphe 8) :

$$L^{o} = VM \otimes A_{*}$$

$$L^{n+1} = V(L^{n}/\mathrm{Im}\ L^{n-1}) \otimes A_{*}$$

DÉFINITION. - Soit M un module de $\mathcal{C}$. Une résolution t-partielle de M est un complexe coaugmenté

$$M \longrightarrow L^{o} \longrightarrow L^{1} \longrightarrow \dots \longrightarrow L^{n} \longrightarrow \dots$$

ayant les propriétés suivantes :

1° Les L^{n} sont des A^{*}-modules injectifs de $\mathcal{C}$.

2° $M_{i} \longrightarrow L_{i}^{o}$ est une injection pour $i \leq t$

3° $M_{i} \longrightarrow L_{i}^{o} \longrightarrow L_{i}^{1}$ est exacte pour $i \leq t+1$

4° $L_{i}^{n-1} \longrightarrow L_{i}^{n} \longrightarrow L_{i}^{n+1}$ est exacte pour i $t+n+1$.

PROPOSITION II D 2. - Etant donnée une résolution t-partielle de M, on peut trouver des A^{*}-modules injectifs L'^{n} de $\mathcal{C}$ tels que $L'^{n}_{i} = 0$ pour $i \leq t+n$, et une résolution injective de M :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow L^{o} \oplus L'^{o} \longrightarrow L^{1} \oplus L'^{1} \longrightarrow \dots \longrightarrow L^{n} \oplus L'^{n} \longrightarrow \dots$$

qui coïncide avec la résolution partielle donnée pour $i \leq t+n$.

DÉMONSTRATION. - Il suffit de poser $L'^{o} = V(\mathrm{Ker}\ M \longrightarrow L^{o}) \otimes A_{*}$

$$L'^{1} = V(\mathrm{Ker}\ (L^{o} \oplus L'^{o} \longrightarrow L')/\mathrm{Im}\ M) \otimes A_{*}$$

$$L'^{n+1} = V(\mathrm{Ker}(L^{n} \oplus L'^{n} \longrightarrow L^{n+1})/\mathrm{Im}(L^{n-1} \oplus L'^{n-1})) \otimes A_{*} \quad .$$

PROPOSITION II D 3. - Étant donnée une résolution t-partielle de M :

$$M \longrightarrow L^{o} \longrightarrow \dots ,$$

l'homologie du complexe

$$0 \longrightarrow VL^{o} \longrightarrow VL^{1} \longrightarrow \dots \longrightarrow VL^{n} \longrightarrow \dots$$

coïncide avec $\mathrm{Ext}^{n}_{i,A^{*}}(Z_{p}, M)$ pour $i \leq t+n$.

DÉMONSTRATION. - Complétons la résolution partielle en appliquant la proposition II D2. Par définition, $\mathrm{Ext}_{A^*}(Z_p, M)$ est l'homologie du complexe

$$0 \longrightarrow V(L^o \oplus L'^o) \longrightarrow \dots \longrightarrow V(L^n \oplus L'^n) \longrightarrow \dots$$

qui coïncide avec le complexe de l'énoncé pour $i \leq t + n$.

THÉORÈME II D. - <u>Soit</u> X <u>un ensemble simplicial</u> $(m - 1)$-<u>connexe, et</u> $t < 2m - 1$. <u>Alors le terme</u> ${}^2E_i^n$ <u>de la suite spectrale d'homotopie d'une</u> (p, t)-<u>résolution de</u> X <u>s'identifie à</u> $\mathrm{Ext}_i^n(Z_p, \widetilde{H}(X))$ <u>pour</u> $i \leq t + n$. <u>De plus, dans la suite spectrale d'Adams,</u> ${}^1E = {}^2E$.

DÉMONSTRATION. - Soit (X^n) une (p, t)-résolution de X, et posons :

$$L^n = Z_p(n) \otimes \pi(n, n + 1) \otimes A_* \qquad ,$$

où $Z_p(n)$ désigne le corps Z_p, considéré comme gradué homogène de degré n (pour une graduation à indices inférieurs), et considérons $\delta = \sigma \otimes \partial \otimes 1 : L^n \to L^{n+1}$, où

$\sigma : Z_p(n) \longrightarrow Z_p(n + 1)$ est de degré $+1$

$\partial : \pi(n, n + 1) \longrightarrow \pi(n + 1, n + 2)$ est de degré -1

$1 : A_* \longrightarrow A_*$ est l'identité

de sorte que δ est de degré 0. $\partial \circ \partial = 0$ entraîne $\delta \circ \delta = 0$. On définit $\varepsilon : \widetilde{H}_*(X) \longrightarrow L^o$ à l'aide du projecteur Z_p-linéaire $h : \widetilde{H}_*(X) \longrightarrow VH_*(X) = \pi(0, 1)$ qui sert à définir X^1 : on lui associe ε, A^*-linéaire : $\widetilde{H}_*(X) \longrightarrow \pi(0, 1) \otimes A_*$. Dans la zone stable, c'est-à-dire pour les degrés $i \leq t$, on a $Z_p(n) \otimes \pi(n, n + 1) \otimes A_* = C^n$, soit $L^n_{n+i} = C^n_{n+i}$. On en déduit que le complexe $\widetilde{H}_*(X) \longrightarrow L^o \longrightarrow \dots \longrightarrow L^n \longrightarrow \dots$ est une résolution t-partielle de $\widetilde{H}_*(X)$.

On a $VL^n_{n+i} = \pi_i(n, n + 1) = {}^1E^n_{n+i}$. La différentielle ${}^1d$ de la suite spectrale d'homotopie de la résolution n'est autre que $\partial(n, n + 1, n + 2) : \pi(n, n + 1) \longrightarrow \pi(n, n + 2)$. Elle coïncide avec celle du complexe VL. L'homologie ${}^2E$ de ${}^1E$ s'identifie donc dans la zone stable à l'homologie $\mathrm{Ext}(Z_p, \widetilde{H}_*(X))$ du complexe VL.

Enfin, si (X^n) est une résolution d'Adams, $VH_i(X^n, X^{n+1}) = VH_i(X^n)$ est dans l'image de $H_i(X_n)$ pour $i \leq t$. Donc la composée

$$VH_i(X^n, X^{n+1}) \xrightarrow{\partial} VH_i(X^{n+1}) \xrightarrow{\eta} VH_i(X^{n+1}, X^{n+2})$$

est nulle car $\partial = 0$; et la différentielle ${}^1d$ de la suite spectrale d'Adams est nulle dans la zone stable, d'où ${}^2E = {}^1E$.

E. Cas des sphères.

Nous noterons $S\pi_k$ le k-ième groupe d'homotopie stable des sphères : on a donc $\pi_{m+k} S^m = S\pi_k$ si $k < m - 1$.

Dans la zone stable de la suite spectrale d'Adams de la sphère S^m , c'est-à-dire pour $i - s < 2m - 1$, on a ${}^2E_i^s = \mathrm{Ext}_i^s(Z_p , Z_p(m)) = \mathrm{Ext}_{i-m}^s(Z_p , Z_p)$. D'autre part $\bigoplus_s {}^\infty E_{i+s}^s$ s'identifie au gradué associé à $\pi_i S^m = S\pi_{i-m}$. En décalant tous les degrés de m , on trouve une suite spectrale $\mathcal{E} = ({}^r\mathcal{E}_k^s)$ telle que, pour $k < m - 1$

1° ${}^2E_k^s = \mathrm{Ext}_k^s(Z_p , Z_p)$

2° $\bigoplus_s {}^\infty\mathcal{E}_{k+s}^s$ est un gradué associé à $S\pi_k$.

Pour chaque valeur de m , on a une telle suite spectrale $\mathcal{E}(m)$. En fait on va voir (Appendice) que deux telles suites spectrales s'identifient dans leur zone stable commune, et qu'elles se recollent toutes en une suite spectrale $\mathcal{E}$ unique qui satisfait à 1° et 2° sans restriction sur k .

Cette suite spectrale est faiblement convergente (théorème II C), et les éléments de filtration infinie de $S\pi_k$ sont les éléments divisibles par toute puissance de p , (théorème I C), c'est-à-dire les éléments d'ordre fini premier à p .

III. Appendice : S-théorie

On va indiquer ici un cadre dans lequel la théorie exposée se développe sans restriction de degré, c'est-à-dire sans ces éternelles inégalités $i < t$. Nous aurions pu nous placer d'emblée dans ce cadre, ce qui nous aurait dispensés du paragraphe II D . Nous ne l'avons pas fait parce que les théorèmes démontrés sont légèrement plus fins, et que les propositions énoncées dans le paragraphe II D , si elles sont ennuyeuses, peuvent cependant être utiles.

A. Définition.

Un S-objet X se compose :

1° d'une suite X_n d'ensembles simpliciaux, 2° pour chaque n, d'une application $SX_n \longrightarrow X_{n+1}$, (où SX_n désigne la "suspension" de X_n), de façon à satisfaire aux conditions suivantes :

ST 1. $\pi_i(X_n) = 0$ pour $i < n$;

ST 2. la suspension $\sigma : \pi_i(X_n) \longrightarrow \pi_{i+1}(X_{n+1})$ est un isomorphisme pour $i < 2n - 1$, et est surjective pour $i = 2n - 1$.

On peut remplacer l'axiome ST 2 par une condition équivalente portant sur l'homologie à coefficients dans Z.

EXEMPLES.

1° On peut prendre $X_n = S^n$, sphère à n dimensions. Le S-objet S ainsi défini s'appelle le S-objet des sphères. Plus généralement, l'ensemble simplicial X_o étant quelconque, on peut prendre $X_n = S^n X_o$. On peut aussi choisir arbitrairement un des X_n, et poser $X_{n+q} = S^q X_n$, $X_{n-q} = \Omega^q X_n$.

2° On peut aussi prendre, V étant un groupe abélien, $X_n = K(V, n)$, complexe d'Eilenberg-Mac-Lane; ou encore, $V_* = (V_i)$ étant une suite de groupes abéliens, $X_n = \prod K(V_i, n + i)$. Le S-objet ainsi défini sera noté $K(V_*)$.

Dans tous ces exemples, l'application $SX_n \longrightarrow X_{n+1}$ est celle qui s'impose naturellement.

B. Homotopie et homologie stables.

Soit $X = (X_n)$ un S-objet ; on appelle groupes d'homotopie stables de X les groupes

$$S\pi_k(X) = \varinjlim_n \pi_{n+k}(X_n) = \pi_{N+k}(X_N) \quad \text{pour } N > k + 1 .$$

On appelle de même groupes d'homologie et de cohomologie stables :

$$\left.\begin{aligned} SH_k(X) &= \varinjlim_n H_{n+k}(X_n) = H_{N+k}(X_N) \\ SH^k(X ; V) &= \varinjlim_n H^{n+k}(X_n) = H^{N+k}(X_N) \end{aligned}\right\} \quad \text{pour } N > k + 1 .$$

EXEMPLES.

1° S désignant le S-objet des sphères, on a $SH_*(S ; Z_p) = Z_p(0)$, et $S\pi_* = S\pi_*(S)$ est le groupe d'homotopie stable des sphères. On verra au prochain exposé qu'il est muni d'une structure d'anneau gradué anticommutatif.

2° On a $S\pi_*(K(V_*)) = V_*$, $SH_*(K(Z_p)\ ;\ Z_p) = A_*$, duale de l'algèbre de Steenrod, et $SH_*(K(V_*)\ ;\ Z_p) = V_* \otimes A_*$ si V_* est un Z_p-espace vectoriel gradué.

C. S-applications.

Une S-application $f : Y \longrightarrow X$ d'un S-objet $Y = (Y_n)$ dans un S-objet $X = (X_n)$ est la donnée, pour tout n , d'une application simpliciale $f_n : Y_n \longrightarrow X_n$, telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} SY_n & \longrightarrow & Y_{n+1} \\ \downarrow{\scriptstyle Sf_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} \\ SX_n & \longrightarrow & X_{n+1} \end{array}$$

soit commutatif pour tout n .

On a alors une application $\sigma : \pi_i(X_n\ ,\ Y_n) \longrightarrow \pi_{i+1}(X_{n+1}\ ,\ Y_{n+1})$ qui est un isomorphisme pour $i < 2n - 1$ et est surjective pour $i = 2n - 1$ (Lemme des cinq), ~~et~~ qui permet de définir l'homotopie stable relative

$$S\pi_k(X\ ,\ Y) = \varinjlim_n \pi_{n+k}(X_n\ ,\ Y_n) = \pi_{N+k}(X_N\ ,\ Y_N) \quad \text{pour} \quad N > k + 1 .$$

On définit de même les homologie et cohomologie stables relatives :

$$\left.\begin{array}{l} SH_k(X\ ,\ Y) = \varinjlim_n H_{n+k}(X_n\ ,\ Y_n) = H_{N+k}(X_N\ ,\ Y_N) \\ SH^k(X\ ,\ Y\ ;\ V) = \varinjlim_n H^{n+k}(X_n\ ,\ Y_n\ ;\ V) = H^{N+k}(X_N\ ,\ Y_N\ ;\ V) \end{array}\right\} \text{pour} \quad N > k + 1 .$$

Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_i(X_n\ ,\ Y_n) & \xrightarrow{\ \sigma\ } & \pi_{i+1}(X_{n+1}\ ,\ Y_{n+1}) \\ \downarrow{\scriptstyle \partial_n} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{n+1}} \\ \pi_{i-1}(Y_n) & \xrightarrow{\ \sigma\ } & \pi_i(Y_{n+1}) \end{array}$$

est anticommutatif, on définit une suite exacte d'homotopie stable relative :

$$S\pi_k(Y) \longrightarrow S\pi_k(X) \longrightarrow S\pi_k(X\ ,\ Y) \xrightarrow{\ \partial\ } S\pi_{k-1}(X) \longrightarrow S\pi_{k-1}(Y)$$

où $\partial = \varinjlim\ (-1)^n\ \partial_n$.

De même pour l'homologie et la cohomologie stables relatives.

On dira que $f : Y \longrightarrow X$ est une équivalence faible si $S\pi_k(X , Y) = 0$ pour tout k, ou, ce qui revient au même, si $f_* : S\pi_k(X) \longrightarrow S\pi_k(Y)$ est un isomorphisme pour tout k.

Par exemple, si $X = X_n$ est S-objet, alors $Y = Y_n$, où Y_n est le $(2n - 1)$-squelette de X_n, est un S-objet, et l'injection $Y \longrightarrow X$ est une équivalence faible.

D. S-<u>fibrés de type</u> p.

Soient $X = (X_n)$ un S-objet, $V_* = (V_i)_{i > 0}$ une suite d'espaces vectoriels sur Z_p, et (g_i) une suite de classes de cohomologie stables $g_i \in SH^i(X ; V_i)$. Soit $\bar{g} : X \longrightarrow K(V_*)$ une S-application telle que, pour tout n, $\bar{g}_n : X_n \longrightarrow K_n = \prod(K(V_i , n + i))$ soit de la classe définie par les images des g_i dans $H^{n+i}(X_n ; V_i)$. Pour tout n, soit X'_n l'image réciproque par $\bar{g}_n$ du fibré acyclique $L_n = \prod L(V_i , n + i - 1)$. On vérifie aisément que $X' = (X'_n)$ est un S-objet, l'application $SX'_n \longrightarrow X'_{n+1}$ étant obtenue en complétant le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
SX'_n \arrow[r] \arrow[dr, dashed] \arrow[dd] & SL_n \arrow[dr] & \\
& X'_{n+1} \arrow[r] \arrow[dd] & L_{n+1} \arrow[dd] \\
SX_n \arrow[dr] & & \\
& X_{n+1} \arrow[r] & K_{n+1}
\end{tikzcd}$$

Dans ces conditions, on dit que X' est un S-fibré de type p sur X. On obtient un énoncé analogue au lemme I A:

LEMME S Soit $X' \longrightarrow X$ un S-fibré de type p, $Y' \longrightarrow Y$ une S-application telle que $SH_k(Y' ; Z_p) \longrightarrow SH_k(Y ; Z_p)$ soit nulle pour tout k. Supposons que, pour tout n, SY'_n soit un sous-ensemble simplicial de Y'_{n+1}. Alors, pour toute S-application $f : Y \longrightarrow X$, il existe une S-application $f' : Y' \longrightarrow X'$ telle que le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\
Y \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

DÉMONSTRATION. - Analogue à celle du lemme I A. La seule difficulté consiste à montrer que, si $K = (K_n)$, où $K_n = K(V , n + k)$, et si $L = (L_n)$, où $L_n = L(V , n + k - 1)$, toute S-application $\gamma : Y' \to K$ telle que $\gamma^*(\xi) = 0$, où $\xi \in SH^k(K ; V)$ est la classe canonique, se factorise en une S-application $Y' \to L$. Le problème se ramène (exposé 8) au suivant : étant donné, pour tout n , un cocycle $\gamma_n \in Z^{n+k}(Y'_n ; V)$ cohomologue à 0 , ces cocycles étant tels que $\gamma_{n+1}|SY'_n$ soit la suspension de γ_n ; trouver des cochaînes $\eta_n \in C^{n+k-1}(Y'_n ; V)$ telles que $\gamma_n = \delta\eta_n$ et que $\eta_{n+1}|SY'_n$ soit la suspension de η_n . Choisissons η_N pour un $N > k + 1$ telle que $\delta\eta_N = \gamma_N$. On définit η_n pour $n \geq N$ par récurrence : soit $\theta_n \in C^{n+k}(SY'_n ; V)$ la suspension de η_n , soit $\bar{\theta}_n \in C^{n+k}(Y'_{n+1} ; V)$ une cochaîne prolongeant θ_n . On a

$\delta\bar{\theta}_n - \gamma_{n+1} \in Z^{n+k+1}(Y'_{n+1} , SY'_n ; V)$, mais $H^{n+k+1}(Y'_{n+1} , SY'_n) = 0$, donc

$\gamma_{n+1} - \delta\bar{\theta}_n = \delta\alpha_{n+1}$, avec $\alpha_{n+1} \in C^{n+k}(Y'_{n+1} , SY'_n ; V)$, et

$\eta_{n+1} = \bar{\theta}_n + \alpha_{n+1}$ répond à la question.

E. S-complexes.

Définition analogue à la définition I B des complexes géométriques. On définit de même des S-complexes p-fibrés, p-acycliques, des p-résolutions, et on a une proposition analogue à la proposition I B . On peut démontrer l'existence de p-résolutions pour tout S-objet $X = (X_n)$ tel que SX_n soit un sous-ensemble simplicial de X_{n+1} . Pour tout S-objet X , il existe un S-objet X^o satisfaisant à cette condition et une équivalence $X^o \to X$.

Enfin toute la théorie se développe de la même façon, sans restriction sur le degré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

ADDITIF

[2] ADAMS (J. F.). - On the structure and applications of the Steenrod algebra, Comment. Math. Helvet., t. 32, 1958, p.180-214. (Voir paragraphe 3).