HENRI CARTAN

Homologie et cohomologie d'une algèbre graduée

Séminaire Henri Cartan, tome 11, n° 2 (1958-1959), exp. n° 15, p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_2_A6_0>

HOMOLOGIE ET COHOMOLOGIE D'UNE ALGÈBRE GRADUÉE

par Henri CARTAN

Les notions générales étudiées dans cet exposé seront appliquées dans le suivant à l'algèbre de Steenrod.

1. Modules gradués sur une algèbre graduée.

Soit K un corps (commutatif). On considère une K-algèbre associative A, ayant un élément unité noté 1 ; on suppose A graduée, l'espace vectoriel des éléments de degré n étant noté A^n, et on suppose $A^n = 0$ pour $n < 0$. Le produit d'un élément de A^n et d'un élément de A^m appartient à A^{n+m}, et 1 est de degré 0.

Une telle algèbre A étant donnée, on considère la catégorie des A-modules gradués (à gauche, resp. à droite). Un objet M de la catégorie des A-modules à gauche gradués est un A-module unitaire M, qui est gradué comme ~~espace vecto-~~ riel sur K, et est tel que

$$a.x \in M^{n+q} \quad \text{chaque fois que} \quad a \in A^n \quad \text{et} \quad x \in M^q .$$

On ne suppose pas que $M^q = 0$ pour $q < 0$; si toutefois il en est ainsi, on dit que la graduation de M est ≥ 0 ; si $M^q = 0$ pour $q > 0$, on dit que la graduation de M est ≤ 0, et on écrit alors souvent M_q au lieu de M^{-q}. Les morphismes de la catégorie sont les applications A-linéaires $M \longrightarrow M'$ de degré 0, c'est-à-dire qui envoient M^q dans M'^q. Il est clair qu'on a ainsi une catégorie abélienne. On note $\operatorname{Hom}_A(M , M')$ le groupe abélien des morphismes $M \longrightarrow M'$.

Soit M un tel A-module à gauche ; le dual-gradué est le A-module à droite M' défini comme suit : $M'^q = \operatorname{Hom}_K(M^{-q} , K)$; un élément x' de M' (somme directe des M'^q) définit sur M une forme linéaire $x \longrightarrow \langle x' , x \rangle$, par la condition que $\langle x' , x \rangle = 0$ si x et x' sont homogènes de degrés distincts. La structure de A-module à droite de M' est définie par

$$\langle x'.a , x \rangle = \langle x' , a.x \rangle \quad \text{pour} \quad a \in A , \quad x \in M , \quad x' \in M' .$$

Il est clair que si la graduation de M est ≥ 0, celle de M' est ≤ 0 ; dans ce cas, M'_q est le dual de M^q.

NOTATION. - On note $\mathrm{Hom}_K(M\ ,\ K)$ le dual-gradué de M .

PROPOSITION 1. - Le dual d'un A-module projectif est un A-module injectif.

DÉMONSTRATION. - Soit P un A-module (à gauche) gradué, qui soit projectif dans la catégorie ; ceci signifie que $\mathrm{Hom}_A(P\ ,\ X)$ est un foncteur exact en X (où X est un A-module à gauche gradué). On veut montrer que le A-module à droite gradué $\mathrm{Hom}_K(P\ ,\ K)$ est injectif dans la catégorie, c'est-à-dire que $\mathrm{Hom}_A(Y\ ,\ \mathrm{Hom}_K(P\ ,\ K))$ est un foncteur exact du A-module à droite gradué Y . Or ceci s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_A(P\ ,\ \mathrm{Hom}_K(Y\ ,\ K))$; $\mathrm{Hom}_K(Y\ ,\ K)$ est un foncteur exact de Y , parce que K est un corps, et comme $\mathrm{Hom}_A(P\ ,\ X)$ est un foncteur exact du A-module à gauche gradué X , la proposition est démontrée.

2. Homologie et cohomologie d'une algèbre graduée augmentée.

Soit toujours A une K-algèbre graduée, comme ci-dessus. Supposons en outre donné un homomorphisme $\varepsilon : A \longrightarrow K$ de K-algèbres graduées, tel que $\varepsilon(1) = 1$; A est alors une algèbre graduée "augmentée", ε étant l'augmentation. L'homomorphisme ε définit sur K une structure de A-module à gauche (gradué), et aussi une structure de A-module à droite. On notera $I(A)$ le noyau de ε .

Considérons par exemple K comme A-module à gauche. Soit M un A-module à droite, gradué, et soit N un A-module à gauche, gradué. On peut considérer

$$\mathrm{Tor}^A(M\ ,\ K) = \sum_{n \geq 0} \mathrm{Tor}_n^A(M\ ,\ K) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ext}_A(K\ ,\ N) = \sum_{n \geq 0} \mathrm{Ext}_A^n(K\ ,\ N) \quad .$$

On va rappeler brièvement leur définition, en précisant ici la structure de K-module gradué de chacun des $\mathrm{Tor}_n^A(M\ ,\ K)$ et de chacun des $\mathrm{Ext}_A^n(K\ ,\ N)$. Soit

$$\cdots \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_o \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

une suite exacte de A-modules à gauche gradués et d'homomorphismes de la catégorie (donc conservant le degré), et supposons que les X_n soient projectifs dans la catégorie ; c'est ce qu'on appelle une "résolution projective" dans la catégorie. Soit $H_n(M \otimes_A X)$ le quotient du noyau de $M \otimes_A X_n \longrightarrow M \otimes_A X_{n-1}$ par l'image de $M \otimes_A X_{n+1} \longrightarrow M \otimes_A X_n$; par définition,

$$\mathrm{Tor}_n^A(M\ ,\ K) = H_n(M \otimes_A X)$$

(on montre [1] que cela ne dépend pas du choix de la résolution projective X).

En fait, chacun des $M \otimes_A X_n$ est un K-espace vectoriel gradué, car c'est un quotient de $M \otimes_K X_n$ qu'on gradue en posant

$$(M \otimes_K X_n)^q = \sum_i M^{q-i} \otimes_K (X_n)^i \quad ,$$

et la graduation passe au quotient. De plus, les homomorphismes $M \otimes_A X_{n+1} \longrightarrow M \otimes_A X_n$ conservent le degré. Il s'ensuit que la graduation de $M \otimes_A X_n$ définit une graduation sur $H_n(M \otimes_A X) = \mathrm{Tor}_n^A(M , K)$. Rappelons que $\mathrm{Tor}_0^A(M , K)$ s'identifie à $M \otimes_A K = M/M.I(A)$.

Passons à $\mathrm{Ext}_A(K , N)$. Si N' et N sont des A-modules à gauche, gradués, considérons les applications $N' \longrightarrow N$ qui augmentent le degré de l'entier q et sont A-linéaires dans le sens suivant ; $f(ax) = (-1)^{qr}\, a.f(x)$ pour $\deg a = r$. Elles forment un espace vectoriel $\mathrm{Hom}_A^q(N' , N)$; la somme directe $\sum_q \mathrm{Hom}_A^q(N' , N)$ sera notée $\mathrm{Hom}_A^*(N' , N)$: c'est un K-espace vectoriel gradué, dont le sous-espace des éléments de degré 0 est précisément $\mathrm{Hom}_A(N' , N)$. Cela dit, reprenons une résolution projective X de K ; elle définit des applications K-linéaires conservant le degré :

$$\cdots \longleftarrow \mathrm{Hom}_A^*(X_{n+1} , N) \longleftarrow \mathrm{Hom}_A^*(X_n , N) \longleftarrow \mathrm{Hom}_A^*(X_{n-1} , N) \longleftarrow \cdots ,$$

ce qui permet de définir la cohomologie $H^n(\mathrm{Hom}_A^*(X , N))$. Par définition, on a

$$\mathrm{Ext}_A^n(K , N) = H^n(\mathrm{Hom}_A^*(X , N)) ,$$

espace vectoriel gradué qui ne dépend pas du choix de la résolution projective X. On a

$$\mathrm{Ext}_A^0(K , N) = \mathrm{Hom}_A^*(K , N) ,$$

qui s'identifie au sous-espace vectoriel (gradué) de N formé des éléments annulés par $I(A)$.

PROPOSITION 2. - <u>Soit</u> M <u>un</u> A-<u>module à droite, gradué, et soit</u> M' <u>son dual-gradué. Alors</u> $\mathrm{Ext}_A^n(K , M')$ <u>s'identifie au dual-gradué de</u> $\mathrm{Tor}_n^A(M , K)$.

DÉMONSTRATION. - Dans la correspondance bijective bien connue entre $\mathrm{Hom}_K(M \otimes_A X_n , K)$ et $\mathrm{Hom}_A(X_n , \mathrm{Hom}_K(M , K))$, les éléments de degré q du premier espace correspondent aux $f : X_n \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(M , K)$ qui envoient $(X_n)^k$ dans $\mathrm{Hom}_K(M^{-q-k} , K)$, c'est-à-dire aux éléments de $\mathrm{Hom}_A^q(X_n , \mathrm{Hom}_K(M , K))$. Donc le dual-gradué de $M \otimes_A X_n$ s'identifie à $\sum_q \mathrm{Hom}_A^q(X_n , M') = \mathrm{Hom}_A^*(X_n , M')$.

En passant à l'homologie, on voit que le dual-gradué de $H_n(M \otimes_A X)$ s'identifie à $H^n(\mathrm{Hom}_A^*(X , M'))$, ce qui établit la proposition.

Parmi les résolutions projectives de K , on utilise notamment la "résolution standard" (normalisée), que voici (cf. [1]). Notons toujours $I(A)$ le K-espace vectoriel gradué, noyau de $\varepsilon : A \to K$. Posons

$$S_n(A) = A \otimes I(A) \otimes \dots \otimes I(A) ,$$

les produits tensoriels étant pris sur K , et le nombre des facteurs $I(A)$ étant égal à n ; on gradue $S_n(A)$ de manière évidente, puisque tous les facteurs du produit tensoriel sont gradués. Observons que la graduation de $S_n(A)$ est $\geqslant 0$. Il est d'usage de noter

$a[a_1 , \dots , a_n]$ l'élément $a \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n$ de $S_n(A)$, avec $a \in A$, $a_i \in I(A)$ pour $1 \leq i \leq n$; on écrit simplement $[a_1 , \dots , a_n]$ lorsque $a = 1$. Pour $n \geqslant 1$, on définit une application A-linéaire $d : S_n(A) \to S_{n-1}(A)$ de degré 0 , en posant

$$(1) \qquad d[a_1,\dots,a_n] = a_1[a_2,\dots,a_n] + \sum_{1\leq r<n} (-1)^r [a_1,\dots,a_r a_{r+1},\dots,a_n] .$$

Il est bien connu qu'on obtient ainsi une résolution de K par des modules libres-gradués (i.e : ayant une base formée d'éléments homogènes) $S_n(A)$. L'acyclicité résulte de l'existence d'un opérateur d'homotopie s , K-linéaire. défini par

$$(2) \qquad s(a[a_1 , \dots , a_n]) = [\bar{a} , a_1 , \dots , a_n] ,$$

en notant $\bar{a}$ l'image de a dans $I(A)$ par la projection $A \to I(A)$ qui transforme a en $a - \varepsilon(a)$.

Calculons en particulier $\mathrm{Tor}^A(K , K)$ et $\mathrm{Ext}_A(K , K)$. On a

$$\mathrm{Tor}_n^A(K , K) = H_n(K \otimes_A S(A)) ;$$

or $K \otimes_A S_n(A)$ s'identifie à $I(A) \otimes_K \dots \otimes_K I(A)$ (n facteurs), et l'opérateur différentiel est défini par

$$(3) \qquad d[a_1 , \dots , a_n] = \sum_{1\leq r<n} (-1)^r [a_1 , \dots , a_r a_{r+1} , \dots , a_n]$$

(d est nul sur $I(A)$) . On écrira aussi $H_*(A)$ au lieu de $\mathrm{Tor}^A(K , K)$, et $H_n(A)$ au lieu de $\mathrm{Tor}_n^A(K , K)$. Chaque $H_n(A)$ est un espace vectoriel gradué, à graduation $\geqslant 0$. On a

$$H_0(A) = K \otimes_A K \approx K ,$$

et $H_1(A)$ <u>est le conoyau de l'application</u> $I(A) \otimes I(A) \longrightarrow I(A)$ définie par la multiplication de l'algèbre A ; c'est donc $I(A)/(I(A))^2$, quotient de $I(A)$ par le sous-espace des éléments "décomposables" (cf. exposé 12, paragraphe 1). Enfin, on va interpréter $H_2(A)$: considérons d'abord le conoyau de

$$d : I(A) \otimes I(A) \otimes I(A) \longrightarrow I(A) \otimes I(A) \quad ;$$

c'est le quotient de $I(A) \otimes I(A)$ par le sous-espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $(a_1\, a_2) \otimes a_3 - a_1 \otimes (a_2\, a_3)$; il s'identifie donc à $I(A) \otimes_A I(A)$, et $H_2(A)$ est canoniquement isomorphe au noyau de l'application

$$I(A) \otimes_A I(A) \longrightarrow I(A)$$

définie par la multiplication de l'algèbre A .

Passons au calcul de $\mathrm{Ext}_A(K , K)$, qu'on notera aussi $H^*(A)$, en notant $H^n(A)$ l'espace vectoriel gradué $\mathrm{Ext}_A^n(K , K)$. On a

$$\mathrm{Ext}_A^n(K , K) = H^n(\mathrm{Hom}_A^*(S(A) , K)) \quad ;$$

or $\mathrm{Hom}_A^*(S_n(A) , K)$ s'identifie au <u>dual-gradué</u> de $I(A) \otimes \ldots \otimes I(A)$ (n facteurs). On explicitera cela dans le cas où chaque espace vectoriel A^q est de dimension finie (voir ci-dessous, paragraphe 4). Dans tous les cas, $H^n(A)$ <u>s'identifie au dual-gradué de</u> $H_n(A)$, en vertu de la proposition 2. La graduation de $H^n(A)$ est ≤ 0 ; on notera $H^{n,t}(A)$ le sous-espace des éléments de degré t de $H^n(A)$; c'est donc 0 si $t > 0$. Enfin, on a

$$H^0(A) = \mathrm{Hom}_A(K , K) \approx K \ .$$

3. <u>Structure multiplicative de</u> $H^*(A)$.

On pourrait, plus généralement, pour deux A-modules à gauche gradués N et N' , définir $\mathrm{Ext}_A^n(N , N')$. Etant donnés trois A-modules N , N' , N'' , YONEDA [3] définit une application K-linéaire

$$\mathrm{Ext}_A^n(N , N') \otimes_K \mathrm{Ext}_A^{n'}(N' , N'') \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^{n+n'}(N , N'')$$

qui a un caractère "associatif" en un sens évident. Si on applique ceci au cas où N , N' et N'' sont tous trois égaux à K , on trouve sur $\mathrm{Ext}_A(K , K) = H^*(A)$ une structure d'<u>algèbre associative graduée</u>, dont l'élément unité est l'élément de $H^0(A) = K$ qui s'identifie à l'élément unité de K .

Explicitons, dans ce cas particulier, la définition de Yoneda. Un élément $c \in H^q(A)$ est défini par une application A-linéaire

$$f \ : \ X_q \longrightarrow K$$

qui est un "cocycle", c'est-à-dire telle que l'application composée $X_{q+1} \xrightarrow{d} X_q \xrightarrow{f} K$ soit nulle ; à ce cocycle on peut ajouter un "cobord" arbitraire, c'est-à-dire une application composée $X_q \xrightarrow{d} X_{q-1} \xrightarrow{g} K$, où g est une application A-linéaire arbitraire. D'après un théorème classique, il existe, f étant donnée, un diagramme commutatif d'applications A-linéaires (au sens gradué)

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & X_{n+q} & \xrightarrow{d} & X_{n-1+q} & \longrightarrow \cdots \xrightarrow{d} & X_q & \xrightarrow{f} & K \\
& \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_o & & \downarrow \mathrm{id.} \\
\cdots \longrightarrow & X_n & \xrightarrow{d} & X_{n-1} & \longrightarrow \cdots \xrightarrow{d} & X_o & \longrightarrow & K
\end{array}$$

et deux collections (f_n) relatives à la même f sont "homotopes" ; mieux : deux collections (f_n) et (f'_n) relatives à deux cocycles f et f' homologues, sont homotopes. Alors les f_n définissent une application de $H^*(\mathrm{Hom}_A^*(X , K))$ dans lui-même, qui augmente le degré de q , et ne dépend que de $c \in H^q(A)$. Cette application $H^n(A) \longrightarrow H^{n+q}(A)$ ne dépend d'ailleurs pas du choix de la résolution X ; par définition, l'image de $u \in H^n(A)$ par cette application est le produit $u.c$ (noté aussi uc). Telle est la structure multiplicative de l'algèbre $H^*(A)$; elle est évidemment associative.

On voit facilement que si $c \in H^{q,t}(A)$, c'est-à-dire est un élément homogène de degré t de $H^q(A)$, alors la multiplication $u \longrightarrow cu$ envoie $H^{n,t'}(A)$ dans $H^{n+q,t'+t}(A)$.

REMARQUE. - On vient, en réalité, de montrer que $\mathrm{Ext}_A(K , N)$ est un module à droite sur l'algèbre $\mathrm{Ext}_A(K , K)$.

4. Cas où l'algèbre graduée A est localement finie.

On suppose désormais que A est localement finie, c'est-à-dire que chaque A^n est un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit A_* le dual-gradué de A ; on a donc $A_n = \mathrm{Hom}_K(A^n , K)$. Alors A s'identifie au dual-gradué de A_* . Identifions $A_* \otimes A_*$ au dual-gradué de $A \otimes A$, par la même convention que dans l'exposé 10 :

$$\langle x' \otimes y' , x \otimes y \rangle = (-1)^{qr} \langle x' , x \rangle . \langle y' , y \rangle \quad ,$$

avec $q = \deg(y')$, $r = \deg(x)$. Alors la transposée de la multiplication $A \otimes A \longrightarrow A$ définit une application diagonale $A_* \longrightarrow A_* \otimes A_*$, qui fait de A_*

une coalgèbre associative. L'augmentation $\varepsilon_* : A_* \to K$ est la transposée de l'injection $\eta : K \to A$, et l'injection $\eta_* : K \to A_*$ est transposée de l'augmentation $\varepsilon : A \to K$. D'autre part, A_* est muni d'une structure de A-module à gauche (resp. à droite), transposée de la structure de A-module à droite (resp. à gauche) de A.

PROPOSITION 3. - Soit M' un A-module à gauche, gradué par une graduation ≤ 0. Il existe une application K-linéaire

$$M' \longrightarrow M' \otimes_K A_* \tag{4}$$

et une seule, de degré 0, dont la transposée $M \otimes_K A \to M$ (où M désigne le dual-gradué de M') soit l'application qui définit la structure de A-module à droite de M. L'application (4) est A-linéaire, lorsqu'on munit $M' \otimes A_*$ de la structure de A-module à gauche définie par la structure de A-module à gauche de A_*.

DÉMONSTRATION. - Supposons d'abord que M' soit localement fini, c'est-à-dire que M'_q soit de dimension finie pour chaque q ; et soit M le dual-gradué de M'. Alors M^q_q s'identifie au dual de M^q. Les éléments de $M \otimes A$ d'un degré donné k sont ceux de $\sum_q M^q \otimes A^{k-q}$, et cette somme directe est finie parce que la graduation de M est ≥ 0. Le dual s'identifie à $\sum_q M'_q \otimes A_{k-q}$, c'est-à-dire au sous-espace de $M' \otimes A_*$ formé des éléments de degré $-k$. En transposant l'application $M \otimes A \to M$, on obtient donc une application K-linéaire $M' \to M' \otimes A_*$, de degré 0. Elle a évidemment un caractère fonctoriel en M'.

Or tout A-module (à gauche) gradué M', à graduation ≤ 0, est limite inductive de sous-modules localement finis (car un nombre fini d'éléments homogènes de M' engendre un A-module localement fini). Par passage à la limite inductive, on obtient donc l'application (4) pour un tel module M'. L'unicité est claire. La dernière assertion de l'énoncé est évidente, puisque l'application $M \otimes A \to M$ est A-linéaire. La proposition 3 est ainsi établie.

Soit maintenant M un A-module à droite, localement fini, et à graduation ≥ 0. Les espaces vectoriels gradués $\mathrm{Tor}^A_n(M, K)$ et $\mathrm{Ext}^n_A(K, M')$ (M' désignant le dual-gradué de M) sont localement finis puisque ce sont les espaces vectoriels d'homologie et de cohomologie des $M \otimes_A S_n(A)$ et des $\mathrm{Hom}^*_A(S_n(A), M')$, qui sont localement finis. Il s'ensuit, en vertu de la proposition 2, que chacun des deux espaces vectoriels gradués $\mathrm{Tor}^A_n(M, K)$ et $\mathrm{Ext}^n_A(K, M')$ s'identifie canoniquement au dual-gradué de l'autre. Ce résultat vaut notamment lorsque $M = K$, $M' = K$: <u>les deux espaces vectoriels gradués $H_n(A)$ et $H^n(A)$, localement finis, sont en dualité</u>.

On se propose maintenant d'expliciter un mode de calcul de $\mathrm{Ext}_A(K , M')$ lorsque M' est un A-module à gauche, gradué par une graduation ≤ 0 . On suppose toujours que l'algèbre A est localement finie. Envisageons d'abord le cas où M' est localement fini, donc est le dual-gradué d'un A-module à droite M . Alors $\mathrm{Hom}_A^*(S_n(A) , M')$ s'identifie au dual-gradué de $M \otimes_A S_n(A)$, donc au dual-gradué de $M \otimes I(A) \otimes \ldots \otimes I(A)$, les produits tensoriels étant pris sur K . Ce dual-gradué peut s'écrire

$$M' \otimes I(A_*) \otimes \ldots \otimes I(A_*) \ ,$$

en notant $I(A_*)$ le noyau de $\varepsilon_* : A_* \longrightarrow K$ (qui s'identifie au conoyau de $\eta_* : K \longrightarrow A_*$, et aussi au dual-gradué de $I(A)$). Si on explicite l'opérateur cobord du complexe $\mathrm{Hom}_A^*(S_n(A) , M')$, en transposant celui du complexe $M \otimes_A S(A)$, on trouve ceci :

(5)
$$\delta(x' \otimes a'_1 \otimes \ldots \otimes a'_n) = (\delta x') \otimes a'_1 \otimes \ldots \otimes a'_n + \sum_{1 \leq r \leq n} (-1)^r \, x' \otimes a'_1 \otimes \ldots \otimes (\delta a'_r) \otimes \ldots \otimes a'_n \ ,$$

où $\delta x' \in M' \otimes I(A_*)$ est l'image de $x' \in M'$ par l'application $M' \longrightarrow M' \otimes I(A_*)$, composée de l'application (4) et de la projection $M' \otimes A_* \longrightarrow M' \otimes I(A_*)$, et où $\delta a'_r \in I(A_*) \otimes I(A_*)$ est l'image de $a'_r \in I(A_*)$ par l'application δ induite par l'application diagonale de la coalgèbre A_* .

Les formules précédentes sont valables lorsque M' est localement fini ; en fait, elles restent valables dans le cas général, par passage à la limite inductive.

En particulier, si on prend $M' = K$, on trouve que $\mathrm{Ext}_A^n(K , K) = H^n(A)$ s'identifie à l'espace de cohomologie $H^n(Y)$ du complexe $Y = \sum_{n \geq 0} Y^n$, avec

$$\begin{cases} Y^0 = K \ , \\ Y^n = I(A_*) \otimes \ldots \otimes I(A_*) \quad (n \text{ fois}) \ , \text{ pour } n \geq 1 \ , \end{cases}$$

l'opérateur cobord $Y^n \longrightarrow Y^{n+1}$ étant donné par la formule

(6)
$$\delta(a'_1 \otimes \ldots \otimes a'_n) = \sum_{1 \leq r \leq n} (-1)^r \, a'_1 \otimes \ldots \otimes (\delta a'_r) \otimes \ldots \otimes a'_n \ ,$$

où, dans le second membre, δ désigne l'application $I(A_*) \longrightarrow I(A_*) \otimes I(A_*)$ induite par l'application diagonale de la coalgèbre A_* .

En particulier, $H^1(A)$ s'identifie au noyau de $\delta : I(A_*) \to I(A_*) \otimes I(A_*)$, c'est-à-dire à l'espace vectoriel (gradué) des éléments primitifs de la coalgèbre A_*. On retrouve la dualité entre $H_1(A) = I(A)/(I(A))^2$ et $H^1(A)$, espace des éléments primitifs (cf. exposé 12, paragraphe 1).

On se propose maintenant d'expliciter la structure multiplicative de $H^*(A)$ (cf. paragraphe 3) à l'aide du complexe précédent Y. Observons que Y s'identifie à l'algèbre tensorielle $T(I(A_*))$ de l'espace vectoriel $I(A_*)$, puisque

$$Y^n = T^n(I(A_*)) \quad ;$$

de plus, pour la structure d'algèbre graduée de $T(I(A_*))$ (les éléments de degré n étant ceux de $T^n(I(A_*))$, la formule (6) montre que

$$\delta(uv) = (\delta u)v + (-1)^n u(\delta v) \qquad \text{pour } \deg(u) = n \quad .$$

Autrement dit, δ est une différentielle d'algèbre graduée, et par conséquent la structure d'algèbre de $T(I(A_*))$ passe à l'homologie : d'où une structure d'algèbre sur $H^*(A) = \sum_{n \geq 0} H^n(A)$. Par ailleurs, chacun des $T^n(I(A_*))$ possède une graduation propre, et comme δ respecte cette graduation, la graduation passe au quotient dans chaque $H^n(A)$, comme du reste on le sait déjà.

PROPOSITION 4. - La structure d'algèbre de $H^*(A)$ qui vient d'être déduite de la structure multiplicative de l'algèbre tensorielle $T(I(A_*))$ coïncide avec celle définie au paragraphe 3.

DÉMONSTRATION. - Soit $f \in T^q(I(A_*))$, qu'on peut supposer homogène pour la graduation propre de $T^q(I(A_*))$ (déduite de la graduation de A_*). Si $a_1, \dots, a_q$ sont des éléments homogènes de $I(A)$, on notera

$$\langle f, [a_1, \dots, a_q] \rangle$$

le produit scalaire dans la dualité entre $I(A_*) \otimes \dots \otimes I(A_*)$ (q facteurs) et $I(A) \otimes \dots \otimes I(A)$ (q facteurs), cette dualité étant définie comme d'habitude en tenant compte de la règle des signes. Pour chaque entier $n \geq 0$, définissons une application $f_n : S_{n+q}(A) \to S_n(A)$, qui soit A-linéaire au sens gradué, comme suit :

$$f_n(a[a_1, \dots, a_{n+q}]) = (-1)^{(\deg f)(\deg a[a_1,\dots,a_n])} a[a_1, \dots, a_n] \langle f, [a_{n+1}, \dots, a_{n+q}] \rangle \quad .$$

Si f est un cocycle de $T(I(A_*))$, f est orthogonal aux éléments de $S_q(A)$ qui sont dans l'image de $d : S_{q+1}(A) \to S_q(A)$; alors un calcul facile montre que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} S_{n+1+q}(A) & \xrightarrow{d} & S_{n+q}(A) \\ \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n \\ S_{n+1}(A) & \xrightarrow{d} & S_n(A) \end{array}$$

On se trouve donc dans la situation qui a permis, au paragraphe 3, de définir la structure multiplicative de $H^*(A)$. Si $c \in H^q(A)$ est la classe de cohomologie définie par f, et si $u \in H^n(A)$ est la classe de cohomologie définie par un cocycle $g \in T^n(I(A_*))$, le produit uc (au sens du paragraphe 3) est la classe du cocycle défini par l'application composée

$$S_{n+q}(A) \xrightarrow{f_n} S_n(A) \xrightarrow{g} K \quad ;$$

en explicitant, on trouve que cette application composée envoie $[a_1, \ldots, a_{n+q}]$ dans

$$< g \otimes f , [a_1 , \ldots , a_{n+q}] > \quad ,$$

ce qui achève la démonstration.

5. Cohomologie du produit tensoriel de deux algèbres graduées localement finies.

Soit A une algèbre graduée augmentée, localement finie. L'algèbre $H^*(A) = \sum_{n \geq 0} H^n(A)$, munie de ses deux graduations (celle définie par les $H^n(A)$, et la graduation propre de chacun des espaces vectoriels $H^n(A)$) est un foncteur contravariant de A. Cela résulte par exemple du fait que la résolution standard $S(A)$ est un foncteur contravariant de A, ou du fait que l'algèbre tensorielle $T(I(A_*))$ est un foncteur covariant de A_*.

Soient A et B deux telles algèbres. Considérons leur produit tensoriel $A \otimes_K B$, muni de sa structure d'algèbre graduée. On a deux homomorphismes d'algèbres graduées

$$A \longrightarrow A \otimes B \longrightarrow A \quad ,$$

le premier envoyant a en $a \otimes 1$, et le second envoyant $a \otimes b$ en $\varepsilon(b).a$; le composé est l'application identique de A. Il s'ensuit qu'on a deux homomorphismes d'algèbres graduées

$$H^*(A) \xrightarrow{i_A} H^*(A \otimes B) \longrightarrow H^*(A) \quad ,$$

dont le composé est l'identité. Ainsi $H^*(A)$ s'identifie à une sous-algèbre de $H^*(A \otimes B)$, au moyen de l'injection i_A. Définissons une application linéaire

(conservant les degrés)

$$f : H^*(A) \otimes H^*(B) \longrightarrow H^*(A \otimes B)$$

par la condition que

$f(u \otimes v) = i_A(u).i_B(v)$ (produit de $i_A(u)$ et $i_B(v)$ dans l'algèbre $H^*(A \otimes B)$) .

Définissons sur $H^*(A) \otimes H^*(B)$ une structure d'algèbre en posant

$(u \otimes v).(u' \otimes v') = (-1)^{qq'+tt'}(uu') \otimes (vv')$ pour

$u' \in H^{q',t'}(A)$, $v \in H^{q,t}(B)$.

Alors $H^*(A) \otimes H^*(B)$ devient une algèbre bigraduée, en convenant que les éléments de bidegré (r , s) sont ceux de la somme directe des $H^{q,t}(A) \otimes H^{q',t'}(B)$ pour tous les systèmes (q , t , q' , t') tels que $q + q' = r$, $t + t' = s$.

PROPOSITION 5. - L'application f est un isomorphisme de l'algèbre bigraduée $H^*(A) \otimes H^*(B)$ sur l'algèbre bigraduée $H^*(A \otimes B)$.

DÉMONSTRATION. - Considérons les résolutions standard $S(A)$ et $S(B)$ de K . Leur produit tensoriel $S(A) \otimes S(B)$, muni de l'opérateur "bord" défini par

$$d(u \otimes v) = (du) \otimes v + (-1)^q u \otimes (dv) \quad \text{pour} \quad u \in S_q(A) \qquad ,$$

est une résolution $(A \otimes B)$-libre de K , si l'on définit la structure de $(A \otimes B)$-module de $S(A) \otimes S(B)$ comme suit :

$$(a \otimes b).(u \otimes v) = (-1)^{tt'}(au) \otimes (bv) \qquad ,$$

si $b \in B$ est de degré t , et $u \in S(A)$ est de degré t' (pour la graduation propre de chacun des $S_n(A) = A \otimes I(A) \otimes \dots \otimes I(A)$) .

Ainsi $S(A) \otimes S(B)$ peut servir à calculer

$$H^*(A \otimes B) = H^*(\mathrm{Hom}^*_{A \otimes B}(S(A) \otimes S(B) , K) = H^*(T(I(A'_*)) \otimes T(I(B'_*))) \qquad ,$$

la différentielle de $T(I(A'_*)) \otimes T(I(B'_*))$ étant celle d'un produit tensoriel de modules gradués, à savoir

$$\delta(u' \otimes v') = (\delta u') \otimes v' + (-1)^q . u' \otimes (\delta v') \quad \text{pour} \quad u' \in T^q(I(A'_*)) .$$

D'autre part l'injection $i_A : H^*(A) \longrightarrow H^*(A \otimes B)$ est définie par la projection naturelle $S(A) \otimes S(B) \longrightarrow S(A)$, donc le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^*(A) & \xrightarrow{i_A} & H^*(A \otimes B) \\ \downarrow \approx & & \downarrow \approx \\ H^*(T(I(A'_*))) & \longrightarrow & H^*(T(I(A'_*)) \otimes T(I(B'_*))) \end{array} \qquad ,$$

l'homomorphisme de la deuxième ligne étant celui défini par l'injection naturelle de $T(I(A_*))$ dans $T(I(A_*)) \otimes T(I(B_*))$ (qui envoie a en $a \otimes 1$). D'autre part, la formule de Künneth identifie $H^*(T(I(A_*)) \otimes T(I(B_*)))$ à $H^*(T(I(A_*))) \otimes H^*(T(I(B_*)))$. Pour montrer que l'application f de l'énoncé est une <u>bijection</u>, il suffit de montrer que si $u \in T^r(I(A_*))$ et $v \in T^q(I(B_*))$ sont des cocycles, le cocycle $u \otimes v \in T^r(I(A_*)) \otimes T^q(I(B_*))$ définit un élément de $H^*(A \otimes B)$ qui est le <u>produit</u> des éléments de $H^r(A)$ et de $H^q(B)$ définis respectivement par u et v ("produit" au sens de la structure multiplicative de $H^*(A \otimes B)$). Pour le montrer, on procède exactement comme dans la démonstration de la proposition 4, en se ramenant à la définition de la multiplication de $H^*(A \otimes B)$ donnée au paragraphe 3 : on utilise v pour définir une application $(A \otimes B)$-linéaire $g : S(A) \otimes S(B) \longrightarrow S(A) \otimes S(B)$, qui commute avec le bord et envoie $S_r(A) \otimes S_m(B)$ dans $S_r(A) \otimes S_{m-q}(B)$, et est telle que l'application composée

$$S_r(A) \otimes S_q(B) \xrightarrow{g} S_r(A) \otimes S_o(B) \xrightarrow{1 \otimes \varepsilon} S_r(A) \otimes K$$

ait pour transposée l'application $T^r(I(A_*)) \longrightarrow T^r(I(A_*)) \otimes T^q(I(B_*))$ qui envoie u en $u \otimes v$. Le lecteur écrira la formule explicite, à titre d'exercice.

Ainsi il est prouvé que l'application f de l'énoncé est bijective. Il reste à montrer que f est un isomorphisme d'algèbres bigraduées ; compte tenu de l'associativité de la multiplication dans les algèbres considérées, il suffit de montrer que si $u \in H^{q,t}(A)$ et $v \in H^{q',t'}(B)$, on a, dans l'algèbre $H^*(A \otimes B)$,

$$i_B(v) . i_A(u) = (-1)^{qq'+tt'} \; i_A(u) . i_B(v) \quad .$$

Or considérons l'application $S(A) \otimes S(B) \longrightarrow S(B) \otimes S(A)$ qui envoie $x \otimes y$ dans $(-1)^{qq'+tt'} \; y \otimes x$, pour $x \in S_q(A)$ de degré t, et $y \in S_{q'}(B)$ de degré t'. On vérifie facilement que cette application commute avec les opérateurs "bord", et est $(A \otimes B)$-linéaire lorsqu'on définit la structure de $(A \otimes B)$-module de $S(B) \otimes S(A)$ par

$$(a \otimes b).(y \otimes x) = (-1)^{tt'} \; (by) \otimes (ax) \; ,$$

pour a de degré t, la somme des degrés de b et y étant t' (il s'agit de la deuxième graduation de $S(B)$). En transposant, on trouve une bijection de $H^*(T(I(A_*))) \otimes H^*(T(I(B_*)))$ sur $H^*(T(I(B_*))) \otimes H^*(T(I(A_*)))$ qui est compatible avec les isomorphismes de chacun d'eux avec $H^*(A \otimes B)$, ces derniers isomorphismes étant eux-mêmes compatibles avec les injections i_A et i_B ; la bijection en question envoie $u \otimes v$ dans $(-1)^{qq'+tt'} \; v \otimes u$, si

$$u \in H^{q,t}(I(A_*)) \quad \text{et} \quad v \in H^{q',t'}(I(B_*)) \quad ,$$

ce qui achève enfin la démonstration.

6. Cas où A est une algèbre de Hopf.

Supposons que l'algèbre localement finie A soit en outre une algèbre de Hopf (cf. exposé 10), et soit $\Delta : A \to A \otimes A$ l'application diagonale. Puisque c'est un homomorphisme d'algèbres graduées (lorsqu'on munit $A \otimes A$ de la structure d'algèbre graduée, produit tensoriel "gauche" de deux algèbres graduées), et que cet homomorphisme est compatible avec les augmentations, Δ définit un homomorphisme d'algèbres bigraduées

$$\varphi : H^*(A \otimes A) \to H^*(A)$$

ce qui s'écrit encore

$$\varphi : H^*(A) \otimes H^*(A) \to H^*(A) \qquad ,$$

grâce à la proposition 5. Ici, $H^*(A) \otimes H^*(A)$ désigne l'algèbre bigraduée, produit tensoriel des deux algèbres bigraduées $H^*(A)$ et $H^*(A)$. D'autre part, on sait que chacune des applications composées

$$A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \xrightarrow{1 \otimes \varepsilon} A \quad \text{et} \quad A \xrightarrow{\Delta} A \times A \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} A$$

est l'identité. Il en résulte que chacune des applications composées

$$H^*(A) \xrightarrow{i_1} H^*(A) \otimes H^*A(\ ) \xrightarrow{\varphi} H^*(A)$$

$$H^*(A) \xrightarrow{i_2} H^*(A) \otimes H^*(A) \xrightarrow{\varphi} H^*(A)$$

est l'dentité, i_1 et i_2 étant définies par

$$i_1(a) = a \otimes 1 \ , \quad i_2(a) = 1 \otimes a \qquad .$$

THÉORÈME 1. - Lorsque A est une algèbre de Hopf, l'algèbre bigraduée $H^*(A)$ est anticommutative, dans le sens suivant :

$$a'.a = (-1)^{qq'+tt'} a.a' \text{ pour } a \in H^{q,t}(A) \text{ et } a' \in H^{q',t'}(A) \qquad .$$

De plus, la multiplication de $H^*(A)$ est précisément définie par l'application φ ci-dessus.

DÉMONSTRATION. - (comparer à la proposition 11 de l'exposé 1). On vient de voir que $\varphi(a \otimes 1) = a$, $\varphi(1 \otimes a) = a$. Puisque φ est un homomorphisme d'algèbres bigraduées, on a

$$\varphi(a \otimes a') = \varphi((a \otimes 1).(1 \otimes a')) = \varphi(a \otimes 1). \ \varphi(1 \otimes a') = a.a' \qquad .$$

Ainsi φ définit bien la multiplication de $H^*(A)$. De plus, si $a \in H^{q,t}(A)$ et $a' \in H^{q',t'}(A)$, on a

$$a'.a = \varphi(a' \otimes a) = (-1)^{qq'+tt'} \varphi(a \otimes a') = (-1)^{cq'+tt'} a.a' ,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

7. <u>Utilisation de résolutions projectives minimales.</u>

Jusqu'à la fin de cet exposé, on suppose que A est une algèbre graduée augmentée telle que $I(A) = \sum_{n \geq 1} A^n$; autrement dit, l'augmentation définit un isomorphisme $A^0 \approx K$. Pour commencer, on ne suppose pas que A soit localement finie ; cette hypothèse sera introduite ultérieurement. Tous les A-modules (à gauche) considérés dans ce paragraphe sont supposés munis d'une graduation ≥ 0 .

PROPOSITION 6. - <u>Soit</u> M <u>un</u> A-<u>module (à gauche) muni d'une graduation</u> ≥ 0 . <u>Si</u> $K \otimes_A M = 0$, <u>on a</u> $M = 0$.

DÉMONSTRATION. - Par hypothèse, $M = I(A).M$; si M n'était pas nul, soit q le plus petit entier tel que $M_q \neq 0$; l'inclusion $M_q \subset I(A).M$ conduit à une contradiction, puisque tous les éléments de $I(A)$ sont de degré > 0 .

COROLLAIRE. - <u>Si</u> $M \to M'$ <u>est un morphisme dans la catégorie des</u> A-<u>modules à graduation</u> ≥ 0 , <u>l'application associée</u> $K \otimes_A M \to K \otimes_A M'$ <u>est surjective si et seulement si</u> $M \to M'$ <u>est surjectif</u>.

(Il suffit de considérer le conoyau de $M \to M'$ et d'utiliser le fait que le foncteur $K \otimes_A M$ est exact à droite en M) .

DÉFINITION 1. - Un épimorphisme $f : M \to M'$ est dit <u>essentiel</u> si, pour tout morphisme $g : X \to M$ tel que $f \circ g$ soit surjectif, g est surjectif. (Cette définition est valable dans n'importe quelle catégorie abélienne).

PROPOSITION 7. - <u>Pour que</u> $f : M \to M'$ <u>soit un épimorphisme essentiel, il faut et il suffit que l'application</u> $K \otimes_A M \to K \otimes_A M'$ <u>définie par</u> f <u>soit un isomorphisme</u>.

DÉMONSTRATION. - Supposons que $K \otimes_A M \longrightarrow K \otimes_A M'$ soit un isomorphisme. Il s'ensuit d'abord que f est surjectif (corollaire de la proposition 6) ; montrons que f est essentiel. Soit $g : X \longrightarrow M$ tel que $f \circ g$ soit surjectif ; le composé $K \otimes_A X \xrightarrow{1 \otimes g} K \otimes_A M \xrightarrow{1 \otimes f} K \otimes_A M'$ est surjectif, et puisque le second est bijectif, le premier est surjectif, donc (corollaire de la proposition 6) g est surjectif ; ainsi f est essentiel.

Réciproquement, soit $f : M \longrightarrow M'$ un épimorphisme essentiel ; on sait déjà que $K \otimes_A M \longrightarrow K \otimes_A M'$ est surjectif, et on va montrer que le noyau est 0 . Soit N ce noyau, qui est un sous-espace vectoriel gradué de l'espace vectoriel gradué $K \otimes_A M$ (sur le corps K) ; prenons une base homogène d'un sous-espace supplémentaire, et relevons-la dans M ; elle engendre un sous-A-module gradué X de M . Soit g l'injection $X \longrightarrow M$; l'application $f \circ g$ induit $K \otimes_A X \longrightarrow K \otimes_A M'$, qui est surjectif par construction ; donc (corollaire de la proposition 6) $f \circ g$ est surjectif, et puisque f est essentiel, on conclut que g est surjectif, donc bijectif. Alors g induit une bijection $K \otimes_A X \longrightarrow K \otimes_A M$, ce qui prouve que $N = 0$.

PROPOSITION 8. - *Soit* $f : M \longrightarrow M'$ *un épimorphisme essentiel ; si* M' *est projectif,* f *est un isomorphisme*.

En effet, le noyau N de f possède dans M un sous-A-module supplémentaire X , puisque M' est projectif. Le composé de l'injection $X \longrightarrow M$ et de f étant surjectif, il s'ensuit que l'injection $X \longrightarrow M$ est surjective ; donc $N = 0$.

PROPOSITION 9. - *Tout module projectif* P (dans la catégorie des A-modules à gauche gradués par une graduation ≥ 0) *est libre et possède une base homogène*.

DÉMONSTRATION. - Prenons une K-base homogène de $K \otimes_A P$, et relevons-la dans P . On obtient un système d'éléments de P qui définit un morphisme $F \longrightarrow P$ (où F est gradué-libre) tel que l'application associée $K \otimes_A F \longrightarrow K_A \otimes P$ soit bijective. D'après la proposition 7, $F \longrightarrow P$ est un épimorphisme essentiel ; d'après la proposition 8 , c'est un isomorphisme.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 2. - Pour tout A-module gradué M , à graduation ≥ 0 , il existe un épimorphisme essentiel $f : P \to M$, où P est gradué-libre ; un tel épimorphisme est unique à un isomorphisme près (ceci veut dire que si $f' : P' \to M$ est une autre solution du problème, il existe un isomorphisme $g : P \to P'$ tel que $f = f' \circ g$; on ne dit pas qu'un tel g soit unique).

DÉMONSTRATION. - Prouvons d'abord l'unicité. Si on a f et f' , on peut factoriser f en $f' \circ g$, parce que P est projectif ; puisque f est essentiel, g est surjectif ; puisque $f' \circ g$ est essentiel, il s'ensuit que g est essentiel ; donc (proposition 8) g est un isomorphisme.

Prouvons maintenant l'existence. Puisque $K \otimes_A M$ est un espace vectoriel gradué sur le corps K , il existe une application K-linéaire $\varphi : K \otimes_A M \to M$, conservant le degré, telle que la composée

$$K \otimes_A M \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow K \otimes_A M$$

soit l'identité. En tensorisant φ à gauche avec A , on obtient

$$A \otimes_K (K \otimes_A M) \longrightarrow A \otimes_K M ,$$

et en faisant suivre ceci de l'application $A \otimes_K M \to M$ définie par la structure de A-module de M , on obtient une application A-linéaire conservant le degré :

(7) $$A \otimes_K (K \otimes_A M) \longrightarrow M ,$$

qui est telle que si on tensorise à gauche avec K (sur l'anneau A) on obtient l'application identique $K \otimes_A M \to K \otimes_A M$. Donc (proposition 7) l'application (7) est un épimorphisme essentiel, et le problème est résolu.

DÉFINITION 2. - Etant donné un A-module à gauche M, à graduation ≥ 0 , on appelle résolution projective minimale X de M une résolution projective

$$\cdots \longrightarrow X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{d_1} X_o \xrightarrow{\varepsilon} M$$

(où les X_n sont donc gradués-libres, en vertu de la proposition 9) jouissant de la propriété suivante : si Z_{n-1} désigne le noyau de d_{n-1} (resp. le noyau de ε si $n = 1$, resp. M si $n = 0$) , l'application $X_n \to Z_{n-1}$ induite par d_n (resp. l'application ε si $n = 0$) est un épimorphisme essentiel.

D'après le théorème 2, une telle résolution projective minimale existe toujours : on la construit de proche en proche. De plus deux telles résolutions minimales sont isomorphes (mais l'isomorphisme n'est pas canonique). On voit facilement qu'une résolution projective minimale est facteur direct dans toute résolution projective, ce qui justifie le mot de "minimal".

PROPOSITION 10. - Soit X une résolution projective minimale d'un A-module à gauche M. Alors les opérateurs différentiels des complexes $K \otimes_A X$ et $\mathrm{Hom}_A(X, K)$ sont nuls.

DÉMONSTRATION. - Factorisons $d_{n+1} : X_{n+1} \to X_n$ en un épimorphisme essentiel $f : X_{n+1} \to Z_n$ et une injection $g : Z_n \to X_n$. Il suffit de montrer que l'application $K \otimes_A Z_n \to K \otimes_A X_n$ définie par g est nulle. Or l'application composée

$$K \otimes_A Z_n \to K \otimes_A X_n \to K \otimes_A Z_{n-1}$$

est nulle, et la seconde est un isomorphisme puisque $X_n \to Z_{n-1}$ est un épimorphisme essentiel. Quant au complexe $\mathrm{Hom}_A(X, K)$, il s'identifie au dual de $K \otimes_A X$, donc son opérateur différentiel est aussi nul.

COROLLAIRE. - Soit X une résolution projective minimale de K (comme A-module à gauche). Alors

$$K \otimes_A X_n \approx H_n(A) \quad , \qquad \mathrm{Hom}_A(K, X_n) \approx H^n(A) \ .$$

On peut expliciter le début d'une résolution projective minimale de K, conformément au procédé utilisé pour démontrer le théorème 2. On trouve d'abord $X_o = A$, l'application $X_o \to K$ étant l'augmentation $\varepsilon : A \to K$. Le noyau est $I(A)$; on choisit un relèvement $\varphi : K \otimes_A I(A) \to I(A)$, c'est-à-dire un relèvement

$$\varphi : \ I(A)/(I(A))^2 \to I(A) \ .$$

D'où une application composée $A \otimes_K I(A)/((I(A))^2 \to A \otimes_K I(A) \to A$ qui sera l'application $d_1 : X_1 \to X_o$ du complexe cherché. Par exemple, prenons pour A l'algèbre de Steenrod S^* pour $p = 2$; on sait (exposé 12, théorème 3) que les images des Sq^{2^i} $(i = 0, 1, \ldots)$ dans $I(A)/((I(A))^2$ forment une base de cet espace vectoriel ; on prendra donc pour X_1 un A-module libre ayant une base (e_i) en correspondance bijective avec les Sq^{2^i}, et d_1 associe à $\sum_i a_i e_i$ (où $a_i \in S^*$) l'élément $\sum_i a_i Sq^{2^i} \in S^*$. On considère ensuite le noyau de d_1, c'est-à-dire le S^*-module des relations (à gauche) entre les Sq^{2^i}, et on lui applique la méthode utilisée pour la démonstration du théorème 2. Etc.

8. Utilisation de résolutions injectives minimales.

On va développer des considérations duales de celles du paragraphe précédent ; mais à un moment donné il nous faudra introduire l'hypothèse que l'algèbre graduée A est localement finie. Tous les A-modules considérés dans ce paragraphe seront des A-modules à droite, munis d'une graduation ≤ 0.

PROPOSITION 6 bis. - *Soit* M *un* A-*module (à droite) muni d'une graduation* ≤ 0. *Si* $\mathrm{Hom}_A(K, M) = 0$, *on a* $M = 0$.

DÉMONSTRATION. - Par hypothèse, le sous-espace vectoriel $\widetilde{M}$ de M, formé des $x \in M$ tels que $x.a = 0$ pour tout $a \in I(A)$, est réduit à 0. Supposons $M \neq 0$, et soit q le plus petit entier ≥ 0 tel que $M_q \neq 0$; on a évidemment $\widetilde{M}_q = M_q$, d'où une contradiction.

COROLLAIRE. - *Si* $M \to M'$ *est un morphisme dans la catégorie des* A-*modules à graduation* ≤ 0, *l'application associée* $\mathrm{Hom}_A(K, M) \to \mathrm{Hom}_A(K, M')$ *est une injection si et seulement si* $M \to M'$ *est une injection.*

DÉFINITION 1 bis. - Un monomorphisme $f : M \to M'$ est dit *essentiel* si, pour tout morphisme $g : M' \to X$ tel que $g \circ f$ soit une injection, g est une injection.

PROPOSITION 7 bis. - *Pour que* $f : M \to M'$ *soit un monomorphisme essentiel, il faut et il suffit que l'application* $\mathrm{Hom}_A(K, M) \to \mathrm{Hom}_A(K, M')$ *définie par* f *soit un isomorphisme.*

PROPOSITION 8 bis. - *Soit* $f : M \to M'$ *un monomorphisme essentiel ; si* M *est injectif (dans la catégorie), alors* f *est un isomorphisme.*

A partir de maintenant, on suppose que A est *localement finie* ; alors A_* est une coalgèbre graduée, et tout A-module à droite M, à graduation ≤ 0, est muni d'une application A-linéaire

$$M \to A_* \otimes M$$

qui fait de M un A_*-comodule (cf. proposition 3).

PROPOSITION 9 bis. - *Les modules injectifs de la catégorie sont ceux de la forme* $A_* \otimes V$, *où* V *est un* K-*espace vectoriel gradué (à graduation* ≤ 0), *la structure de* A-*module à droite étant celle définie par* A_*.

[N. B. : tous les produits tensoriels sont pris sur K].

DÉMONSTRATION. - Montrons d'abord que $A_* \otimes V$ est injectif. Soit V'' le bidual de V, c'est-à-dire le dual-gradué du dual-gradué $V' = \mathrm{Hom}_K(V, K)$; on sait que V se plonge canoniquement dans V''. Choisissons un projecteur $V'' \longrightarrow V$, conservant la graduation. Il induit une application A-linéaire $A_* \otimes V'' \longrightarrow$ $\longrightarrow A_* \otimes V$, qui fait de $A_* \otimes V$ un facteur direct de $A_* \otimes V''$ (au sens des A-modules gradués). Il suffit donc de montrer que $A_* \otimes V''$ est injectif ; or il s'identifie au dual-gradué de $A \otimes V'$, qui est projectif (libre), donc il est injectif en vertu de la proposition 1.

Réciproquement, soit I un module injectif quelconque. Posons $\mathrm{Hom}_A(K, I) = V$, sous-espace vectoriel gradué de I, et choisissons un K-projecteur $I \longrightarrow V$ respectant la graduation ; composons l'application canonique $I \longrightarrow A_* \otimes I$ et l'application $A_* \otimes I \longrightarrow A_* \otimes V$ définie par ce projecteur. On obtient une application A-linéaire

$$I \longrightarrow A_* \otimes V$$

qui, si on lui applique le foncteur $\mathrm{Hom}_A(K, \ )$, donne l'application identique $V \longrightarrow V$. Donc (proposition 7 bis) c'est un monomorphisme essentiel ; et puisque $A_* \otimes V$ est un module injectif, c'est un isomorphisme (proposition 8 bis), ce qui prouve bien que tout injectif est de la forme $A_* \otimes V$.

THÉORÈME 2 bis. - <u>Pour tout</u> A-<u>module gradué</u> M <u>à graduation</u> ≤ 0, <u>il existe un monomorphisme essentiel</u> $f : M \longrightarrow I$, <u>où</u> I <u>est de la forme</u> $A_* \otimes V$; <u>un tel monomorphisme est unique à un isomorphisme près</u>.

DÉMONSTRATION. - On prouve d'abord l'unicité (ceci est laissé au lecteur à titre d'exercice). Occupons-nous ensuite de l'existence : $\mathrm{Hom}_A(K, M)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel gradué $\tilde{M}$ de M ; choisissons un projecteur $M \longrightarrow \tilde{M}$, conservant la graduation. Composons l'application canonique $M \longrightarrow A_* \otimes M$ et l'application $A_* \otimes M \longrightarrow A_* \otimes \tilde{M}$ définie par le projecteur. On obtient une application A-linéaire $M \longrightarrow A_* \otimes \tilde{M}$ qui, lorsqu'on lui applique le foncteur $\mathrm{Hom}_A(K, \ )$, définit l'application identique de $\tilde{M}$. C'est donc un monomorphisme essentiel.

Cela dit, on définit de manière évidente la notion de <u>résolution injective minimale</u> d'un A-module (à droite) à graduation ≤ 0. Une telle résolution existe toujours ; deux résolutions injectives minimales de M sont isomorphes (non canoniquement). Une résolution injective minimale de M est facteur direct dans toute résolution injective de M.

PROPOSITION 10 bis. - Soit Y une résolution injective minimale d'un A-module à droite M. Alors l'opérateur différentiel du complexe $\mathrm{Hom}_A(K, Y)$ est nul.

COROLLAIRE. - Si Y est une résolution injective minimale de K, on a $\mathrm{Hom}_A(K, Y_n) \approx H^n(A)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956.

[2] EILENBERG (Samuel). - Homological dimension and syzygies, Annals of Math., Series 2, t. 64, 1956, p. 328-336.

[3] YONEDA (Nobuo). - Note on products in Ext, Proc. Amer. math. Soc., t. 9, 1958, p. 873-875.