Henri Cartan

Opérations cohomologiques secondaires

Séminaire Henri Cartan, tome 11, n° 2 (1958-1959), exp. n° 13, p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_2_A4_0>

16 mars 1959

OPÉRATIONS COHOMOLOGIQUES SECONDAIRES

par Henri CARTAN

1. Généralités ; exemples.

On va d'abord donner, des opérations cohomologiques secondaires, une définition un peu vague, de caractère général. Supposons donnés trois systèmes finis d'entiers (i_r) , (j_s) , (k_t) , et soit m un entier. Considérons, pour chaque espace X (ou pour chaque ensemble simplicial X) , les groupes de cohomologie

$$\sum_r H^{m+i_r}(X) , \quad \sum_s H^{m+j_s}(X) , \quad \sum_t H^{m+k_t}(X) ,$$

à coefficients dans un même groupe abélien G , pour fixer les idées. Et supposons donnés des homomorphismes

$$f^m : \sum_r H^{m+i_r}(X) \longrightarrow \sum_s H^{m+j_s}(X)$$

$$g^m : \sum_s H^{m+j_s}(X) \longrightarrow \sum_t H^{m+k_t}(X)$$

ayant un caractère fonctoriel en X , et tels que $g^m \circ f^m = 0$. Une opération secondaire, subordonnée à ces données, est une application (non nécessairement additive)

$$\Phi^m : \operatorname{Ker} f^m \longrightarrow \operatorname{Coker} g^{m-1}$$

qui a un caractère fonctoriel en X , dans un sens évident. Une telle opération n'est donc définie que sur un sous-groupe de $\sum_r H^{m+i_r}(X)$, et ses valeurs sont dans un quotient de $\sum_t H^{m-1+k_t}(X)$.

Exemple : l'opération de Massey. - Supposons (pour fixer les idées) que le groupe de coefficients G soit un anneau, ce qui permet de considérer le cup-produit. Supposons choisi, pour un X d'abord donné, un $u \in H^p(X)$ et un $w \in H^q(X)$. Définissons des applications f^m et g^m :

$$H^m(X) \xrightarrow{f^m} H^{m+p}(X) \oplus H^{m+q}(X) \xrightarrow{g^m} H^{m+p+q}(X)$$

comme suit : $f^m(v) = (uv , vw)$, $g^m(x , y) = xw - uy$. On a bien $g^m \circ f^m = 0$ à cause de l'associativité du cup-produit. L'opération de Massey

$$\Phi^m : \text{Ker } f^m \longrightarrow \text{Coker } g^{m-1}$$

envoie chaque $v \in H^m(X)$ tel que $uv = 0$, $vw = 0$, dans un élément de $H^{m+p+q-1}(X)/\text{Im } g^{m-1}$, de la manière suivante : soient α, β, γ des cocycles appartenant aux classes de u , v , w ; il existe, par hypothèse, des cochaînes a et c telles que

$$\alpha \beta = \delta a , \quad \beta \gamma = \delta c ;$$

leurs degrés sont $m + p - 1$ et $m + q - 1$. La cochaîne

$$a \gamma - (-1)^p \alpha c ,$$

de degré $m + p + q - 1$, est un cocycle, à cause de l'associativité de la multiplication des cochaînes. On vérifie que la classe de ce cocycle dans $H^{m+p+q-1}(X)/\text{Im } g^{m-1}$ ne dépend pas des choix de α , β , γ , a , c . On remarquera que l'application Φ^m est additive.

Dans cet exemple, l'opération Φ^m n'a pas, à vrai dire, un caractère fonctoriel a priori, puisque, pour un X donné, elle dépend du choix de u et w . On peut toutefois dire ceci : si on a une application $\varphi : X' \longrightarrow X$, et si on prend pour $u' \in H^p(X')$ et pour $w' \in H^q(X')$ les images de u et w par φ^* , alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\text{Ker } f^m(X , u , w) & \xrightarrow{\Phi^m(X , u , w)} & \text{Coker } g^{m-1}(X , u , w) \\
\downarrow \varphi^* & & \downarrow \varphi^* \\
\text{Ker } f^m(X' , u' , w') & \xrightarrow{\Phi^m(X' , u' , w')} & \text{Coker } g^{m-1}(X' , u' , w')
\end{array}$$

est commutatif.

Autre exemple : les opérations secondaires de Bockstein. - Soit p un nombre premier (cette hypothèse n'est d'ailleurs pas essentielle). Soit

$$\beta^m : H^m(X ; Z_p) \longrightarrow H^{m+1}(X ; Z_p)$$

l'opération de Bockstein, c'est-à-dire l'opérateur "cobord" de la suite exacte de cohomologie définie par la suite exacte de groupes de coefficients

$$0 \longrightarrow Z_p \xrightarrow{\alpha} Z_{p^2} \xrightarrow{\beta} Z_p \longrightarrow 0$$

(l'application α est induite par l'application $n \longrightarrow pn$ de Z dans Z, et β est induite par l'application identique $Z \longrightarrow Z$). On a

$$\beta^{m+1} \circ \beta^m = 0 .$$

On définit alors une opération additive

$$\Phi^m : \operatorname{Ker} \beta^m \longrightarrow \operatorname{Coker} \beta^m$$

comme suit : soit $x \in \operatorname{Ker} \beta^m$; cela veut dire que x est dans l'image d'un $x' \in H^m(X ; Z_{p^2})$. Choisissons une m-cochaîne u telle que $\delta u = p^2 v$, de façon que x' soit dans la classe de u. Alors v est un $(m+1)$-cocycle, dont l'image dans $H^{m+1}(X ; Z_p)/\operatorname{Im} \beta^m$ ne dépend pas du choix de x' et de u. L'élément de $\operatorname{Coker} \beta^m$ ainsi obtenu est, par définition, $\Phi^m(x)$.

On peut vérifier que $\Phi^{m+1} \circ \Phi^m = 0$, et ceci permet de définir à partir de Φ^m une nouvelle opération ; elle est définie sur le noyau de Φ^m et à valeurs dans le conoyau de Φ^m. C'est là un exemple d'"opération tertiaire". Cette question est en dehors de notre sujet actuel.

2. Définition précise des opérations étudiées.

On va maintenant dire avec précision le type d'opérations que l'on va étudier. Soit p un entier premier, fixé une fois pour toutes ; la cohomologie sera toujours prise à coefficients dans Z_p (et l'on se dispensera de l'écrire). Soit S^* l'algèbre de Steenrod (algèbre graduée des opérations cohomologiques stables à coefficients dans Z_p). Un élément homogène $a \in S^*$, de degré q, définit, pour tout entier m, une opération additive

$$a^m : H^m(X) \longrightarrow H^{m+q}(X) ,$$

et on fera ici la convention que ces a^m commutent avec la suspension (sans signe) : le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^{m+1}(SX) & \xrightarrow{a^{m+1}(SX)} & H^{m+1+q}(SX) \\ \approx\downarrow\sigma & & \approx\downarrow\sigma \\ H^m(X) & \xrightarrow{a^m(X)} & H^{m+q}(X) \end{array}$$

est commutatif (SX désignant la suspension de X).

Donnons-nous, comme au n° 1, trois systèmes finis d'entiers (i_r) , (j_s) , (k_t) ; et de plus, pour chaque couple (r , s) , un élément $a_{s,r} \in S^*$ de degré $j_s - i_r$; et pour chaque couple (s, t) , un élément $b_{t,s} \in S^*$ de degré $k_t - j_s$. Nous avons donc deux matrices

$$a = (a_{s,r}) \ , \quad b = (b_{t,s})$$

dont les éléments sont dans l'algèbre S^* . Nous supposons que le produit

$$ba = (\sum_s b_{t,s} \, a_{s,r}) = 0 \ .$$

Pour chaque entier m , les applications linéaires

$$a^m_{s,r} : H^{m+i_r}(X) \longrightarrow H^{m+j_s}(X)$$
$$b^m_{t,s} : H^{m+j_s}(X) \longrightarrow H^{m+k_t}(X)$$

définissent des applications

$$a^m : \sum_r H^{m+i_r}(X) \longrightarrow \sum_s H^{m+j_s}(X)$$
$$b^m : \sum_s H^{m+j_s}(X) \longrightarrow \sum_t H^{m+k_t}(X)$$

telles que $b^m \circ a^m = 0$. On est donc bien dans la situation décrite au début du n° 1 .

On se propose de définir, pour chaque m , une application(non supposée linéaire) Φ^m : $\operatorname{Ker} a^m \longrightarrow \operatorname{Coker} b^{m-1}$ qui ait un caractère fonctoriel (vis-à-vis de X) , de manière à satisfaire aux deux conditions suivantes :

(i). Stabilité par suspension : cela signifie que le diagramme suivant doit être commutatif

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} \operatorname{Ker} a^{m+1}(SX) & \xrightarrow{\Phi^{m+1}(SX)} & \operatorname{Coker} b^m(SX) \\ \approx \downarrow \sigma & & \approx \downarrow \sigma \\ \operatorname{Ker} a^m(X) & \xrightarrow{\Phi^m(X)} & \operatorname{Coker} b^{m-1}(X) \end{array}$$

où SX désigne la suspension de X .

(ii). Compatibilité avec δ : ceci est une condition qui affecte chaque Φ^m individuellement, et qu'on va maintenant expliciter. Soit Y un sous-truc de X ; on a une suite exacte de cohomologie

$$H^{m-1+j_s}(X) \longrightarrow H^{m-1+j_s}(Y) \xrightarrow{\delta} H^{m+j_s}(X\,,\,Y) \longrightarrow H^{m+j_s}(X) \quad .$$

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \sum_s H^{m-1+j_s}(X) \arrow[r, "b^{m-1}(X)"] \arrow[d] \arrow[dr, "u^{m-1}"] & \sum_t H^{m-1+k_t}(X) \arrow[d] \\
 & \sum_s H^{m-1+j_s}(Y) \arrow[r, "b^{m-1}(Y)"] \arrow[d, "(-1)^m \delta"] & \sum_t H^{m-1+k_t}(Y) \\
\sum_r H^{m+i_r}(X,Y) \arrow[r, "a^m(X,Y)"] \arrow[d] \arrow[dr, "v^m"] & \sum_s H^{m+j_s}(X,Y) \arrow[d] & \\
\sum_r H^{m+i_r}(X) \arrow[r, "a^m(X)"] & \sum_s H^{m+j_s}(X) \quad . &
\end{tikzcd}$$

L'opération $(-1)^m \delta$ induit un isomorphisme

$$\mathrm{Ker}\Big(\sum_s H^{m+j_s}(X,Y) \longrightarrow \sum_s H^{m+j_s}(X)\Big) \approx \mathrm{Coker}\Big(\sum_s H^{m-1+j_s}(X) \longrightarrow \sum_s H^{m-1+j_s}(Y)\Big)$$

et par conséquent le diagramme précédent induit une application linéaire

$$\gamma^m \ : \ \mathrm{Ker}\ v^m \longrightarrow \mathrm{Coker}\ u^{m-1} \quad .$$

Alors la compatibilité de Φ^m avec δ s'exprime (par définition) par la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\ v^m \arrow[r, dash, "\gamma^m"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathrm{Coker}\ u^{m-1} \\
\mathrm{Ker}\ a^m(X) \arrow[r, "\Phi^m(X)"] & \mathrm{Coker}\ b^{m-1}(X) \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches verticales sont définies de manière évidente : α est induite par $\sum_r H^{m+i_r}(X,Y) \longrightarrow \sum_r H^{m+i_r}(X)$, et β est induite par

$$\sum_t H^{m-1+k_t}(X) \longrightarrow \sum_t H^{m-1+k_t}(Y) \ .$$

Ces définitions étant posées, on notera Φ la collection des Φ^m .

Les définitions précédentes apprellent deux remarques. Tput d'abord, supposons définie une opération Φ^{m+1} compatible avec δ ; alors le diagramme commutatif (*) définit, pour chaque X , une application $\Phi^m(X)$; l'opération Φ^m ainsi définie (et qu'on peut appeler la "suspension" de Φ^{m+1}) a évidemment un caractère fonctoriel ; je dis que Φ^m <u>est compatible avec</u> δ . Cela résulte aussitôt de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}\left(\sum_s H^{m+1+j_s}(SX,SY)\right) \longrightarrow H^{m+1+j_s}(SX)\right) & \approx & \mathrm{Coker}\left(\sum_s H^{m+j_s}(SX) \longrightarrow \sum_s H^{m+j_s}(SY)\right) \\ \wr\wr\, \sigma & & \wr\wr\, \sigma \\ \mathrm{Ker}\left(\sum_s H^{m+j_s}(X,Y) \longrightarrow \sum_s H^{m+j_s}(X)\right) & \approx & \mathrm{Coker}\left(\sum_s H^{m-1+j_s}(X) \longrightarrow \sum_s H^{m-1+j_s}(Y)\right) \end{array}$$

commutativité due à ce qu'on a pris la précaution de définir les isomorphismes horizontaux au moyen de $(-1)^{m+1}\delta$ et $(-1)^m\delta$ respectivement.

La deuxième remarque est la suivante : soit, pour chaque couple (r,t) , un élément $c_{t,r}$ de S^* , de degré $k_t - 1 - i_r$. La matrice des applications linéaires $c^m_{t,r}$ définit une application linéaire

$$c^m : \sum_r H^{m+i_r}(X) \longrightarrow \sum_t H^{m-1+k_t}(X) ,$$

qui est une "opération primaire". Notons encore c^m la "double restriction" de c^m en une application linéaire

$$\mathrm{Ker}\ a^m \longrightarrow \mathrm{Coker}\ b^{m-1} .$$

On dira encore, d'une telle application, que c'est une <u>opération primaire</u>. Cela dit, <u>si</u> Φ^m <u>est une opération secondaire compatible avec</u> δ , <u>l'opération</u> $\Phi^m + c^m$ <u>est encore une opération secondaire compatible avec</u> δ . Pour le voir, il suffit de vérifier que l'application composée

$$\mathrm{Ker}\ v^m \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ker}\ a^m(X) \xrightarrow{c^m} \mathrm{Coker}\ b^{m-1}(X) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Coker}\ u^{m-1}$$

est <u>nulle</u>. Or soit $\eta \in \sum_r H^{m+i_r}(X,Y)$ tel que $v^m(\eta) = 0$; soit ξ l'image de η dans $\sum_r H^{m+i_r}(X)$; l'image de η dans $\sum_r H^{m+i_r}(Y)$ est nulle, donc l'image de $c^m(\xi) \in \sum_t H^{m-1+k_t}(X)$ dans $\sum_t H^{m-1+k_t}(Y)$ est nulle, ce qui implique bien que $\beta\, c^m \alpha(\eta) = 0$.

Si on a, pour chaque m, une opération Φ^m compatible avec δ, et si ces opérations forment une collection Φ stable par suspension, alors la collection (pour m variable) des $\Phi^m + c^m$ est aussi une famille d'opérations stable par suspension, dont chacune est compatible avec δ. On la notera $\Phi + c$.

THÉORÈME FONDAMENTAL. - Etant données des matrices a et b telles que $b \circ a = 0$, il existe une collection d'opérations secondaires Φ^m satisfaisant à (i) et (ii) ; les Φ^m sont nécessairement linéaires ; de plus, toute autre solution du problème est de la forme $\Phi + c$, c étant une opération primaire.

La suite de cet exposé est consacrée à la démonstration de ce théorème.

3. Construction d'un espace universel.

On va considérer des produits de groupes abéliens simpliciaux d'Eilenberg-MacLane, du type $K(\Pi,n)$ (cf. exposé 8).

Soit donné l'entier m ; on posera

$$G^m = \prod_r K(Z_p, m+i_r) , \quad F^m = \prod_s K(Z_p, m+j_s) .$$

On notera $\gamma_r^m \in H^{m+i_r}(Z_p, m+i_r)$ (coefficients dans Z_p) la classe fondamentale ; de même, φ_s^m désignera la classe fondamentale de $K(Z_p, m+j_s)$. La matrice $(a_{s,r}^m)$ définit une classe d'applications $\alpha^m : G^m \longrightarrow F^m$ comme suit : pour chaque couple (r,s), l'élément

$$a_{s,r}^m(\gamma_r^m) \in H^{m+j_s}(Z_p, m+i_r)$$

définit une classe d'applications simpliciales

$$\alpha_{s,r}^m : K(Z_p, m+i_r) \longrightarrow K(Z_p, m+j_s)$$

toutes homotopes entre elles (exposé 8, n°2), (ce ne sont pas, en général, des homomorphismes de groupes abéliens simpliciaux). Pour s fixé, on peut faire le "produit" des applications $\alpha_{s,r}^m$ quand r varie, puisque ces applications prennent leurs valeurs dans un groupe abélien $K(Z_p, m+j_s)$. Soit $\alpha_s^m : G^m \longrightarrow K(Z_p, m+j_s)$ cette application-produit ; on a

$$(1) \qquad (\alpha_s^m)^* (\varphi_s^m) = \sum_r a_{s,r}^m (\gamma_r^m) ,$$

en identifiant chaque classe de cohomologie de $K(Z_p, m+i_r)$ à une classe de cohomologie de G^m (car la projection $G^m \longrightarrow K(Z_p, m+i_r)$ induit une injection

$H^*(Z_p, m+i_r) \longrightarrow H^*(G^m))$.

Faisons maintenant varier s : la collection des applications α_s^m de G^m dans les $K(Z_p, m+j_s)$ définit une application α^m de G^m dans le produit F^m des $K(Z_p, m+j_s)$. On a

$$(1') \qquad (\alpha^m)^* (\varphi_s^m) = \sum_r a_{s,r}^m(\gamma_r^m) \qquad \text{pour tout } s ,$$

et ces relations caractérisent la classe des applications $\alpha^m : G^m \longrightarrow F^m$. On notera $\gamma^m = \sum_r \gamma_r^m$ ("classe fondamentale" de G^m) , et $\varphi^m = \sum_s \varphi_s^m$ ("classe fondamentale" de F^m) .

Pour chaque s , considérons le fibré contractile $L(Z_p, m-1+j_s)$, de base $K(Z_p, m+j_s)$ et de fibre $K(Z_p, m-1+j_s)$ (cf. exposé 8, n° 2 et 3). Le produit L^{m-1} des $L(Z_p, m-1+j_s)$ est un fibré contractile, de base F^m et de fibre F^{m-1} . L'application α^m de G^m dans la base du fibré L^{m-1} définit un fibré image réciproque, que nous noterons E^{m-1} ; il a pour base G^m et pour fibre F^{m-1} . Si on remplace α^m par une application homotope, le fibré E^{m-1} est remplacé par un fibré isomorphe à E^{m-1} . (cf. Séminaire 1956/57, exposé 4, corollaire du théorème 1) ; ceci permet de parler de E^{m-1} sans préciser le choix de l'application α^m .

On constate facilement que E^{m-1} est le "produit fibré" des E_s^{m-1} lorsque s varie, E_s^{m-1} désignant le fibré image réciproque de $L(Z_p, m-1+j_s)$ par l'application $\alpha_s^m : G^m \longrightarrow K(Z_p, m+j_s)$; E_s^{m-1} a pour base G^m et pour fibre $K(Z_p, m-1+j_s)$.

Soit $\xi_r^m \in H^{m+i_r}(E^{m-1})$ l'image de la classe fondamentale $\gamma_r^m \in H^{m+i_r}(G^m)$. Et soit $\xi^m = \sum_r \xi_r^m$. On a

$$(2) \qquad a^m(\xi^m) = 0 ,$$

puisque, pour chaque s , on a

$$\sum_r a_{s,r}^m(\xi_r^m) = (\pi^m)^*(\sum_r a_{s,r}^m(\gamma_r^m)) = (\pi^m)^*(\alpha_s^m)^*(\varphi_s^m) = (\beta^{m-1})^*(\rho^m)^*(\varphi_s^m) = 0 ,$$

puisque la cohomologie de L^{m-1} est nulle. On a noté, π^m , ρ^m et β^{m-1} les applications du diagramme commutatif de fibrés

$$\begin{array}{ccc} E^{m-1} & \xrightarrow{\beta^{m-1}} & L^{m-1} \\ \downarrow \pi^m & & \downarrow \rho^m \\ G^m & \xrightarrow{\alpha^m} & F^m \end{array}$$

Supposons alors qu'on ait une opération secondaire Φ^m satisfaisant à la condition (ii) du n° 2. Puisque $\xi^m \in \sum_r H^{m+i_r}(E^{m-1})$ satisfait à (2), $\Phi^m(\xi^m)$ est défini ; c'est un élément du conoyau de l'application

$$\sum_s H^{m-1+j_s}(E^{m-1}) \xrightarrow{b^{m-1}} \sum_t H^{m-1+k_t}(E^{m-1}) ,$$

application que nous noterons $b^{m-1}(E^{m-1})$. Dans le fibré E^{m-1} de fibre F^{m-1}, notons i^{m-1} l'injection de F^{m-1} dans E^{m-1} (sur la fibre du point-base de G^m) ; i^{m-1} induit un homomorphisme

$$\operatorname{Coker} b^{m-1}(E^{m-1}) \longrightarrow \operatorname{Coker} u^{m-1} ,$$

en désignant par u^{m-1} l'application composée

$$\sum_s H^{m-1+j_s}(E^{m-1}) \xrightarrow{b^{m-1}} \sum_t H^{m-1+k_t}(E^{m-1}) \xrightarrow{(i^{m-1})^*} \sum_t H^{m-1+k_t}(F^{m-1}) .$$

Exprimons que l'opération Φ^m satisfait à la condition (ii) lorsqu'on prend pour X le fibré E^{m-1} et pour Y la fibre F^{m-1} ; on trouve facilement que l'image de $\Phi^m(\xi^m)$ dans $\operatorname{Coker} u^{m-1}$ doit être égale à la classe de l'élément

$$\sum_{t,s} b^{m-1}_{t,s}(\varphi^{m-1}_s) \in \sum_t H^{m-1+k_t}(F^{m-1}) .$$

Par conséquent, étant donné l'entier m, une condition nécessaire pour qu'il existe une opération Φ^m satisfaisant à (ii) est qu'il existe, pour chaque t, un élément

(3) $\eta^{m-1}_t \in H^{m-1+k_t}(E^{m-1})$ tel que $(i^{m-1})^*(\eta^{m-1}_t) = \sum_s b^{m-1}_{t,s}(\varphi^{m-1}_s)$,

et alors $\Phi^m(\xi^m)$ est la classe de $\eta^{m-1} = \sum_t \eta^{m-1}_t$ dans l'espace vectoriel $\operatorname{Coker} b^{m-1}(E^{m-1})$.

On va montrer que, en fait, si l'on suppose que les matrices données a et b satisfont à $b \circ a = 0$, il existe effectivement des éléments η^{m-1}_t satisfaisant à la condition (3). Pour cela, considérons le diagramme commutatif

(**)
$$\begin{tikzcd}
\sum_s H^{m+j_s}(F^m) \arrow[r, "b^m"] \arrow[d, "(\alpha^m)^*"] & \sum_t H^{m+k_t}(F^m) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "(\alpha^m)^*"] & \sum_t H^{m-1+k_t}(F^{m-1}) \arrow[d, "\delta"] \\
\sum_s H^{m+j_s}(G^m) \arrow[r, "b^m"] & \sum_t H^{m+k_t}(G^m) \arrow[r, "(\pi^m)^*"] & \sum_t H^{m+k_t}(E^{m-1}, F^{m-1})
\end{tikzcd}$$

dans lequel la commutativité du carré de droite résulte de la définition de la suspension σ et de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
H^{m+k_t}(F^m) & \xrightarrow{(\rho^m)^*} & H^{m+k_t}(L^{m-1},F^{m-1}) & \xleftarrow[\approx]{\delta} & H^{m-1+k_t}(F^{m-1}) \\
\downarrow (\alpha^m)^* & & \downarrow (\beta^{m-1})^* & & \updownarrow \text{id.} \\
H^{m+k_t}(G^m) & \xrightarrow{(\eta^m)^*} & H^{m+k_t}(E^{m-1},F^{m-1}) & \xleftarrow{\delta} & H^{m-1+k_t}(F^{m-1})
\end{array}$$

Soit alors $\varphi^m = \sum_s \varphi_s^m \in \sum_s H^{m+j_s}(F^m)$; la relation (1') entraîne

$$b^m(\alpha^m)^*(\varphi^m) = \sum_{t,s,r} b_{t,s}^m\, a_{s,r}^m\, (\gamma_r^m) = 0 \;;$$

donc, dans le diagramme (**) , l'élément $\varphi^m \in \sum_s H^{m+j_s}(F^m)$ a une image nulle dans $\sum_t H^{m+k_t}(E^{m-1},F^{m-1})$, c'est-à-dire

$$\delta\,\sigma\, b^m(\varphi^m) = 0 \,,$$

et comme $\sigma b^m(\varphi^m) = b^{m-1}\sigma(\varphi^m) = b^{m-1}(\varphi^{m-1})$, on en conclut que δ s'annule sur $\sum_s b_{t,s}^{m-1}(\varphi_s^{m-1})$, ce qui, vu la suite exacte de cohomologie relative à E^{m-1} et F^{m-1} , implique précisément l'existence d'un élément η_t^{m-1} satisfaisant à (3).

4. Suspension.

Avant d'aller plus loin, regardons comment l'"espace universel" E^{m-1} varie avec l'entier m . Rappelons que E^{m-1} est bien défini à un isomorphisme près.

On va utiliser l'"espace des chemins" et l'"espace des lacets" de Moore, au sens simplicial (cf. Séminaire 1954/55, exposé 19). Soit X un ensemble simplicial, dont on supposera qu'il a un seul "sommet" (simplexe de dimension 0) ; notons $S_n(X)$ l'ensemble des simplexes de dimension n . On définit un nouvel ensemble simplicial $\Gamma(X) = Y$, comme suit : $S_n(Y)$ est, par définition, $S_{n+1}(X)$; pour la commodité de l'écriture, on notera λ la bijection $S_{n+1}(X) \longrightarrow S_n(Y)$; on définit les opérations de face et de dégénérescence, sur Y , par

$$\partial_i \lambda = \lambda\, \partial_{i+1} \quad , \quad s_i \lambda = \lambda\, s_{i+1} \,.$$

L'application $\pi = d_o\, \lambda^{-1} : Y \longrightarrow X$ est alors une application simpliciale, et si X satisfait à la condition d'extension de Kan l'application π est fibrée au sens de Kan (Séminaire 1956/57, exposé 1), ce qui implique que Y satisfait à la condition de Kan. La fibre Z (ensemble des éléments de Y que π envoie sur le sous-ensemble simplicial de X formé des dégénérés de l'unique élément de $S_o(X)$) est un ensemble simplicial (de Kan) qu'on notera $\Omega(X)$: c'est l'"espace des lacets" de X. L'application $\rho = \lambda s_o : X \longrightarrow Y$ n'est pas une application simpliciale, cependant elle est compatible avec les ∂_i sauf ∂_o, et avec tous les s_i ; on a de plus $\pi\rho$ = identité. L'application $\rho\lambda^{-1} : Y \longrightarrow Y$, qui augmente la dimension d'une unité, sert à définir un opérateur d'homotopie qui montre que Y est <u>acyclique</u>; $Y = \Gamma(X)$ joue ainsi le rôle d'espace des chemins d'origine donnée dans X. On voit que $\Omega(X)$ est la fibre d'un fibré acyclique $\Gamma(X)$ de base X ; on en déduit notamment une suspension en homologie et en cohomologie :

$$H_n(\Omega(X)) \longrightarrow H_{n+1}(X)\ , \qquad H^{n+1}(X) \longrightarrow H^n(\Omega(X))\ .$$

En fait, l'application de suspension en homologie est induite par

$$\lambda^{-1} : \Omega(X) \longrightarrow X\ ,$$

qui anticommute avec le "bord" $\partial = \sum_i (-1)^i \partial_i$ en vertu de la relation

$$\sum_i (-1)^i \lambda^{-1} \partial_i = \pi - \sum_i (-1)^{i+1} \partial_{i+1} \lambda^{-1}\ .$$

Lorsque X est un groupe abélien simplicial, alors $\Gamma(X)$ et $\Omega(X)$ sont des groupes abéliens, $\Omega(X)$ étant alors le noyau de l'homomorphisme de groupes abéliens $\pi : \Gamma(X) \longrightarrow X$. En particulier, lorsque $X = K(\pi,n+1)$, alors $\Gamma(X)$ s'identifie à $L(\pi,n)$ et $\Omega(X)$ à $K(\pi,n)$, et l'on retrouve la suite exacte de groupes abéliens simpliciaux

$$0 \longrightarrow K(\pi,n) \longrightarrow L(\pi,n) \longrightarrow K(\pi,n+1) \longrightarrow 0\ .$$

Le choix d'une application simpliciale

$$\alpha^{m+1}_{s,r} : K(Z_p,m+1+i_r) \longrightarrow K(Z_p,m+1+j_s)$$

définit une application simpliciale $L(Z_p,m+i_r) \longrightarrow L(Z_p,m+j_s)$ et une application simpliciale $K(Z_m,m+i_r) \longrightarrow K(Z_p,m+j_s)$: il suffit d'appliquer les foncteurs Γ et Ω à l'application $\alpha^{m+1}_{s,r}$. Appliquons aussi ces deux foncteurs au diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E^m & \longrightarrow & L^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ G^{m+1} & \xrightarrow{\alpha^{m+1}} & F^{m+1} \end{array}$$

qui a servi à définir le fibré E^m à partir de l'application α^{m+1} ; prenons pour α^m l'application $\Omega(\alpha^{m+1})$: on trouve alors pour E^{m-1} le fibré $\Omega(E^m)$. Ainsi E^{m-1} <u>est la fibre d'un fibré acyclique</u> $\Gamma(E^m)$, <u>de base</u> E^m.

Il sera utile de précider la relation qui existe entre le foncteur Ω précédent (qui opère dans la catégorie des ensembles simpliciaux ayant un seul sommet), et le foncteur "espace des lacets" (qui opère dans la catégorie des espaces topologiques avec point-base) ; pour éviter toute confusion, nous noterons Ω_T le foncteur "espace des lacets". Soit T le foncteur "réalisation topologique", qui associe à tout ensemble simplicial un espace topologique (cf. exposé 7).

LEMME 1. - <u>Pour tout ensemble simplicial</u> X <u>à un seul sommet, on a une application continue (naturelle vis-à-vis de</u> X)

$$T\,\Omega X \longrightarrow \Omega_T TX \ ;$$

<u>de plus, lorsque</u> X <u>satisfait à la condition d'extension de Kan, cette application induit un isomorphisme des groupes d'homologie et de cohomologie.</u>

DÉMONSTRATION. - Notons $\sum$ le foncteur qui, à chaque espace topologique, associe son complexe singulier (ce foncteur était noté S dans l'exposé 7). On a un morphisme de foncteurs

$$\Omega \longrightarrow \sum \Omega_T T \tag{4}$$

défini comme suit : si X est un ensemble simplicial, un n-simplexe de ΩX est, par définition, un (n+1)-simplexe u de X tel que $\partial_0 u = 0$, en notant 0, dans chaque dimension, le dégénéré de l'unique sommet de X. Or u définit, comme on sait, un simplexe singulier de la réalisation géométrique TX, simplexe singulier dont la face ∂_0 est appliquée au point-base de TX ; ce (n+1)-simplexe définit donc canoniquement un n-simplexe singulier de l'espace des lacets de l'espace TX. D'où le morphisme (4), car la fonctorialité en X est évidente. Plus généralement, ΓX s'envoie dans $\sum \Gamma_T TX$, en notant Γ_T le foncteur qui, à un espace avec point-base, associe l'espace des chemins ayant le point-base pour origine. Si maintenant X satisfait à la condition de Kan, ΩX est, comme on l'a vu ci-dessus, la fibre du fibré de Kan acyclique $\Gamma(X)$, de base X ; de plus, $\Omega_T TX$ est la fibre du fibré acyclique $\Gamma_T TX$, de base TX, et par suite $\sum \Omega_T TX$ est la fibre du fibré acyclique $\sum \Gamma_T TX$, de base $\sum TX$. Le premier fibré s'envoie dans le second, de façon que l'application des bases $X \longrightarrow \sum TX$ définisse un <u>isomorphisme des groupes d'homotopie</u>. Il s'ensuit que l'application des fibres définit un isomorphisme des groupes d'homotopie (cf. la suite exacte d'homotopie d'un fibré), et par suite un isomorphisme des groupes d'homologie (exposé 4, théorème 5).

Appliquons maintenant le foncteur T à (4). Il vient, pour chaque X ,

$$T\,\Omega\,X \longrightarrow T\sum \Omega_T\,TX \;;$$

et cette application continue définit un isomorphisme des groupes d'homologie. Or, pour tout espace Y , $T\sum Y$ s'envoie naturellement dans Y , ce qui définit un isomorphisme des groupes d'homologie (exposé 7). Donc l'application composée

$$T\,\Omega\,X \longrightarrow T\sum\Omega_T\,TX \longrightarrow \Omega_T\,TX$$

définit un isomorphisme des groupes d'homologie, ce qui démontre le lemme 1.

Appliquons maintenant le lemme 1 à l'ensemble simplicial E^m . On a vu que $\Omega E^m = E^{m-1}$. On trouve donc une application continue

$$TE^{m-1} \longrightarrow \Omega_T\,TE^m \,, \tag{5}$$

qui définit un isomorphisme des groupes d'homologie (et de cohomologie). La suspension $H^{q+1}(TE^m) \longrightarrow H^q(\Omega_T\,TE^m)$ définit donc une suspension

$$H^{q+1}(E^m) \longrightarrow H^q(E^{m-1}) \,,$$

qu'on pourrait aussi obtenir directement à l'aide du fibré acyclique $\Gamma(E^m)$, de base E^m , de fibre E^{m-1} .

5. Démonstration du théorème fondamental.

Les matrices a et b étant données, une opération cohomologique secondaire consiste dans la donnée, pour chaque ensemble simplicial X , d'une application (non nécessairement linéaire)

$$\Phi^m(X) : \mathrm{Ker}\; a^m(X) \longrightarrow \mathrm{Coker}\; b^{m-1}(X)$$

ayant un caractère fonctoriel en X . Nous laissons pour le moment de côté les conditions (i) et (ii) du n° 2.

On va voir que l'ensemble simplicial E^{m-1} du n° 3 joue le rôle d'un "espace universel" pour de telles opérations, l'élément $\xi^m \in \sum_r H^{m+1_r}(E^{m-1})$ jouant le rôle de "classe fondamentale".

PROPOSITION 1. - Etant donné $\eta^{m-1} = \sum_t \eta_t^{m-1}$, avec $\eta_t^{m-1} \in H^{m-1+k_t}(E^{m-1})$, il existe au plus une opération cohomologique secondaire Φ^m telle que $\Phi^m(\xi^m)$ soit égal à la classe de η^{m-1} dans Coker $b^{m-1}(E^{m-1})$, en notant $b^{m-1}(E^{m-1})$ l'application

$$\sum_s H^{m-1+j_s}(E^{m-1}) \xrightarrow{b^{m-1}} \sum_t H^{m-1+k_t}(E^{m-1}) .$$

Lorsque η^{m-1} est dans l'image de la suspension

$$\sigma : \sum_t H^{m+k_t}(E^m) \longrightarrow \sum_t H^{m-1+k_t}(E^{m-1})$$

et satisfait à (3), une telle opération Φ^m existe effectivement ; elle est additive et satisfait à (ii).

DÉMONSTRATION. - Prouvons d'abord l'unicité de Φ^m, si elle existe. Soit donné $u \in \sum_r H^{m+i_r}(X)$, tel que $a^m(u) = 0$. S'il existe une application $g : X \longrightarrow E^{m-1}$ telle que $g^*(\xi^m) = u$, on doit avoir

$$\Phi^m(u) = g^* \Phi^m(\xi^m) ,$$

donc $\Phi^m(u)$ doit être la classe, dans Coker $b^{m-1}(X)$, de l'élément $g^*(\eta^{m-1})$, ce qui prouve l'unicité. Tout revient donc à montrer l'existence d'une telle application g.

Cherchons $\pi^m \circ g = f : X \longrightarrow G^m$. Puisque $\xi^m = (\pi^m)^*(\chi^m)$, la relation $g^*(\xi^m) = u$ équivaut à $f^*(\chi^m) = u$.

Puisque G^m est un produit de complexes d'Eilenberg-MacLane, la relation $f^*(\chi^m)=u$ définit une application

$$f : X \longrightarrow G^m$$

à une homotopie près. Tout revient à prouver que f peut être factorisée en passant par E^{m-1}. Or l'hypothèse $a^m(u) = 0$ exprime que l'application composée

$$X \xrightarrow{f} G^m \xrightarrow{\alpha^m} F^m$$

est homotope à une constante ; donc le fibré de base X, induit par l'application $\alpha^m \circ f$ de X dans la base F^m du fibré L^{m-1}, possède une section ; cela revient précisément à dire que f peut être relevée en une application $g : X \longrightarrow E^{m-1}$.

C.Q.F.D.

Supposons désormais que η^{m-1} satisfasse à (3) <u>et soit dans l'image de la suspension.</u> Pour prouver <u>l'existence</u> de Φ^m, il suffit de montrer que si g_1 et g_2 sont deux applications $X \longrightarrow E^{m-1}$ telles que

$$(g_i)^*(\xi^m) = u \quad \text{pour } i = 1, 2,$$

la différence $(g_1)^*(\eta^{m-1}) - (g_2)^*(\eta^{m-1}) \in \sum_t H^{m-1+k_t}(E^{m-1})$ est dans l'image de $b^{m-1}(E^{m-1})$. Soit $f_i = \pi^m \circ g_i$, pour $i = 1, 2$. Les applications f_1 et f_2 sont homotopes ; puisque f_1 se relève en g_1, f_2 se relève en une application g' homotope à g_1, et il suffit donc de prouver que

$$(g')^*(\eta^{m-1}) - (g_2)^*(\eta^{m-1})$$

est dans l'image de $b^{m-1}(E^{m-1})$. On est donc ramené au cas de deux applications g_1 et g_2 telles que $\pi^m \circ g_1 = \pi^m \circ g_2$.

Puisque E^{m-1} est fibré principal de base G^m, de groupe F^{m-1}, il existe une application $h : X \longrightarrow F^{m-1}$ telle que

$$g_2 = h.g_1, \tag{6}$$

la multiplication étant définie par les opérations (à gauche) du groupe structural F^{m-1} dans le fibré E^{m-1}. Admettons provisoirement le

LEMME 2. - <u>Notons</u> i^{m-1} <u>l'injection de la fibre</u> F^{m-1} <u>dans le fibré</u> E^{m-1} <u>(sur la</u> fibre située au-dessus du point-base). <u>La relation</u> (6) <u>entraîne</u>

$$(g_2)^*(\eta^{m-1}) = (g_1)^*(\eta^{m-1}) + h^*(i^{m-1})^*(\eta^{m-1})$$

<u>lorsque</u> $\eta^{m-1} \in H^*(E^{m-1})$ <u>est dans l'image de la suspension.</u>

Poursuivons alors la démonstration de la proposition 1. Puisque η^{m-1} satisfait à (3) par hypothèse, $(i^{m-1})^*(\eta^{m-1})$ est dans l'image de $b^{m-1}(F^{m-1})$, donc $h^*(i^{m-1})^*(\eta^{m-1})$ est dans l'image de $b^{m-1}(E^{m-1})$, ce que l'on voulait justement démontrer.

Ainsi nous avons défini une opération cohomologique secondaire Φ^m. Montrons qu'elle satisfait à la condition (ii). Soit $x' \in \sum_r H^{m+i_r}(X,Y)$ dont l'image x dans $\sum_r H^{m+i_r}(X)$ appartienne au noyau de a^m ; x' définit une application $X \longrightarrow G^m$ qui envoie le sous-truc Y au point-base 0 de G^m. De plus, $X \longrightarrow G^m$ se relève en $X \longrightarrow E^{m-1}$, et dans ce relèvement Y est appliqué dans la fibre

$i^{m-1}(F^{m-1})$. La condition (3) exprime que l'opération Φ^m satisfait à la condition (ii) pour le couple $(E^{m-1}, i^{m-1}(F^{m-1}))$ et l'élément ξ^m ; alors, par image réciproque, on trouve que, pour le couple (X,Y) et l'élément x' , Φ^m satisfait à la condition (ii) .

C.Q.F.D.

La démonstration de la proposition 1 serait achevée si l'on prouvait que l'opération Φ^m est <u>additive</u>. Ceci sera fait plus loin, et l'on va d'abord prouver le lemme 2 ci-dessus.

Pour cela, considérons les réalisations topologiques TX , TF^{m-1} , TE^{m-1} , et les applications

$$Tg_i : TX \longrightarrow TE^{m-1} , \quad Th : TX \longrightarrow TF^{m-1} .$$

Puisque F^{m-1} opère dans E^{m-1} , l'espace TF^{m-1} (qui se plonge dans TE^{m-1} par $T(i^{m-1})$) opère dans l'espace TE^{m-1} , et Tg_2 est égale au produit $(Th).(Tg_1)$.

D'après le lemme 1, on a des applications

$$TE^{m-1} \longrightarrow \Omega_T\, TE^m , \quad TF^{m-1} \longrightarrow \Omega_T\, TF^m$$

qui définissent des isomorphismes des groupes de cohomologie. Soit f_i l'application composée $TX \xrightarrow{Tg_i} TE^{m-1} \longrightarrow \Omega_T\, TE^m$, et soit k l'application composée $TX \xrightarrow{Th} TF^{m-1} \longrightarrow \Omega_T\, TF^m$. On a $f_2 = k.f_1$, la multiplication des applications étant définie par les opérations de $\Omega_T TF^m$ dans $\Omega_T TE^m$, elles-mêmes déduites des opérations de TF^m dans TE^m en appliquant le foncteur Ω_T . Mais il est classique que l'application ainsi définie

$$\Omega_T TF^m \times \Omega_T TE^m \longrightarrow \Omega_T TE^m$$

est homotope à celle obtenue à l'aide de la <u>composition des lacets</u> de l'espace TE^m (en commençant par plonger TF^m dans TE^m par l'injection Ti^m) . Finalement, on voit que le lemme 2 va résulter du suivant :

LEMME 3. - <u>Soient</u> Y <u>et</u> U <u>des espaces topologiques avec point-base ; soient</u> f_1 <u>et</u> f_2 <u>deux applications continues</u> $Y \longrightarrow \Omega_T(U)$ <u>respectant les points-base, et soit</u> $f_3 = f_1.f_2$, <u>la multiplication étant définie par la loi de composition de l'espace des lacets de</u> U . <u>Si</u> $\eta \in H^*(\Omega_T(U))$ <u>est dans l'image de la suspension</u>

$\sigma : H^*(U) \longrightarrow H^*(\Omega_T(U))$, <u>on a</u>

$$f_3^*(\eta) = f_1^*(\eta) + f_2^*(\eta) .$$

Il reste à prouver le lemme 3. Notons g_i l'application $SY \longrightarrow U$ qui correspond canoniquement à f_i (en désignant par SY la suspension de Y) . On sait qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^{q+1}(U) & \xrightarrow{\sigma} & H^q(\Omega_T U) \\ \downarrow g_i^* & & \downarrow f_i^* \\ H^{q+1}(SY) & \xrightarrow{\sigma} & H^q(Y) \end{array} ,$$

pour $i = 1 , 2 ; 3$. Le lemme 3 sera établi si l'on montre que

(7) $$g_3^* = g_1^* + g_2^* .$$

Or l'application g_3 est composée des applications suivantes

$$SY \xrightarrow{\lambda} (SY) \vee (SY) \xrightarrow{g_1 \vee g_2} U \vee U \xrightarrow{\mu} U ,$$

où μ est l'application canonique évidente, et où λ est l'application qui envoie la classe de $(t , y) \in I \times Y$ dans la classe de $(2t , y)$ du premier facteur SY si $0 \leqslant t \leqslant 1/2$, dans la classe de $(2t - 1 , y)$ du second facteur SY si $1/2 \leqslant t \leqslant 1$. De plus, g_1 est homotope à l'application composée $\mu \circ (g_1 \vee e) \circ \lambda$, où e désigne l'application constante $SY \longrightarrow U$ (qui envoie SY au point-base), et de même g_2 est homotope à $\mu \circ (e \vee g_2) \circ \lambda$. On sait que les deux inclusions naturelles $SY \longrightarrow (SY) \vee (SY)$ définissent un isomorphisme

$$H^*((SY) \vee (SY)) \simeq H^*(SY) \oplus H^*(SY) ,$$

de sorte que l'homomorphisme $H^*(U) \longrightarrow H^*((SY) \vee (SY))$ défini par $\mu \circ (g_1 \vee g_2)$ est la somme des homomorphismes définis par $\mu \circ (g_1 \vee e)$ et par $\mu \circ (e \vee g_2)$. D'où la relation (7) .

Ceci démontre le lemme 3, et par suite aussi le lemme 2.

Il reste à achever la démonstration de la proposition 1, en montrant que l'opération Φ_m est <u>additive</u>. Or $\bar{\Phi}_m$ a été obtenue comme opération cohomologique secondaire dans la catégorie des ensembles simpliciaux ; en raisonnant comme dans l'exposé 7, on lui associe une opération cohomologique secondaire (encore notée Φ^m) dans la catégorie des espaces topologiques. Soient alors u et u' deux éléments de $\sum_r H^{m+i_r}(X)$ situés dans le noyau de a^m. Soient g et g' deux applications $X \longrightarrow E^{m-1}$ telles que $g^*(\xi^m) = u$, $g'^*(\xi^m) = u'$. Soient f et f' les applications continues $TX \longrightarrow \Omega_T TE^m$ qui leur correspondent, et considérons leur produit $f.f'$ (en utilisant la loi de composition des lacets de l'espace TE^m). Identifions u et u' à des éléments de $H^*(TX)$, et ξ^m et η^{m-1} à des éléments de $H^*(\Omega_T TE)$. Puisque ξ^m et η^{m-1} sont dans l'image de la suspension, on a, en vertu du lemme 3,

$$(f.f')^*(\xi^m) = f^*(\xi^m) + f'^*(\xi^m) = u + u' ,$$
$$(f.f')^*(\eta^{m-1}) = f^*(\eta^{m-1}) + f'^*(\eta^{m-1}) = \Phi^m(u) + \Phi^m(u') ,$$

et comme

$$(f.f')^*(\eta^{m-1}) = (f.f')^* \Phi^m(\xi^m) = \Phi^m(f.f')^*(\xi^m) = \Phi^m(u + u') ,$$

on obtient bien

$$\Phi^m(u + u') = \Phi^m(u) + \Phi^m(u') .$$

6. Démonstration du théorème fondamental (Fin).

PROPOSITION 2. - *Soit* Φ^{m+1} : $\mathrm{Ker}\ a^{m+1} \longrightarrow \mathrm{Coker}\ b^m$ *une opération cohomologique secondaire satisfaisant à* (ii) (c'est-à-dire "compatible avec δ"). *Soit* $\eta^m \in \sum_t H^{m+k_t}(E^m)$ *un élément tel que*

$$(i^m)^*(\eta_t^m) = \sum_s b_{t,s}^m(\varphi_s^m)$$

et que $\Phi^{m+1}(\xi^{m+1})$ *soit la classe de* η^m *dans* $\mathrm{Coker}\ b^m(E^m)$. *Alors l'élément* η^{m-1} *déduit de* η^m *par suspension définit l'opération* Φ^m *qui est déduite de* Φ^{m+1} *par suspension.*

DÉMONSTRATION. - C'est évident à partir des définitions, compte tenu de l'unicité de l'opération Φ^m définie par η^{m-1}.

Cela dit, cherchons une collection $\Phi = (\Phi^m)$ d'opérations Φ^m, *stable par suspension* (c'est-à-dire satisfaisant à (i)). Compte tenu des propositions 1 et 2, il revient au même de se donner, pour chaque m, un élément $\eta^{m-1} = \sum_t \eta_t^{m-1}$ satisfaisant à (3), de façon que, pour tout m, η^{m-1} se déduise de η^m par suspension. Il est clair que si un η^m satisfait à (3) et si $\eta^{m-1} = \sigma(\eta^m)$,

η^{m-1} satisfait à (3) . D'autre part, pour un entier k_t donné, la suspension

$$H^{m+k_t}(E^m) \longrightarrow H^{m-1+k_t}(E^{m-1})$$

est un isomorphisme pour m assez grand. Ainsi le choix, pour <u>un</u> m assez grand, d'un η^{m-1} satisfaisant à (3), détermine une collection Φ stable par suspension. Et comme un tel choix est possible puisque l'on a supposé $b \circ a = 0$ (cf. la fin du n° 3), on voit qu'il existe au moins une Φ stable par suspension.

D'après la proposition 1, l'opération Φ est additive. Il reste à prouver que si $\Phi = (\Phi^m)$ est une telle opération, toutes les autres sont de la forme $\Phi + c$, $c = (c^m)$ étant une opération primaire.

Soient donc (η^{m-1}) et (η'^{m-1}) deux familles stables par suspension. D'après (3), l'image de $\eta^{m-1} - \eta'^{m-1}$ dans $H^*(F^{m-1})$ est nulle. Si m est assez grand, ceci implique que $\eta^{m-1} - \eta'^{m-1}$ est dans l'image de $H^*(G^m)$ (cohomologie de la base du fibré E^{m-1} , de fibre F^{m-1}) ; cela résulte de la suite exacte de cohomologie d'un fibré, valable, comme on sait, jusqu'en dimension $r + s - 2$ lorsque la cohomologie de la base est nulle en dimension $< r$ et celle de la fibre en dimension $< s$. Soit donc, pour un m assez grand, un élément $\zeta \in H^*(G^m)$ tel que $(\pi^m)^*(\zeta) = \eta^{m-1} - \eta'^{m-1}$. Soit c l'opération cohomologique telle que $\zeta = c(\gamma^m)$, γ^m désignant toujours la classe fondamentale de G^m . On a

$$\eta^{m-1} - \eta'^{m-1} = c((\pi^m)^*(\gamma^m)) = c(\zeta^m) ,$$

et puisque ceci est vrai pour un m , c'est vrai pour tous les m . Ceci prouve que si (Φ^m) et (Φ'^m) sont les opérations cohomologiques stables définies par la collection des η^{m-1} et des η'^{m-1} , on a $\Phi^m = \Phi'^m + c^m$ pour tout m . La démonstration est achevée.

7. <u>Un exemple</u>.

Prenons un seul r , un seul t , et trois s , avec :

$i_r = 0$, $j_1 = 1$, $j_2 = 3$, $j_3 = 4$, $k_t = 5$.

Prenons
$$\begin{cases} a_{1,o} = Sq^1 , & a_{3,o} = Sq^3 , \quad a_{4,o} = Sq^4 , \\ b_{5,1} = Sq^4 , & b_{5,3} = Sq^2 , \quad b_{5,4} = Sq^1 . \end{cases}$$

On a bien $b \circ a = 0$, à cause de la relation $Sq^4 Sq^1 + Sq^2 Sq^3 + Sq^1 Sq^4 = 0$.

A ces données correspond une opération secondaire stable $\Phi = (\Phi^m)$; pour chaque

m , Φ^m est définie sur les $u \in H^m(X)$ tels que

$$Sq^1 u = 0 , \quad Sq^3 u = 0 , \quad Sq^4 u = 0 ,$$

et prend ses valeurs dans la quotient de $H^{m+4}(X)$ par la somme des images des applications

$$(8) \qquad \begin{cases} Sq^4 : H^m(X) \longrightarrow H^{m+4}(X) , \\ Sq^2 : H^{m+2}(X) \longrightarrow H^{m+4}(X) , \\ Sq^1 : H^{m+3}(X) \longrightarrow H^{m+4}(X) . \end{cases}$$

Toute autre opération stable (Φ'^m) correspondant aux mêmes données se déduit de celle-là par addition d'une opération primaire de degré 4 ; or toute opération primaire de degré 4 est combinaison de Sq^4 et de $Sq^3 Sq^1 = Sq^1 Sq^2 Sq^1$, donc sa valeur est dans la somme des images des applications (8) ; par suite, modulo l'indétermination de Φ , une telle opération primaire est nulle. Finalement, <u>il existe une</u> Φ <u>et une seule, stable par suspension, définie par les matrices</u> a <u>et</u> b <u>précédentes</u>. ADAMS la note Ψ , et il montre que si $u \in H^2(X)$ satisfait à $Sq^1 u = 0$, $\Psi^2(u)$, qui est alors défini, est la classe de u^3 dans $H^6(X)/(Sq^1 H^5(X) + Sq^2 H^4(X))$. La démonstration est délicate.

BIBLIOGRAPHIE unique

(pour cet exposé et les suivants)

[1] ADAMS (J. F.). - Non-existence of elements of Hopf-invariant one. - Princeton, 1958, multigraphié.