HENRI CARTAN

Une suite spectrale. Application à l'algèbre de Steenrod pour $p = 2$

Séminaire Henri Cartan, tome 11, n° 2 (1958-1959), exp. n° 16, p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_2_A7_0>

UNE SUITE SPECTRALE. APPLICATION À L'ALGÈBRE DE STEENROD POUR $p = 2$

par Henri CARTAN

On se propose d'expliciter, jusqu'à un certain point, l'algèbre de cohomologie $H^*(A)$ lorsque A est l'algèbre de Steenrod S^* pour $p = 2$ (cf. [1], [2]). Pour la définition de $H^*(A)$, voir l'exposé 15, paragraphe 2. Cette explication utilise une suite spectrale, ce qui nous conduit à développer d'abord quelques préliminaires théoriques (paragraphes 1 et 2).

Dans cet exposé, K désigne toujours un corps commutatif, et les algèbres considérées sont des K-algèbres graduées associatives, localement finies, avec élément unité 1 de degré 0, et munies d'une augmentation ε. Tous les homomorphismes d'algèbres seront unitaires et respecteront la graduation et l'augmentation.

1. Suite spectrale définie par la donnée d'une sous-algèbre.

Soit C une algèbre graduée, et A une sous-algèbre graduée de C. On va associer fonctoriellement au couple (C, A) une suite spectrale d'algèbres $E_r(C, A)$ (les différentielles d_r étant des différentielles d'algèbres), dont le terme E_∞ est l'algèbre graduée associée à l'algèbre $H^*(C) = \mathrm{Ext}_C(K, K)$ convenablement filtrée.

Rappelons (cf. exposé 15, paragraphe 4) que $H^*(C)$ est l'algèbre de cohomologie de l'algèbre tensorielle $T^*(I(C_*'))$, munie de la différentielle δ définie par l'application diagonale $I(C_*') \longrightarrow I(C_*') \otimes I(C_*')$ de la coalgèbre C_*'. De plus, la graduation de $I(C_*')$ définit sur l'algèbre $T^*(I(C_*'))$ une graduation distincte de la "graduation tensorielle" (cette dernière donne le degré q au sous-espace $T^q(I(C_*'))$); nous l'appellerons la <u>graduation propre</u> de $T^*(I(C_*'))$; elle est compatible avec la graduation tensorielle, et la différentielle conserve la graduation propre. On obtient donc sur $H^*(C)$ une graduation propre ; on notera $H^{q,t}(C)$ le sous-espace de $H^q(C)$ formé des éléments de degré propre t. Rappelons que la graduation propre est ≤ 0.

Ceci dit, définissons une filtration décroissante de $T^*(I(C_*'))$ comme suit : $F^p\, T^*(I(C_*'))$ est le sous-espace engendré par les $u_1 \otimes \dots \otimes u_n$ tels que p au moins des u_i <u>aient une image nulle dans</u> $I(A_*)$ (par l'application naturelle $I(C_*) \longrightarrow I(A_*)$ définie par l'inclusion $A \longrightarrow C$). Il est immédiat que $F^p\, T^*(I(C_*))$ est stable pour la différentielle δ, et que le produit d'un élément de F^p et d'un élément de F^q est dans F^{p+q}. Cette filtration définit donc une suite spectrale d'algèbres différentielles $E_r(C\,,\,A) = \sum_{p,q} E_r^{p,q}(C\,,\,A)$, p désignant le degré filtrant ; le terme $E_\infty(C\,,\,A)$ est l'algèbre graduée associée à l'algèbre $H^*(C)$, filtrée par les images des algèbres de cohomologie $H^*(F^p\, T^*(I(C_*)))$. Comme la filtration est compatible avec la graduation propre, chaque E_r possède une <u>graduation propre</u>, compatible avec la graduation filtrante et la "graduation totale"; les différentielles d_r conservent la graduation propre. L'isomorphisme de E_∞ avec le gradué associé à $H^*(C)$ est compatible avec les graduations propres.

La suite spectrale précédente est fonctorielle : si on a un homomorphisme $C \longrightarrow C'$ qui envoie la sous-algèbre A de C dans la sous-algèbre A' de C', on a un homomorphisme de la suite spectrale des $E_r(C'\,,\,A')$ dans celle des $E_r(C\,,\,A)$, qui aboutit à l'homomorphisme fonctoriel $H^*(C') \longrightarrow H^*(C)$.

Considérons un cas particulier, celui où $A = K$. Il est immédiat que $F^p\, T^*(I(C_*)) = \sum_{q \geq p} T^q(I(C_*))$, d'où $E_0^p = T^p(I(C_*))$, la différentielle d_0 étant nulle. Ainsi $E_1 = T^*(I(C_*))$, la différentielle d_1 étant δ, d'où $E_2 = H^*(C)$. Toutes les différentielles d_r sont nulles pour $r \geq 2$. On trouve sur l'algèbre $H^*(C)$ une filtration (dite "filtration naturelle") pour laquelle l'algèbre graduée associée est canoniquement isomorphe à $H^*(C)$.

Revenons au cas général. Soit $C.I(A)$ l'idéal à gauche de C engendré par $I(A)$, et soit B le quotient $C/C.I(A)$. Considérons l'application linéaire

$$\varphi^p : T^*(I(C_*)) \otimes T^p(I(B_*)) \longrightarrow F^p\, T^*(I(C_*))$$

qui envoie $x \otimes y$ dans $x \otimes i(y)$, i désignant l'injection définie par l'application $I(B_*) \longrightarrow I(C_*)$, obtenue par transposition de la surjection naturelle $C \longrightarrow B$. En composant φ^p et l'application naturelle

$$F^p\, T^*(I(C_*)) \longrightarrow F^p\, T^*(I(C_*))/F^{p+1}\, T^*(I(C_*)) = E_0^p(C\,,\,A) \quad ,$$

on obtient une application ψ^p qui passe au quotient pour définir

$$\psi^p : T^*(I(A_*)) \otimes T^p(I(B_*)) \longrightarrow E_0^p(C\,,\,A) \quad .$$

En effet, considérons la surjection naturelle $T^*(I(C_*)) \longrightarrow T^*(I(A_*))$, qui est compatible avec les applications diagonales. Pour montrer que ψ^p passe au quotient, il suffit de faire voir que $\psi^p(x \otimes y) \in F^{p+1}$ chaque fois que x est de la forme $u_1 \otimes \ldots \otimes u_n$, l'un au moins des u_i ayant une image nulle dans $I(A_*)$. Or ceci est évident.

On notera $\nu : T^*(I(A_*)) \otimes T^*(I(B_*)) \longrightarrow E_0(C\ ,\ A)$ l'application définie par les ν^p.

THÉORÈME 1. - Supposons que, comme A-module (à droite), C possède une base formée de 1 et d'éléments homogènes de $I(C)$ qui anticommutent avec les éléments de A. Ceci implique $I(A).C = C.I(A)$, et par suite B est munie d'une structure d'algèbre, quotient de l'algèbre C. Alors l'application ν induit un isomorphisme

$$H^*(A) \otimes H^*(B) \approx E_2(C\ ,\ A)$$

compatible avec les graduations propres. Plus précisément $H^q(A) \otimes H^p(B) \approx E_2^{p,q}(C\ ,\ A)$. De plus, cet isomorphisme est compatible avec les structures d'algèbres, si on définit sur $H^*(A) \otimes H^*(B)$ la multiplication du produit tensoriel de deux algèbres bigraduées :

$$(x \otimes y).(x' \otimes y') = (-1)^{pq+tt'}(xx') \otimes (yy') \qquad ,$$

pour $y \in H^{p,t}(B)$ et $x' \in H^{q,t'}(A)$.

La démonstration sera un peu longue et délicate. Quant à l'énoncé, il appelle des observations : en effet, il est connu ([3], chapitre XVI, théorème 6.1) que, lorsque $C.I(A)$ est un idéal bilatère et que C est A-libre comme A-module à droite, on a une suite spectrale dont le terme E_2 est

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_B^p(K\ ,\ \mathrm{Ext}_A^q(K\ ,\ K))$$

($\mathrm{Ext}_A^q(K\ ,\ K)$ est en effet un B-module à gauche), et dont le terme E_∞ est le gradué associé à $\mathrm{Ext}_C(K\ ,\ K)$ convenablement filtré. Il ne serait pas difficile de montrer que, sous l'hypothèse de l'énoncé, B opère trivialement dans $\mathrm{Ext}_A(K\ ,\ K) = H^*(A)$ (i. e : un élément $b \in I(B)$ définit une opération nulle), d'où facilement

$$\mathrm{Ext}_B^p(K\ ,\ \mathrm{Ext}_A^q(K\ ,\ K)) \approx H^q(A) \otimes H^p(B) \qquad .$$

Mais, dans cette suite spectrale, il n'y a rien qui concerne la structure multiplicative, contrairement à ce qui a lieu pour celle du théorème 1. On ignore d'ailleurs si la suite spectrale de [3] est la même que celle du théorème 1 ; la question est de peu d'intérêt, vu que, pour les applications qu'on fera du théorème 1, on aura besoin d'utiliser la définition explicite de la filtration de $T^*(I(C_*))$ qui conduit à la suite spectrale du théorème 1.

REMARQUE. - Un cas particulier de la situation du théorème 1 a déjà été envisagé dans l'exposé 15 (paragraphe 5) : c'est celui où C est le produit tensoriel $A \otimes B$ de deux algèbres graduées. Dans ce cas, non seulement E_2 est isomorphe à $H^*(A) \otimes H^*(B)$, mais l'algèbre $H^*(C)$ elle-même est canoniquement isomorphe à l'algèbre $H^*(A) \otimes H^*(B)$.

2. Démonstration du théorème 1.

Nous suivrons sensiblement la démonstration d'ADAMS, à cela près que le théorème énoncé par ADAMS ([2], théorème 2.3.1, p. 25) fait des hypothèses plus restrictives : on y suppose en effet que les éléments de A anticommutent avec ceux de C , ce qui implique notamment que A est anticommutative. Bien que cette situation soit la plus intéressante en vue des applications, nous préférons donner ici le théorème en toute généralité, de manière à couvrir en même temps le cas de la proposition 5 de l'exposé 15.

Pour prouver le théorème, on procédera en plusieurs étapes, en introduisant au fur et à mesure des hypothèses de plus en plus restrictives. Reprenons la situation générale où A est simplement supposée sous-algèbre de C , et où l'on définit $B = C/C.I(A)$. On établira successivement les résultats suivants :

PROPOSITION 1. - Si $C.I(A)$ est un idéal bilatère de C (ce qui implique que B est une algèbre quotient de C), alors l'application γ^p est compatible avec les opérateurs différentiels δ_0 et d_0 , en notant δ_0 l'opérateur différentiel de $T^*(I(A'_*)) \otimes T^p(I(B'_*))$ qui envoie $x \otimes y$ dans $(\delta x) \otimes y$ (δ désigne la différentielle de l'algèbre $T^*(I(A'_*))$, définie par l'application diagonale $I(A'_*) \to I(A'_*) \otimes I(A'_*)$) .

PROPOSITION 2. - Si de plus C possède, comme A-module à droite, une base formée de 1 et d'éléments homogènes de $I(C)$, alors l'application $\gamma^* : H^*(A) \otimes T^*(I(B'_*)) \to E_1$ définie par γ est bijective.

PROPOSITION 3. - Supposons que C possède, comme A-module à droite, une base formée de 1 et d'éléments homogènes de $I(C)$ qui anticommutent avec les éléments de A . Alors :

(i) l'isomorphisme γ^* (proposition 2) est compatible avec les structures d'algèbres (si on définit sur $H^*(A) \otimes T^*(I(B^*))$ la structure d'algèbre, produit tensoriel de deux algèbres bigraduées) ;

(ii) <u>si on transporte à</u> $H^*(A) \otimes T^*(I(B_*'))$ <u>la différentielle</u> d_1 <u>de</u> E_1 <u>au moyen de l'isomorphisme</u> ν^*, on obtient l'opérateur δ_1 défini par

$$\delta_1(x \otimes y) = (-1)^q \, x \otimes (\delta y) \qquad \text{pour} \quad x \in H^q(A) .$$

<u>Donc</u> ν^* <u>induit un isomorphisme d'algèbres</u> $H^*(A) \otimes H^*(B) \approx E_2$

On va prouver successivement ces trois propositions, ce qui entraînera le théorème 1.

DÉMONSTRATION de la proposition 1. - On va définir une filtration croissante sur $T_*(I(C))$, Soit $F_p \, T_*(I(C))$ le sous-espace engendré par les éléments $u_1 \otimes \dots \otimes u_n$ tels que $n - p$ au moins des u_i appartiennent à $I(A)$; F_p est stable pour l'opérateur différentiel

$$(1) \qquad d(u_1 \otimes \dots \otimes u_n) = \sum_{1 \leq r < n} (-1)^r \, u_1 \otimes \dots \otimes (u_r \, u_{r+1}) \otimes \dots \otimes u_n \quad .$$

Il est clair que $F^p \, T^*(I(C_*'))$ s'identifie au dual de $T_*(I(C))/F_{p-1} \, T^*(I(C))$, δ étant transposée de d. De même, $E_0^p = F^p/F^{p+1}$ s'identifie au dual de F_p/F_{p-1}. L'application

$$\nu^p : T^*(I(A_*)) \otimes T^p(I(B_*')) \longrightarrow E_0^p$$

est transposée de l'application

$$\nu_p : F_p/F_{p-1} \longrightarrow T_*(I(A)) \otimes T_p(I(B))$$

définie comme suit : considérons l'application

$$\varphi_p : F_p \longrightarrow T_*(I(C)) \otimes T_p(I(B))$$

qui envoie $u_1 \otimes \dots \otimes u_n$ dans

$$u_1 \otimes \dots \otimes u_{n-p} \otimes (\pi u_{n-p+1}) \otimes \dots \otimes (\pi u_n) \quad .$$

Elle s'annule sur F_{p-1} et prend en fait ses valeurs dans le sous-espace $T_*(I(A)) \otimes T_p(I(B))$; ce qui définit ν_p.

Pour prouver la proposition 1, il suffit de montrer que ν_p est compatible avec l'opérateur d^o de F_p/F_{p-1} et avec l'opérateur différentiel de $T_*(I(A)) \otimes T_p(I(B))$ qui envoie $x \otimes y$ dans $(dx) \otimes y$. Tout revient à vérifier que si $u_{n-p} \in I(A)$ et $u_{n-p+1} \in I(C)$, alors $\pi(u_{n-p}\, u_{n-p+1}) = 0$. Or il en est ainsi, parce que, $C.I(A)$ étant par hypothèse un idéal bilatère, l'application π est multiplicative.

DÉMONSTRATION de la proposition 2. - Ne faisons d'abord aucune hypothèse de plus que dans la proposition 1. Considérons le complexe standard $S(C) = C \otimes T'_*(I(C))$, qui est une résolution libre de K pour l'opérateur différentiel

$$d(u[u_1, \ldots , u_n]) = uu_1 [u_2 , \ldots , u_n] + \sum_{1 \leq r < n} (-1)^r u [u_1 , \ldots , u_r u_{r+1} , \ldots , u_n] ;$$

et rappelons que l'opérateur différentiel de $T'_*(I(C))$ considéré ci-dessus est induit par celui de $S(C)$ quand on identifie $T'_*(I(C))$ à $K \otimes_C S(C)$. La filtration de $T'_*(I(C))$ définit une filtration de $S(C)$, en posant

$$F_p\, S(C) = C \otimes F_p\, T'_*(I(C)) \quad .$$

$F_p\, S(C))$ est stable pour d ; et $F_p\, S(C)/F_{p-1}\, S(C)$ s'identifie à $C \otimes (F_p/F_{p-1})$, en écrivant F_p/F_{p-1} au lieu de $F_p\, T'_*(I(C))/F_{p-1} T'_*(I(C))$. Si on identifie F_p/F_{p-1} à $K \otimes_C (C \otimes (F_p/F_{p-1}))$, on obtient sur F_p/F_{p-1} l'opérateur différentiel considéré dans la démonstration de la proposition 1.

Notons X_p l'image de $A \otimes F_p$ dans $C \otimes (F_p/F_{p-1})$; X_p est stable pour la différentielle de $C \otimes (F_p/F_{p-1})$, car d envoie $A \otimes F_p$ dans $A \otimes F_p + C \otimes F_{p-1}$. Comme A-module à gauche, X_p s'identifie à $A \otimes (F_p/F_{p-1})$, ce qui permet d'identifier F_p/F_{p-1} (avec son opérateur différentiel) à $K \otimes_A X_p$, et, par dualité,

$$E_0^p = F^p/F^{p+1} \approx \mathrm{Hom}_A^*(X_p , K) \quad ,$$

la notation Hom^* ayant la même signification que dans l'exposé 15 (paragraphe 2). L'application ν^p devient alors l'application

$$(1) \qquad \mathrm{Hom}_A^*(S(A) \otimes T_p(I(B)) , K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A^*(X_p , K)$$

déduite de l'application A-linéaire

$$f_p : X_p \longrightarrow S(A) \otimes T_p(I(B))$$

qu'on obtient en tensorisant ν_p à gauche par A . Il est immédiat que f_p est compatible avec les opérateurs différentiels.

On doit montrer que, sous l'hypothèse de la proposition 2, l'application (1) définit un isomorphisme des cohomologies. Comme X_p et $S(A) \otimes T_p(I(B))$ sont A-libres, il suffit donc (d'après un théorème classique d'Algèbre homologique) de montrer :

LEMME. - *Sous les hypothèses de la proposition 2, l'application* f_p *définit un isomorphisme des homologies.*

Soit $g_p : X_p \to T_p(I(B))$ la composée de f_p et de la projection $S(A) \otimes T_p(I(B)) \to T_p(I(B))$ définie par l'augmentation $S(A) \to K$. Cette projection définit un isomorphisme des homologies, puisque $S(A)$ est acyclique sur K ; donc il suffit de prouver que g_p *définit un isomorphisme des homologies* (l'opérateur différentiel de $T_p(I(B))$ étant d'ailleurs nul). Observons que g_p n'est autre que l'application fonctorielle $X_p(C) \to X_p(B)$ définie par la projection $C \to B$ (qui envoie A dans K).

L'opérateur d'homotopie s de $S(C)$, qui envoie $u[u_1, \ldots, u_n]$ dans $[u, u_1, \ldots, u_n]$, laisse stable

$$Y_p = A \otimes F_p + C \otimes F_{p-1} \qquad ,$$

qui est aussi stable pour d ; donc Y_p est acyclique sur K. L'application naturelle $A \otimes F_p \to A \otimes (F_p/F_{p-1}) = X_p$ induit une surjection $Y_p \to X_p$, compatible avec d, et dont le noyau est $C \otimes F_{p-1}$. Changeons p en $p+1$; dans la surjection $Y_{p+1} \to X_{p+1}$, il est clair que Y_p va dans 0 ; on a donc une suite exacte

$$(2) \qquad 0 \to N_p \to Y_{p+1}/Y_p \to X_{p+1} \to 0 \qquad ,$$

où le noyau N_p est l'image de $C \otimes F_p$ dans Y_{p+1}/Y_p. On va maintenant utiliser l'hypothèse de la proposition 2 pour mettre N_p sous une forme particulière.

Cette hypothèse permet d'écrire $C = B \otimes A$ comme A-module à droite, d'une façon compatible avec les augmentations et les graduations. D'où $C = A + I(B) \otimes A$. Ecrivons P au lieu de $I(B) \otimes A$, pour un instant ; l'image de $C \otimes F_p = A \otimes F_p \oplus P \otimes F_p$ dans Y_{p+1}/Y_p est
$P \otimes (F_p/F_{p-1}) = I(B) \otimes A \otimes (F_p/F_{p-1}) = I(B) \otimes X_p$, et on vérifie aussitôt que l'opérateur différentiel est déduit de celui de X_p par B-linéarité. Alors la suite exacte (2) donne naissance à une suite exacte d'homologie qui, vu l'acyclicité de Y_{p+1}/Y_p, donne des isomorphismes

$$H_{q+1}(X_{p+1}) \approx I(B) \otimes H_q(X_p) \qquad .$$

Vu le caractère fonctoriel vis-à-vis de la projection $C \to B$, qui envoie

$B \otimes A \to B$ par l'application $b \otimes a \to \varepsilon(a)\, b$, on trouve un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_*(X_{p+1}) & \xrightarrow{(g_{p+1})_*} & T_{p+1}(I(B)) \\ \wr\!\wr & & \wr\!\wr \\ I(B) \otimes H_*(X_p) & \xrightarrow{1 \otimes (g_p)_*} & I(B) \otimes T_p(I(B)) \end{array}$$

Ceci permet de prouver, par récurrence sur p , que $(g_p)_*$ est un isomorphisme ; pour $p = 0$, l'assertion est triviale.

DÉMONSTRATION de la proposition 3. - Prenons une A-base de C formée de 1 et d'éléments homogènes de $I(C)$ qui anticommutent avec les éléments de A . Soit C' la sous-algèbre de C engendrée par ces éléments de base. L'application

$$A \otimes C' \longrightarrow C$$

définie par la multiplication de C est compatible avec les structures d'algèbres, si on munit $A \otimes C'$ de la structure d'algèbre, produit tensoriel de deux algèbres graduées. La suite spectrale de C s'en va donc dans celle de $A \otimes C'$. On est ainsi amené à étudier la suite spectrale d'un produit tensoriel d'algèbres.

Ouvrons donc une parenthèse, et écrivons $A \otimes B$ au lieu de $A \otimes C'$. On va étudier la suite spectrale du couple (C , A) , C désignant l'algèbre $A \otimes B$. On a deux applications naturelles

$$S(A) \otimes S(B) \xrightarrow{f} S(C) \xrightarrow{g} S(A) \otimes S(B)$$

compatibles avec les opérateurs différentiels (celui de $S(A) \otimes S(B)$ étant défini à la manière habituelle d'un produit tensoriel, pour la graduation de $S(A)$ qui donne le degré p aux éléments de $A \otimes T_p(I(A))$) ; la composée de ces applications est l'identité. Les formules sont celles de [3] (chapitre XI, formules (1) et (3) du paragraphe 7), à cela près que les signes de la formule (1) de [3] doivent être modifiés pour tenir compte de la graduation propre : le signe que l'on doit mettre devant une permutation de $\zeta_1 , \dots , \zeta_{p+q}$ dans la formule (1) est le produit de la signature de cette permutation par un nombre $\varepsilon = \pm 1$ obtenu par application de la règle de Koszul aux degrés propres des ζ_i .

Par transposition, on obtient des applications

$$T^*(I(A_*)) \otimes T^*(I(B_*)) \xrightarrow{g'} T^*(I(C_*)) \xrightarrow{f'} T^*(I(A_*)) \otimes T^*(I(B_*))$$

compatibles avec les différentielles δ , et dont la composée est l'identité. Il est utile d'expliciter g' et f' :

$$g'(u \otimes v) = i_1(u) \otimes i_2(v) \quad ,$$

où i_1 et i_2 sont induits par les injections $A'_* \longrightarrow C'_*$ et $B'_* \longrightarrow C'_*$ (transposées des deux projections $C \longrightarrow A$ et $C \longrightarrow B$ définies respectivement par l'augmentation de B et par celle de A dans $A \otimes B$). Quant à $f'(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n)$, c'est une somme d'éléments obtenus comme suit : pour chaque partition de la suite $(1, \ldots, n)$ en deux sous-ensembles I et J, on envoie x_i dans $I(A'_*)$ si $i \in I$, et dans $I(B'_*)$ si $i \in J$ (par les applications naturelles), on fait sur les éléments obtenus la permutation qui, sans changer l'ordre interne des $i \in I$ ni celui des $i \in J$, ramène les $i \in I$ avant les $i \in J$; ceci définit un élément de $\sum_{p+q=n} T^p(I(A'_*)) \otimes T^q(I(B'_*))$, qu'on affecte d'un signe comme il a été dit plus haut lors de la définition de f. La somme des termes ainsi obtenus est $f'(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n)$.

Définissons maintenant une filtration sur $T^*(I(B'_*))$, en posant $F^p\, T^*(I(B'_*)) = \sum_{q \geq p} T^q(I(B'_*))$. D'où, par produit tensoriel avec $T^*(I(A'_*))$, une filtration sur $T^*(I(A'_*)) \otimes T^*(I(B'_*))$, stable pour la différentielle. Il est immédiat que g' et f' sont compatibles avec les filtrations (celle de $T^*(I(C'_*))$ a été définie au paragraphe 1, à l'aide de la sous-algèbre A). Donc g' et f' définissent des homomorphismes des suites spectrales, et le composé de ces homomorphismes est l'identité.

Regardons $g'^{\,p}_0 : T^*(I(A'_*)) \otimes T^p(I(B'_*)) \longrightarrow E^p_0(C, A)$.

Il est immédiat que ce n'est pas autre chose que ν^p, dans le cas particulier considéré ici. Donc, d'après la proposition 2,

$$g'_1 : H^*(A) \otimes T^*(I(B'_*)) \longrightarrow E_1(C, A)$$

est bijective. Il s'ensuit que $f'_1 : E_1(C, A) \longrightarrow H^*(A) \otimes T^*(I(B'_*))$ est la bijection réciproque. De plus, g'_1 et f'_1 sont compatibles avec les différentielles d_1, celle de $H^*(A) \otimes T^*(I(B'_*))$ étant évidemment définie par

$$d_1(u \otimes v) = (-1)^q\, u \otimes (\delta v) \quad ,$$

pour $u \in H^q(A)$.

Enfin, montrons que g'_1 <u>est compatible avec les structures d'algèbres</u>, lorsqu'on munit $H^*(A) \otimes T^*(I(B'_*))$ de la structure d'algèbre, produit tensoriel de deux algèbres bigraduées. Il suffit de montrer que si $u \in H^{q,t}(A)$ et $v \in H^{p,r}(B)$, on a

$$g'_1(v)\ g'_1(u) = (-1)^{pq+rt}\ g'_1(u\otimes v) \quad .$$

Il suffit pour cela de vérifier que les images des deux membres par la bijection f'_1 sont égales ; or cela résulte aussitôt de la définition explicite f' .

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 3. Revenons aux notations antérieures, et à l'homomorphisme d'algèbres $A\otimes C'\longrightarrow C$; B désigne à nouveau le quotient de C par l'idéal engendré par $I(A)$. Le composé de l'injection $C'\longrightarrow C$ et de la projection $C\longrightarrow B$ est un homomorphisme d'algèbres $C'\longrightarrow B$; c'est celui qui est induit par $A\otimes C'\longrightarrow C$ quand on passe aux quotients. Envoyons la suite spectrale de $(C\ ,\ A)$ dans celle de $(A\otimes C'\ ,\ A)$; on a notamment un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^*(A)\otimes T^*(I(B_*)) \arrow[r, "\nu^*", "\approx"'] \arrow[d] & E_1(C\ ,\ A) \arrow[d] \\ H^*(A)\otimes T^*(I(C'_*)) \arrow[r, "g'_1", "\approx"'] & E_1(A\otimes C'\ ,\ A) \end{tikzcd}$$

où le premier homomorphisme vertical est <u>l'injection</u> définie par l'injection naturelle $B_*\longrightarrow C'_*$. Le second homomorphisme vertical est donc une injection. Les deux homomorphismes verticaux sont compatibles avec les structures multiplicatives, et il en est de même de g'_1 (comme on vient de le voir). Il s'ensuit que ν^* est compatible avec les structures multiplicatives : c'est l'assertion (i) de l'énoncé.

Le même raisonnement montre, puisque g'_1 est compatible avec les différentielles d_1 (comme on vient de le voir) que ν^* est compatible avec les différentielles, comme il est dit dans l'assertion (ii) de l'énoncé.

De cette façon, le théorème 1 est entièrement démontré.

REMARQUE FINALE. - Lorsque $C.I(A)$ est un idéal bilatère de C , on dit que A est une sous-algèbre <u>normale</u> de C , et on note $C/\!/A$ l'algèbre $B = C/C.I(A)$. Lorsqu'en outre C est une algèbre de Hopf (au sens de l'exposé 10), et A une sous-algèbre de Hopf (normale), <u>on a</u> $I(A).C = C.I(A)$, <u>et</u> C <u>possède une</u> A-<u>base</u> (pour sa structure de A-module à gauche, resp. à droite) <u>formée de</u> 1 <u>et d'éléments homogènes de</u> $I(C)$ (autrement dit, l'hypothèse de la proposition 2 est alors remplie d'elle-même). Pour la démonstration, voir l'appendice, et [4].

3. <u>Cohomologie de l'algèbre de Steenrod pour</u> $p = 2$.

Considérons l'algèbre de Steenrod S^* pour $p = 2$, et sa duale S_* . On sait (exposés 10 et 11) que S_* est une algèbre de polynômes (sur le corps Z_2)

engendrée par des éléments ξ_i $(i = 1 , 2 , \ldots)$, ξ_i ayant le degré $2^i - 1$. De plus l'application diagonale de $S_*^{'}$ (qui définit la multiplication de S^*) est définie par la formule (exposé 11, formule (10))

$$\delta \xi_k = \sum_{0 \leq i \leq n} (\xi_{k-i})^{2^i} \otimes \xi_i \qquad ; \tag{1}$$

on écrit ici l'application $\delta : I(S_*^{'}) \longrightarrow I(S_*^{'}) \otimes I(S_*^{'})$, qui sert à définir la différentielle de l'algèbre tensorielle $T^*(I(S_*^{'}))$; on sait que l'algèbre de cohomologie de $T^*(I(S_*^{'}))$ pour cette différentielle est $H^*(S^*)$, et que cette algèbre $H^*(S^*)$ est <u>commutative</u> parce que S^* est une algèbre de Hopf (exposé 15, théorème I). Chaque $H^n(S^*)$ possède en outre une graduation propre, qui provient de la graduation des ξ_k .

L'opération qui associe à chaque $u \in S_*^{'}$ son carré u^2 est un homomorphisme d'algèbres $S_*^{'} \longrightarrow S_*^{'}$, compatible avec l'application diagonale de $S_*^{'}$; autrement dit, c'est un endomorphisme de l'algèbre de Hopf $S_*^{'}$, à cela près que les degrés sont doublés. Il définit donc un endomorphisme $F : H^*(S^*) \longrightarrow H^*(S^*)$, qui double la graduation propre. C'est là un phénomène général pour toute algèbre de Hopf sur le corps Z_2 , lorsque l'application diagonale est commutative (ici, c'est l'application diagonale de S^* qui est commutative).

Puisque $\delta \xi_1 = 0$, ξ_1 est un cocycle de $T^*(I(S_*^{'}))$, donc définit un élément de $H^1(S^*)$, que nous noterons h_0 ; son degré propre est 1 . On définit par récurrence sur i l'élément $h_i = F(h_{i-1})$; il est dans $H^1(S^*)$, son degré ~~propre est~~ 2^i , et il est d'ailleurs défini par le cocycle $(\xi_1)^{2^i}$.

PROPOSITION 4. - <u>Dans l'algèbre commutative</u> $H^*(S^*)$, <u>on a les relations</u>

$$h_i \, h_{i+1} = 0 \qquad , \tag{3}$$

$$(h_i)^2 \, h_{i+2} + (h_{i+1})^3 = 0 \qquad , \tag{4}$$

$$h_i (h_{i+2})^2 = 0 \qquad . \tag{5}$$

DÉMONSTRATION. - Il suffit de prouver ces relations pour $i = 0$, puisque F est un endomorphisme de l'algèbre $H^*(S^*)$. Il suffit donc de montrer que les cocycles

$$(\xi_1)^2 \otimes \xi_1 \ , \quad (\xi_1)^4 \otimes \xi_1 \otimes \xi_1 + (\xi_1)^2 \otimes (\xi_1)^2 \otimes (\xi_1)^2 \quad \text{et} \quad (\xi_1)^4 \otimes \xi_1 \otimes \xi_1$$

sont des cobords. Cela résulte des formules, faciles à vérifier ;

$$(3') \quad \delta\xi_2 = (\xi_1)^2 \otimes \xi_1 \quad ,$$

$$(4') \quad \delta[\xi_2 \otimes \xi_2 + (\xi_1)^2 \otimes (\xi_1 \; \xi_2) + ((\xi_1)^2 \; \xi_2) \otimes \xi_1]$$

$$= (\xi_1)^4 \otimes \xi_1 \otimes \xi_1 + (\xi_1)^2 \otimes (\xi_1)^3 \otimes (\xi_1)^2 \quad ,$$

$$(5') \quad \delta[\xi_3 \otimes (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 \otimes \xi_2 + (\xi_1)^4 \otimes ((\xi_1)^2 \; \xi_2) + (\xi_2)^2 \otimes (\xi_1)^3]$$

$$= (\xi_1)^4 \otimes (\xi_1)^4 \otimes \xi_1 \quad .$$

Naturellement, ces formules ont l'air de tomber du ciel. On verra plus loin comment on serait conduit à les découvrir par un procédé systématique.

On ne dit pas qu'il n'y a pas d'autre relation entre les h_i dans l'algèbre S^*. Toutefois :

THÉORÈME 2. - Considérons l'algèbre des polynômes en $x_o , \dots , x_n , \dots$, chaque x_n étant affecté du "degré propre" 2^n. Soit Q le quotient de cette algèbre par l'idéal engendré par les polynômes

$$x_i \; x_{i+1} \; , \quad (x_i)^2 \; x_{i+2} + (x_{i+1})^3 \quad \text{et} \quad x_i (x_{i+2})^2 \quad .$$

Considérons l'homomorphisme d'algèbres $Q \longrightarrow H^*(S^*)$ qui envoie x_i en h_i ; il envoie Q^r (espace engendré par les produits de r variables x_i) dans $H^r(S^*)$, en respectant les graduations propres. Alors l'application $Q^r \longrightarrow H^r(S^*)$ est bijective pour $r = 1$ et $r = 2$, injective pour $r = 3$.

La fin de cet exposé est consacrée à la démonstration de ce théorème. Il explicite entièrement $H^1(S^*)$ et $H^2(S^*)$, partiellement $H^3(S^*)$. En fait, il existe des éléments de $H^3(S^*)$ non situés dans l'image de Q^3 ; c'est ainsi que le cocycle (de degré propre 11)

$$(6) \quad \xi_3 \otimes (\xi_1)^2 \otimes (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 \otimes \xi_2 \otimes (\xi_1)^2 + (\xi_1)^4 \otimes ((\xi_1)^2 \; \xi_2) \otimes (\xi_1)^2$$

$$+ (\xi_2)^2 \otimes (\xi_1)^3 \otimes (\xi_1)^2 + (\xi_1)^4 \otimes (\xi_1)^4 \otimes \xi_2 + (\xi_1)^4 \otimes (\xi_1)^4 \otimes (\xi_1)^3$$

définit un élément non nul de $H^3(S^*)$, élément qui n'est pas dans l'image de Q^3, puisque les degrés propres des éléments de Q^3 sont $3 , 6 , 10 , 12 , \dots$ (on prouvera plus loin que le cocycle (6) n'est pas un cobord).

REMARQUE. - L'assertion de l'énoncé relative à $H^1(S^*)$ exprime que les $(\xi_1)^{2^i}$ forment une base de l'espace vectoriel des éléments primitifs de S_*. On avait déjà établi directement ce résultat (exposé 12, théorème 2).

4. Démonstration du théorème 2.

Soit B'_n la sous-algèbre de S_* engendré par les ξ_i pour $i \leq n$; c'est une sous-algèbre de Hopf, et B'_{n-1} est une sous-algèbre normale de B'_n, puisque la multiplication de S_* est commutative. L'algèbre quotient $A'_n = B'_n /\!/ B'_{n-1}$ s'identifie à l'algèbre des polynômes en ξ_n, munie de l'application diagonale $\xi_n \longrightarrow \xi_n \otimes 1 + 1 \otimes \xi_n$. Autrement dit, $\delta \xi_n = 0$ dans A'_n. Par dualité (exposé 12, paragraphe 2), B_n (algèbre de Hopf duale de B'_n) s'identifie à un quotient de S^*, A_n est une sous-algèbre normale de B_n, et $B_n /\!/ A_n = B_{n-1}$ s'identifie à la duale de B'_{n-1}. Puisque l'algèbre S_* est limite industive de ses sous-algèbres B'_n, l'algèbre $H^*(S^*)$ est limite inductive des algèbres $H^*(B_n)$. Ainsi, théoriquement, pour déterminer $H^*(S^*)$, on détermine successivement les algèbres $H^*(B_n)$; on va voir que le passage de $H^*(B_{n-1})$ à $H^*(B_n)$ s'effectue au moyen d'une suite spectrale.

En effet, pour pouvoir appliquer le théorème 1, il suffit de vérifier que la sous-algèbre A_n est dans le centre de B_n ; cela signifie que les deux applications composées

$$B'_n \xrightarrow{\Delta} B'_n \otimes B'_n \xrightarrow{\pi \otimes 1} A'_n \otimes B'_n$$

$$B'_n \xrightarrow{\Delta} B'_n \otimes B'_n \xrightarrow{1 \otimes \pi} B'_n \otimes A'_n$$

(où Δ désigne l'application diagonale et π la projection naturelle) se déduisent l'une de l'autre par l'application $a' \otimes b' \longrightarrow b' \otimes a'$. Puisque las applications précédentes sont multiplicatives, il suffit de vérifier cela quand on part d'un générateur ξ_i de B'_n. Si $i < n$, ξ_i est envoyé respectivement dans $1 \otimes \xi_i$ et $\xi_i \otimes 1$; si $i = n$, ξ_n est envoyé dans $\xi_n \otimes 1 + 1 \otimes \xi_n$. La vérification est ainsi faite ; elle ne dépend que du fait que B'_n est engendré par B'_{n-1} et par un élément ξ_n tel que $\delta \xi_n \in I(B'_{n-1}) \otimes I(B'_{n-1})$.

Ainsi il existe une suite spectrale d'algèbres différentielles qui aboutit à l'algèbre $H^*(B_n)$, et dont le terme E_2 est

$$E_2(B_n) = H^*(A_n) \otimes H^*(B_{n-1}) \quad .$$

On va être amené à étudier de près ces suites spectrales.

On va d'abord déterminer l'algèbre $H^*(A_n)$.

PROPOSITION 5. - <u>Soit, pour</u> $i = 0, 1, \ldots, \zeta_i(n)$ <u>l'élément de</u> $H^1(A_n)$, <u>classe du cocycle</u> $(\xi_n)^{2^i}$. <u>Alors l'algèbre</u> $H^*(A_n)$ <u>s'identifie à l'algèbre des polynômes en</u> $\zeta_0(n), \zeta_1(n), \ldots, \zeta_i(n), \ldots$ (On notera que le degré propre de $\zeta_i(n)$ est $2^i(2^n - 1)$).

DÉMONSTRATION. - Les $(\xi_n)^k$ forment une Z_2-base de A'_n ; soit (u_k) la base duale de A_n . L'application diagonale de A'_n montre que la multiplication, dans A_n , est donnée par

$$u_k . u_h = (k , h)\, u_{k+h} ,$$

où (k , h) désigne, comme d'habitude, le coefficient binomial. Il est classique que A_n , comme algèbre, est le produit tensoriel des algèbres extérieures ayant respectivement pour générateurs les éléments u_{2^i} $(i = 0, 1, \ldots)$. Donc (exposé 15, proposition 5) $H^*(A_n)$ s'identifie au produit tensoriel des algèbres de cohomologie de chacune de ces algèbres extérieures. L'algèbre de cohomologie de l'algèbre extérieure engendrée par u_{2^i} est l'algèbre tensorielle de l'espace vectoriel ayant pour base l'élément $(\xi_n)^{2^i}$, donc s'identifie à l'algèbre des polynômes engendrée par un élément dont le degré propre est celui de $(\xi_n)^{2^i}$. Par produit tensoriel, on obtient la proposition à démontrer.

En particulier, $H^*(A_1) = H^*(B_1)$ est l'algèbre des polynômes en $\zeta_0(1), \ldots, \zeta_i(1), \ldots$ Comme les $(\xi_1)^{2^i}$ sont des cocycles, ils ont des images dans toutes les algèbres $H^*(B_n)$, ainsi que dans $H^*(S^*)$. On a déjà noté h_i l'image de $\zeta_i(1)$ dans $H^*(S^*)$; <u>on notera désormais</u> $h_i(n)$ <u>l'image de</u> $\zeta_i(1)$ <u>dans</u> $H^*(B_n)$.

Pour chaque n , les $h_i(n)$ sont linéairement indépendants dans $H^1(B_n)$. En effet, c'est vrai pour $n = 1$. Et le noyau de $H^1(B_{n-1}) \to H^1(B_n)$ est nul, puisque $E_\infty^{1,0}(B_n) = E_2^{1,0}(B_n)$ (les différentielles de la suite spectrale étant nulles pour des raisons de degré). On verra tout à l'heure que $E_\infty^{0,1}(B_n) = 0$ pour $n \geqslant 2$, ce qui entraînera donc que les $h_i(n)$ forment une base de $H^1(B_n)$ pour tout n .

Considérons l'application $d_2 : E_2^{o,1}(B_n) \longrightarrow E_2^{2,o}(B_n)$, qui s'identifie à une application $H^1(A_n) \to H^2(B_{n-1})$. On notera $g_i(n-1)$ l'élément de $H^2(B_{n-1})$, image de $\zeta_i(n)$ par cette application. (Ceci vaut pour $n \geq 2$). La relation (3') montre que

$$g_i(1) = h_i(1)\, h_{i+1}(1) \qquad . \tag{7}$$

Les éléments $g_i(n)$ sont tous $\neq 0$ pour $n \geq 1$, et ils sont même linéairement indépendants. Pour $n = 1$, cela résulte de la relation (7), puisque $H^*(B_1)$ est l'algèbre des polynômes par rapport aux $h_i(1)$. Supposons $n \geq 2$; la relation (I) montre que $g_i(n)$ est de filtration 1, et que son image dans $E_{\infty}^{1,1}(B_n) \subset E_2^{1,1}(B_n)$ est

$$\zeta_i(n)\, h_{n+i}(n-1) + \zeta_{i+1}(n)\, h_i(n-1) \in H^1(A_n) \otimes H^1(B_{n-1}) \qquad . \tag{8}$$

Ces éléments sont évidemment linéairement indépendants dans $E_2^{1,1}(B_n)$; ils le ~~sont~~ donc a fortiori dans $H^2(B_n)$.

Ainsi, pour $n \geq 2$, $d_2 : E_2^{o,1}(B_n) \longrightarrow E_2^{2,o}(B_n)$ envoie les éléments $\zeta_i(n)$ d'une base de $E_2^{o,1}(B_n)$ sur des éléments linéairement indépendants de $E_2^{2,o}(B_n)$. Donc d_2 a un noyau nul, et par suite $E_{\infty}^{o,1}(B_n) = 0$ pour $n \geq 2$, comme annoncé.

PROPOSITION 6. - Pour $n \geq 2$, le noyau de $H^2(B_1) \longrightarrow H^2(B_n)$ est le sous-espace ayant pour base les $h_i(1)\, h_{i+1}(1)$.

DÉMONSTRATION. - Commençons par le cas où $n = 2$. Alors $H^2(B_1) = E_2^{2,o}(B_2)$, et le noyau est l'image de $d_2 : E_2^{o,1}(B_2) \longrightarrow E_2^{2,o}(B_2)$, c'est-à-dire de l'application $H^1(A_2) \longrightarrow H^2(B_1)$ qui envoie $\zeta_i(2)$ en $g_i(1) = h_i(1)\, h_{i+1}(1)$ (relation (7)). Supposons maintenant $n \geq 3$, et montrons que le noyau de $H^2(B_{n-1}) \longrightarrow H^2(B_n)$ ne rencontre qu'en 0 l'image de $H^2(B_1) \longrightarrow H^2(B_{n-1})$. En effet, cette image est dans $E_{\infty}^{2,o}(B_{n-1})$, tandis que le noyau de $H^2(B_{n-1}) \longrightarrow H^2(B_n)$ est l'image de $d_2 : H^1(A_n) \longrightarrow H^2(B_{n-1})$, donc est engendré par les $g_i(n-1)$; et on a vu que les images des $g_i(n-1)$ dans $E_{\infty}^{1,1}(B_{n-1})$ sont linéairement indépendantes. La proposition est démontrée.

PROPOSITION 7. - Pour $n \geq 2$, les images des $g_i(n)$ dans $E_{\infty}^{1,1}(B_n)$ forment une base de cet espace vectoriel.

DÉMONSTRATION. - $E_{\infty}^{1,1}(B_n)$ est le noyau de $d_2 : H^1(A_n) \otimes H^1(B_{n-1}) \longrightarrow H^3(B_{n-1})$. Or on a

(9) $$d_2(\zeta_i(n)\ h_j(n-1)) = g_i(n-1)\ h_j(n-1) \quad .$$

On est donc amené à chercher les <u>relations linéaires existant entre les</u> $g_i(n-1)\ h_j(n-1)$ <u>dans</u> $H^3(B_{n-1})$, pour $n \geqslant 2$. On sait déjà que les d_2 des images des $g_i(n)$, données par l'expression (8), sont nulles, ce qui donne les relations

(10) $$g_i(n-1)\ h_{n+i}(n-1) + g_{i+1}(n-1)\ h_i(n-1) = 0 \quad .$$

Il s'agit de montrer qu'on obtient ainsi toutes les relations. Tout revient donc à vérifier que <u>les</u>

$$z_{i,j} = g_i(n-1)\ h_j(n-1) \in H^3(B_{n-1})$$

<u>relatifs aux couples</u> $(i\ ,\ j)$ <u>tels que</u> $i \neq j+1$ <u>sont linéairement indépendants.</u>

On va examiner successivement le cas $n = 2$, le cas $n = 3$, et le cas $n \geqslant 4$. Pour $n = 2$, on a, d'après (7),

$$z_{i,j} = h_i(1)\ h_{i+1}(1)\ h_j(1)$$

et on voit facilement que tous ces monômes, pour $i \neq j+1$, sont distincts.

Supposons $n \geqslant 3$. Dans $H^3(B_{n-1})$, $g_i(n-1)$ est, on l'a vu, de filtration 1 , donc $z_{i,j}$ est de filtration 2 . Cherchons l'image de $z_{i,j}$ dans $E_{\infty}^{2,1}(B_{n-1})$, qui est le quotient d'un sous-espace de

$$E_2^{2,1}(B_{n-1}) = H^1(A_{n-1}) \otimes H^2(B_{n-2})$$

par l'image de $d_2 : H^2(A_{n-1}) \longrightarrow H^1(A_{n-1}) \otimes H^2(B_{n-2})$. Cette image est engendrée par les éléments

$$v_{k,m} = \zeta_k(n-1)\ g_m(n-2) + \zeta_m(n-1)\ g_k(n-2) \quad ,$$

tandis que $z_{i,j}$ a pour image la classe de

$$u_{i,j} = \zeta_i(n-1)\ h_{n-1+i}(n-2)\ h_j(n-2) + \\ + \zeta_{i+1}(n-1)\ h_i(n-2)\ h_j(n-2) \quad .$$

Envisageons d'abord le cas $n = 3$. On cherche les combinaisons linéaires des

$$u_{i,j} = \zeta_i(2)\ h_{i+2}(1)\ h_j(1) + \zeta_{i+1}(2)\ h_i(1)\ h_j(2)\ ,\quad i \neq j+1 \quad ,$$

qui appartiennent au sous-espace engendré par les

$$v_{k,m} = \zeta_k(2)\ h_m(1)\ h_{m+1}(1) + \zeta_m(2)\ h_k(1)\ h_{k+1}(1) \quad .$$

Or il y en a : on a en effet $u_{i,i+1} = v_{i,i+1}$. Montrons qu'il n'y en a pas d'autre ; autrement dit, aucune combinaison linéaire non nulle des $u_{i,j}$ tels que $i \neq j+1$ et $j \neq i+1$ n'est combinaison des $v_{k,m}$. Ceci est laissé au lecteur à titre d'exercice. Il reste alors à montrer que les $z_{i,i+1} \in H^3(B_2)$, bien que leurs images dans $E_{\infty}^{2,1}(B_2)$ soient nulles, sont linéairement indépendants. Ce sont des éléments de filtration 3 de $H^3(B_n)$; ils sont donc dans

$$E_{\infty}^{3,0}(B_2) = \operatorname{Coker} d_2 : H^1(A_2) \otimes H^1(B_1) \longrightarrow H^3(B_1) \quad .$$

Or $z_{i,i+1} = d_2(\zeta_i(3)\ h_{i+1}(2)) \in H^3(B_2)$; la relation (5') montre que l'élément $d_2(\zeta_0(3)\ h_1(2))$ est dans la classe de $h_0(1)(h_2(1))^2$, et par suite l'élément $z_{i,i+1}$ est dans la classe de $h_i(1)(h_{i+2}(1))^2$. Les classes de ces éléments sont linéairement indépendantes, car on fait le quotient par le sous-espace engendré par les $h_i(1)\ h_{i+1}(1)\ h_j(1)$.

Il reste enfin à examiner le cas où $n \geqslant 4$. Dans ce cas, le sous-espace engendré par les $v_{k,m}$ ne rencontre qu'en 0 celui engendré par les $u_{i,j}$. Il suffit ~~donc~~ de vérifier que les $u_{i,j}$ relatifs aux couples $(i\ ,\ j)$ tels que $i \neq j+1$ sont des éléments linéairement indépendants de $H^1(A_{n-1}) \otimes H^2(B_{n-2})$, compte tenu du fait que les seules relations existant entre les produits $h_i(n-2)\ h_j(n-2)$ sont $h_i(n-2)\, h_{i+1}(n-2) = 0$. C'est un exercice laissé au lecteur.

La proposition 7 est ainsi démontrée.

PROPOSITION 8. - On a $E_{\infty}^{0,2}(B_n) = 0$ pour $n \geqslant 2$.

DÉMONSTRATION. - Cherchons d'abord $E_3^{0,2}(B_n)$, noyau de

$$d_2 : H^2(A_n) \longrightarrow H^1(A_n) \otimes H^2(B_{n-1}) \quad .$$

L'espace vectoriel $H^2(A_n)$ a pour base les $\zeta_i(n)\ \zeta_j(n)$ pour les couples $(i\ ,\ j)$ tels que $i \leqslant j$. On a

$$d_2(\zeta_i(n)\ \zeta_j(n)) = \zeta_i(n)\ g_j(n-1) + \zeta_j(n)\ g_i(n-1) \quad .$$

Il est clair que ceci est nul pour $i = j$, et que les seconds membres, pour $i < j$, sont linéairement indépendants. Donc $E_3^{0,2}(B_n)$ a pour base les éléments $(\zeta_i(n))^2$. Il reste à calculer

$$d_3((\zeta_i(n))^2) \in E_3^{3,o}(B_n) = \text{Coker } d_2 : H^1(A_n) \otimes H^1(B_{n-1}) \longrightarrow H^3(B_{n-1}) \quad .$$

Considérons d'abord le cas où $n = 2$: la relation (4') montre que $d_3((\zeta_o(2))^2)$ est dans la classe de $h_2(1)(h_o(1))^2 + (h_1(1))^3$. Appliquant i fois l'endomorphisme F, on voit que l'on a :

(11) $d_3((\zeta_i(2))^2)$ est dans la classe de $h_{i+2}(1)(h_i(1))^2 + (h_{i+1}(1))^3$.

Or il s'agit de classes modulo le sous-espace engendré par les produits $h_i(1)\ h_{i+1}(1)\ h_j(1)$. Il est clair que les

$$h_{i+2}(h_i)^2 + (h_{i+1})^3$$

ont des classes linéairement indépendantes ; donc le noyau de d_3 est nul, et par suite $E_\infty^{o,2}(B_2) = 0$.

Supposons maintenant $n \geq 3$. Un calcul sans difficulté montre que

$$\delta\,[\,\xi_n \otimes \xi_n + \sum_{0<i<n} ((\xi_{n-i})^{2^i}\ \xi_n) \otimes \xi_i + (\xi_{n-i})^{2^i} \otimes (\xi_i\ \xi_n)]$$

ne contient pas ξ_n, et que si on le regarde comme un élément de l'algèbre tensorielle de $I(B'_{n-1})$, il est de filtration 1 ; si on néglige les termes de filtration 2, il reste seulement

$$(\xi_1)^{2^n} \otimes \xi_{n-1} \otimes \xi_{n-1} + (\xi_{n-1})^2 \otimes (\xi_{n-1})^2 \otimes (\xi_1)^2 \quad .$$

Ceci veut dire que $d_3((\zeta_i(n))^2) \in H^3(B_{n-1})$ a pour image, dans

$E_\infty^{1,2}(B_{n-1}) \subset E_2^{1,2}(B_{n-1}) = H^2(A_{n-1}) \otimes H^1(B_{n-2})$, l'élément

$$(\zeta_i(n-1))^2\ h_{n+i}(n-2) + (\zeta_{i+1}(n-1))^2\ h_{i+1}(n-2) \quad .$$

Lorsque i varie, ces éléments sont linéairement indépendants ; donc d_3 a un noyau nul, et $E_\infty^{o,2}(B_n)$ est nul.

C.Q.F.D.

On a donc, pour tout $n \geq 2$, une suite exacte

(12) $$0 \longrightarrow E_\infty^{2,o}(B_n) \longrightarrow H^2(B_n) \longrightarrow E_\infty^{1,1}(B_n) \longrightarrow 0 \quad ,$$

et par suite (proposition 7) $H^2(B_n)$ <u>est somme directe du sous-espace</u> $E_\infty^{2,o}(B_n)$ <u>et du sous-espace ayant pour base les</u> $g_i(n)$. Or $E_\infty^{2,o}(B_{n+1})$ est quotient de

$H^2(B_n)$ par le sous-espace engendré par les $g_i(n)$. Donc $E_\infty^{2,0}(B_{n+1})$ s'identifie canoniquement à $E_\infty^{2,0}(B_n)$ pour $n \geq 2$. On sait déjà que $E_\infty^{2,0}(B_2)$ est le quotient de $H^2(B_1)$ par le sous-espace engendré par les $h_i(1)\ h_{i+1}(1)$ (cf. proposition 6). Il en résulte que $H^2(S^*)$, qui est limite des $H^2(B_n)$, est limite des $H_\infty^{2,0}(B_n)$, donc s'identifie au quotient de $H^2(B_1)$ par le sous-espace engendré par les $h_i(1)\ h_{i+1}(1)$.

Pour achever la démonstration du théorème 2, il reste à déterminer le noyau de $H^3(B_1) \longrightarrow H^3(B_n)$. Commençons par le cas où $n = 2$.

PROPOSITION 9. - <u>Le noyau de</u> $H^3(B_1) \longrightarrow H^3(B_2)$ <u>est engendré par les éléments suivants</u>

$$h_i\ h_{i+1}\ h_j \quad , \quad (h_i)^2\ h_{i+2} + (h_{i+1})^3$$

(on a écrit, pour abréger, h_i au lieu de $h_i(1)$) .

DÉMONSTRATION. - Le quotient de $H^3(B_1)$ par le noyau cherché est $E_\infty^{3,0}(B_2)$. Calculons d'abord

$$E_3^{3,0}(B_2) = \mathrm{Coker}\ d_2 : H^1(A_2) \otimes H^1(B_1) \longrightarrow H^3(B_1) \quad .$$

Le calcul a déjà été fait : on divise $H^3(B_1)$ par le sous-espace engendré par les $h_i\ h_{i+1}\ h_j$. Ensuite on a

$$E_\infty^{3,0}(B_2) = \mathrm{Coker}\ d_3 : E_3^{0,2}(B_2) \longrightarrow E_3^{3,0}(B_2) \quad .$$

Or le calcul a déjà été fait : $E_3^{0,2}(B_2)$ a pour base les $(\zeta_i(2))^2$; la relation (11) montre qu'on doit faire le quotient de $E_3^{3,0}(B_2)$ par les classes des éléments $(h_i)^2\ h_{i+2} + (h_{i+1})^3$, ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 10. - <u>Le noyau de</u> $H^3(B_2) \longrightarrow H^3(B_3)$ <u>rencontre l'image de</u> $H^3(B_1) \longrightarrow H^3(B_2)$ <u>suivant le sous-espace ayant pour base les éléments suivants</u> :

$$h_i(2)(h_{i+2}(2))^2 \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Pour avoir le quotient de $H^3(B_2)$ par ce noyau, on doit d'abord prendre le conoyau de $d_2 : H^1(A_3) \otimes H^1(B_2) \longrightarrow H^3(B_2)$; ceci revient à prendre le quotient de $H^3(B_2)$ par le sous-espace L engendré par les produits $g_i(2)\ h_j(2)$.

On doit chercher l'intersection de ce sous-espace avec l'image de $H^3(B_1)$; cette image est contenue dans le noyau de $L \to E_\infty^{2,1}(B_2)$, et on a déjà vu (démonstration de la proposition 7) que les combinaisons linéaires des $g_i(2)\, h_j(2)$ dont l'image dans $E_\infty^{2,1}(B_2)$ est nulle sont combinaisons des suivantes :

1° Les $g_i(2)\, h_{i+3}(2) + g_{i+1}(2)\, h_i(2)$, qui sont des éléments nuls de $H^3(B_2)$;

2° Les $g_i(2)\, h_{i+1}(2)$, qui sont dans la classe de $h_i(1)(h_{i+2}(1))^2$; autrement dit,

(13) $$g_i(2)\, h_{i+1}(2) = h_i(2)(h_{i+2}(2))^2 \quad .$$

Ayant ainsi déterminé l'intersection de $E_3^{3,0}(B_3)$ avec l'image de $H^3(B_2)$, il reste à passer à $E_\infty^{3,0}(B_3)$, conoyau de

$$d_3 : E_3^{0,2}(B_3) \to E_3^{3,0}(B_3) \quad .$$

L'image de d_3 est engendrée, on l'a vu (démonstration de la proposition 8) par les $d_3((\zeta_i(3))^2) \in H^3(B_2)$, dont les images dans $E_\infty^{1,2}(B_2)$ sont linéairement indépendantes. Donc seule la combinaison nulle se trouve dans $E_\infty^{3,0}(B_2)$, et par suite l'image de $H^3(B_2)$ dans $E_3^{3,0}(B_3)$ s'envoie injectivement dans $E_\infty^{3,0}(B_3)$. La proposition en résulte.

PROPOSITION 11. - Pour $n \geq 3$, le noyau de $H^3(B_n) \to H^3(B_{n+1})$ rencontre l'image de $H^3(B_1)$ suivant 0 .

DÉMONSTRATION. - On doit d'abord faire le quotient de $H^3(B_n)$ par l'image de $d_2 : H^1(A_{n+1}) \otimes H^1(B_n) \to H^3(B_n)$, qui est engendrée par les produits $g_i(n)\, h_j(n)$. On a vu que les combinaisons linéaires de ces produits dont l'image dans $E_\infty^{2,1}(B_n)$ est nulle sont nulles ; par suite l'image de d_2 ne rencontre l'image de $H^3(B_1) \to H^3(B_n)$ que suivant 0 . Ensuite, on considère l'image de

$$d_3 : E_3^{0,2}(B_{n+1}) \to E_3^{3,0}(B_{n+1}) \quad ;$$

comme plus haut, cette image s'envoie injectivement dans $E_\infty^{1,2}(B_n)$, donc ne rencontre que suivant 0 l'image de $H^3(B_1)$ dans $E_\infty^{3,0}(B_{n+1})$. La proposition 11 en résulte.

Il est clair maintenant que le théorème 2 est complètement démontré.

REMARQUE FINALE. - Considérons l'élément

$$u = \zeta_0(3)(h_1(2))^2 \in H^1(A_3) \otimes H^2(B_2) = E_2^{2,1}(B_3) \quad .$$

On a $d_2 u = g_o(2)(h_1(2))^2$,
qui est nul en vertu de (13), puisque $h_o(2)\ h_1(2) = 0$. Ainsi u définit un élément de $E_\infty^{2,1}(B_3)$; cet élément n'est pas nul, car u n'est pas dans l'image de

$$d_2 : E_2^{o,2}(B_3) \longrightarrow H_2^{2,1}(B_3) \qquad ;$$

en effet, le degré propre de u est 11, et $E_2^{o,2}(B_3) = H^2(A_3)$ n'a que des éléments dont le degré propre est un multiple de 7 . Soit $v \in E_\infty^{2,1}(B_3)$ l'élément $\neq 0$ défini par u . Il existe dans $H^3(B_2)$ un élément a de filtration 2 , ayant v pour image dans $E_\infty^{2,1}(B_3)$, et a est unique à l'addition près d'un élément de $E_\infty^{3,o}(B_3)$, de degré propre 11. Un calcul facile montre que $H^3(B_2)$ contient un seul élément $\neq 0$ de degré propre 11, à savoir $g_o(2)\ h_2(2)$. Sa classe dans $E_\infty^{3,o}(B_3)$ est nulle, car

$$g_o(2)\ h_2(2) = d_2(\zeta_o(3)\ h_2(2)) \qquad .$$

Ainsi $E_\infty^{3,o}(B_3)$ est nul en degré propre 11 ; d'où il résulte finalement que a est défini de manière unique par v .

Montrons que l'image de a dans chacun des $H^3(B_n)$, pour $n \geq 4$, est $\neq 0$. Commençons par $n = 4$; l'image de

$$d_2 : E_2^{1,1}(B_4) \longrightarrow E_2^{3,o}(B_4) = H^3(B_3)$$

ne contient pas a , pour des raisons de degré : en effet, a est de degré propre 11, tandis que les termes de plus bas degré propre dans $H^1(A_4) \otimes H^1(B_3)$ sont de degré propre 16. De même, les termes de plus bas degré propre dans $E_3^{o,2}(B_4)$ ont un degré propre $\geqslant 30$, donc a n'est pas dans l'image de d_3 . Ainsi l'image de a dans $E_\infty^{3,o}(B_4)$ est $\neq 0$; donc l'image de a dans $H^3(B_4)$ est $\neq 0$. Quand on passe à $H^3(B_5)$, etc. , les choses vont encore mieux, car les degrés propres possibles deviennent de plus en plus grands.

En résumé, a définit un élément $\neq 0$ de $H^3(S^*)$. Cet élément n'est pas dans l'image de $H^3(B_1)$, qui ne contient en effet aucun élément de degré propre 11. D'autre part, le cocycle (6) défini à la fin du paragraphe 3 a pour image dans $H^3(B_3)$ un élément qui jouit des mêmes propriétés que a . C'est donc a , et il en résulte que ce cocycle n'est pas homologue à 0 .

APPENDICE

PROPOSITION. - Soit A une sous-algèbre de Hopf d'une algèbre de Hopf C , et soit $B = C/C.I(A)$. Soit $\rho : B \to C$ une application K-linéaire qui conserve les degrés et relève la projection $\pi : C \to B$ (autrement dit, $\pi \circ \rho$ = identité). Soit $f : B \otimes A \to C$ l'application définie par $f(b \otimes a) = \rho(b).a$. Si la multiplication de C est associative, f est un isomorphisme de A-modules à droite, la structure de A-module de $B \otimes A$ étant définie par $(b \otimes a).a' = b \otimes (aa')$.

DÉMONSTRATION. - Le fait que f soit A-linéaire résulte évidemment de l'associativité de la multiplication. Il reste à prouver que f est à la fois surjective et injective. Pour la surjectivité, il est trivial que $C_o \approx K$ est dans l'image de f ; montrons, par récurrence sur p, que C_p est dans l'image de f. Soit $p > 0$; tout élément de C_p est congru à un élément de $\rho(B_p)$ modulo $C.I(A)$, donc (pour des raisons de degré) modulo $(\sum_{q<p} C_q).I(A)$, c'est-à-dire (par l'hypothèse de récurrence) modulo $g(B \otimes A).I(A) \subset g(B \otimes A)$. La surjectivité de f est ainsi démontrée sans faire usage de la structure d'algèbre de Hopf.

Elle va intervenir pour prouver que f est injective. Considérons l'application $g : C \to B \otimes C$, composée de l'application diagonale $\Delta : C \to C \otimes C$ et de $C \otimes C \xrightarrow{\pi \otimes 1} B \otimes C$; elle est A-linéaire pour les structures de A-module à droite (celle de $B \otimes C$ étant définie par le facteur C à droite du signe $\otimes$) : en effet

$$g(c.a) = (\pi \otimes 1)\,\Delta\,(c.a) = (\pi \otimes 1)((\Delta c).(\Delta a)) = (\pi \otimes 1)((\Delta c).(1 \otimes a)) = g(c).a \;.$$

On va montrer que l'application $h = g \circ f : B \otimes A \to B \otimes C$ est injective, d'où il résultera bien que f est injective. Puisque h conserve le degré, h envoie B_p dans $B^p \otimes C$, en notant $B^p = \sum_{q \leq p} B_q$. Puisque h est A-linéaire, h envoie $B_p \otimes A$ dans $B^p \otimes C$. Si on compose avec la projection naturelle $B^p \otimes C \to B_p \otimes C$, on obtient une application A-linéaire $h_p : B_p \otimes A \to B_p \otimes C$, qui envoie évidemment $b \otimes 1$ dans $b \otimes 1$; donc

$$h_p = 1 \otimes i \quad ,$$

i désignant l'injection $A \to C$. Soit $h^p : B^p \otimes A \to B^p \otimes C$ l'application induite par h. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B^{p-1} \otimes A \arrow[r] \arrow[d, "h^{p-1}"] & B^p \otimes A \arrow[r] \arrow[d, "h^p"] & B_p \otimes A \arrow[r] \arrow[d, "h_p"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B^{p-1} \otimes C \arrow[r] & B^p \otimes C \arrow[r] & B_p \otimes C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes. Puisque h_p est injective, il montre que si h^{p-1} est injective, h^p l'est. Comme h^o est trivialement injective, les h^p sont toutes injectives, et par suite h est injective. Ceci achève la démonstration.

COROLLAIRE. - Si on suppose en outre que A est une sous-algèbre normale $(I(A).C \subset C.I(A))$; on a $I(A).C = C.I(A)$. Autrement dit, si l'idéal à gauche engendré par $I(A)$ est bilatère, c'est aussi l'idéal à droite engendré par $I(A)$.

DÉMONSTRATION. - Il suffit de prouver que les espaces vectoriels gradués $C/I(A).C = B'$ et $C/C.I(A) = B$ ont même dimension en chaque degré (cette dimension est finie, par hypothèse). Or, d'après la proposition, on a des isomorphismes d'espaces vectoriels gradués $B \otimes A \approx C \approx A \otimes B'$, ce qui permet de montrer $\dim B_p = \dim B'_p$ par récurrence sur p .

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADAMS (J. F.). - On the structure and applications of the Steenrod algebra. Comment. Math. Helvet., t. 32, 1958, p. 180-214. Voir paragraphe 6.

[2] ADAMS (J. F.). - Non-existence of elements of Hopf-invariant one. - Princeton, 1958, multigraphié. Voir : p. 24-43.

[3] CARTAN and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956.

[4] MILNOR (J. W.) and MOORE (J. C.). - On the structure of Hopf algebras. - Princeton, 1959, multigraphié. Voir : theorem 2.5, p. 13.