H. Cartan

Quelques propriétés des algèbres de Hopf, applications à l'algèbre de Steenrod

Séminaire Henri Cartan, tome 11, n° 2 (1958-1959), exp. n° 12, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_2_A3_0>

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ALGÈBRES DE HOPF.
APPLICATIONS À L'ALGÈBRE DE STEENROD

par H. CARTAN

1. Eléments décomposables, éléments primitifs.

Soit A une algèbre graduée augmentée, avec élément unité. Notons $\eta : K \to A$ l'injection canonique du corps de base K (pour simplifier, on suppose que A est une algèbre sur un corps K), et notons $\varepsilon : A \to K$ l'augmentation. On a $\varepsilon \circ \eta$ = identité. On notera $I(A)$ le noyau de ε, qui s'identifie au conoyau de η. La multiplication

$$\Phi : A \otimes A \to A \quad \text{(les produits tensoriels sont pris sur } K)$$

induit une application

$$\varphi : I(A) \otimes I(A) \to I(A) \quad .$$

Les éléments de l'image de φ sont appelés éléments décomposables de $I(A)$ (ou, par abus de langage, éléments décomposables de A). On notera $Q(A)$ le conoyau de φ :

$$Q(A) = I(A)/(I(A))^2 \quad .$$

Par abus de langage, on appelle éléments indécomposables les éléments de $Q(A)$. Observons que $Q(A)$ est un espace vectoriel gradué. Si on relève dans $I(A)$ les éléments d'une base (homogène) de $Q(A)$, on obtient un "système minimal de générateurs" de l'algèbre A (considérée comme algèbre à élément unité) : un tel système engendre A, et tout vrai sous-système ne l'engendre pas.

Soit maintenant A une coalgèbre graduée, munie de deux applications de coalgèbres graduées $\varepsilon : A \to K$ et $\eta : K \to A$, telles que $\varepsilon \circ \eta$ = identité. Soit toujours $I(A)$ le noyau de ε, identifié au conoyau de η. Il existe une application linéaire

$$\delta : I(A) \to I(A) \otimes I(A)$$

et une seule induite par Δ, c'est-à-dire telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes A \\ \downarrow & & \downarrow \\ I(A) & \xrightarrow{\delta} & I(A) \otimes I(A) \end{array}$$

soit commutatif. Le noyau $P(A)$ de δ s'appelle l'espace (vectoriel gradué) des éléments primitifs de $I(A)$, ou (par abus de langage) éléments primitifs de A. Si on suppose, ce qu'on fera toujours, que ε est élément unité pour Δ, c'est-à-dire que les deux applications composées

$$A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} K \otimes A = A$$

$$A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \xrightarrow{1 \otimes \varepsilon} A \otimes K = A$$

sont l'identité (cf. Exposé 10, paragraphe 1), une condition nécessaire et suffisante pour que $a \in I(A)$ soit primitif est que

$$\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a \quad .$$

Supposons désormais que A soit une algèbre de Hopf (au sens de l'Exposé 10, paragraphe 1). Alors $\varphi : I(A) \otimes I(A) \to I(A)$ et $\delta : I(A) \to I(A) \otimes I(A)$ sont définis, ainsi que les espaces $Q(A)$ et $P(A)$. De plus on a une application linéaire naturelle $P(A) \to Q(A)$ (puisque $P(A)$ est un sous-espace, et $Q(A)$ un espace-quotient de $I(A)$).

Soit A^* l'algèbre de Hopf duale. Alors $I(A)$ et $I(A^*)$ sont en dualité. Dans cette dualité, le sous-espace des éléments décomposables de $I(A^*)$ est l'orthogonal du sous-espace $P(A)$. On obtient donc une dualité naturelle entre $Q(A^*)$ et $P(A)$. De même, $Q(A)$ et $P(A^*)$ sont en dualité. De plus, l'application $P(A^*) \to Q(A^*)$ s'identifie à la transposée de l'application $P(A) \to Q(A)$.

Nous laissons au lecteur, à titre d'exercice, le soin de démontrer les deux propositions suivantes (cf. [3], proposition 5.6, p. 15, et theorem 4.9, p. 29) :

PROPOSITION 1. - Soient u et v deux éléments homogènes de $P(A)$, de degrés r et s ; alors

$$uv - (-1)^{rs} vu \quad (\text{"crochet gradué" de } u \text{ et } v)$$

appartient à $P(A)$, qui est donc une algèbre de Lie graduée.

PROPOSITION 2. - Supposons que le corps de base K soit de caractéristique $p \neq 0$. Alors, pour que l'application $P(A) \to Q(A)$ soit injective, il faut et il suffit que :

1° la multiplication de A soit associative et commutative (i. e. anticommutative) ;

2° la puissance p-ième de tout élément de $I(A)$ soit nulle.

EXEMPLE. - (cf. Séminaire 1954/55) Soit Π un groupe abélien de type fini, et n un entier ≥ 1. Alors l'homologie $H_*(\Pi, n ; Z_p)$ et la cohomologie $H^*(\Pi, n ; Z_p)$ sont des algèbres de Hopf en dualité. La multiplication de $H_*(\Pi, n ; Z_p)$ est associative et commutative ; l'application $P(H_*) \to Q(H_*)$ est injective ; l'application $P(H^*) \to Q(H^*)$ est surjective, et son noyau se compose des puissances p-ièmes. On montre en outre que $P(H^*)$ est exactement l'image de la suspension $H^*(\Pi, n+1 ; Z_p) \to H^*(\Pi, n ; Z_p)$, tandis que l'espace des éléments décomposables de $H_*(\Pi, n ; Z_p)$ est exactement le noyau de la suspension $H_*(\Pi, n ; Z_p) \to H_*(\Pi, n+1 ; Z_p)$.

2. *Sous-algèbres de Hopf et algèbres-quotients.*

On définit d'une manière évidente la notion *d'homomorphisme* d'algèbres de Hopf : $A \to B$. La transposée $B^* \to A^*$ est alors aussi un homomorphisme d'algèbres de Hopf ; si l'une des applications est injective, l'autre est surjective, et vice-versa.

Le cas où l'homomorphisme $A \to B$ est injectif (resp. surjectif) donne la notion de *sous-algèbre de Hopf* d'une algèbre de Hopf B (resp. d'*algèbre de Hopf quotient* d'une algèbre de Hopf A).

PROPOSITION 3. - *Soit* A *une sous-algèbre de Hopf d'une algèbre de Hopf* B. *Soit* $f : B \otimes I(A) \to B$ *l'application composée*

$$B \otimes I(A) \to B \otimes B \xrightarrow{\Phi} B \quad ,$$

où $I(A) \to B$ *est induite par l'injection* $A \to B$, *et où* Φ *désigne la multiplication de* B. *Alors le conoyau* C *de* f *est muni d'une application diagonale* $C \to C \otimes C$ *induite par l'application diagonale* Δ *de* B ; *si en outre la multiplication de* B *est associative,* A *est le noyau de l'application composée*

$$g : B \xrightarrow{\Delta} B \otimes B \to B \otimes I(C) \quad ,$$

où $B \to I(C)$ *désigne l'application composée* $B \to C \to I(C)$.

(Ainsi si la connaissance du quotient C de B permet de retrouver la sous-algèbre A de B).

On a une proposition duale :

PROPOSITION 3 bis. - *Soit* $B \to A$ *un homomorphisme surjectif d'algèbres de Hopf.* *Soit* $f : B \to B \otimes I(A)$ *l'application composée*

$$B \xrightarrow{\Delta} B \otimes B \to B \otimes I(A) \quad .$$

Alors le noyau C de f est une sous-algèbre de B (pour la multiplication) ; si en outre l'application diagonale de B est associative, A est le conoyau de l'application composée

$$g : B \otimes I(C) \longrightarrow B \otimes B \longrightarrow B \quad .$$

Démontrons par exemple la proposition 1 ; la proposition 1 bis s'en déduira en passant aux algèbres duales. L'application diagonale Δ de B envoie $I(A)$ dans $I(A) \otimes A + A \otimes I(A)$, donc elle envoie $B.I(A)$ (image de l'application $f : B \otimes I(A) \longrightarrow B$) dans

$$B.I(A) \otimes B + B \otimes B.I(A) \quad ,$$

et par suite Δ passe au quotient et définit $C \longrightarrow C \otimes C$.

Le noyau de g contient évidemment A , car ce noyau contient $I(A)$ et K . Il reste à montrer que si la multiplication de B est associative, tout $x \in I(B)$ tel que $g(x) = 0$ est dans $I(A)$. Or $(\varepsilon \otimes 1) \circ g$ n'est autre que la projection $B \longrightarrow I(C)$; donc si $g(x) = 0$, x est dans le noyau de $B \longrightarrow I(C)$, c'est-à-dire dans $B.I(A)$. Supposons alors que

$$x \in (\sum_{q \leq n} B_q).I(A) \quad , \qquad x \text{ homogène de degré } n + k \ ;$$

on va montrer que si $n \geqslant 1$, on a $x \in (\sum_{q < n} B_q).I(A)$; d'où, par récurrence, $x \in I(A)$, ce qu'on veut démontrer.

Pour cela, prenons une K-base (a_i) de l'espace vectoriel des éléments de degré k de $I(A)$; on a

$$x = \sum_i b_i \, a_i + x' \quad , \quad \text{avec} \quad x' \in (\sum_{q < n} B_q).I(A) \quad , \quad b_i \in B_n \quad .$$

Puisque $n \geqslant 1$, on a

$$g(b_i \, a_i) = (-1)^{(\deg a_i)(\deg b_i)} \, a_i \otimes p(b_i) \quad \text{modulo} \quad B \otimes (\sum_{q<n} C_q) \quad ,$$

en notant p l'application $B \longrightarrow I(C)$. De plus $g(x') \in B \otimes (\sum_{q<n} C_q)$; de sorte que l'hypothèse $g(x) = 0$ donne

$$\sum_i (-1)^{(\deg a_i)(\deg b_i)} \, a_i \otimes p(b_i) \in B \otimes (\sum_{q<n} C_q) \quad .$$

Puisque les a_i sont linéairement indépendants, on a donc $p(b_i) = 0$; autrement dit, $b_i \in B.I(A)$, et par suite (pour une raison de degré)

$$b_i \in (\sum_{q<n} B_q).I(A) \quad .$$

D'après l'associativité de la multiplication, on a

$$b_i\, a_i \in \Big(\sum_{q<n} B_q \Big).I(A) \;, \qquad \text{d'où} \quad x \in \Big(\sum_{q<n} B_q \Big).I(A) \;,$$

ce qui achève la démonstration.

DÉFINITION. - Soit A une sous-algèbre de Hopf d'une algèbre de Hopf B dont la multiplication est associative. On dit que A est une sous-algèbre normale si l'idéal à gauche $B.I(A)$ est égal à l'idéal à droite $I(A).B$; alors le conoyau C de f est muni d'une multiplication induite par celle de B, et il en résulte que C est une algèbre de Hopf. On la note $B/\!/A$, et on l'appelle l'algèbre de Hopf quotient de l'algèbre de Hopf B par la sous-algèbre normale A. S'il en est ainsi, A est le noyau de chacune des deux applications composées

$$B \xrightarrow{\Delta} B \otimes B \longrightarrow B \otimes I(C)$$

$$B \xrightarrow{\Delta} B \otimes B \longrightarrow I(C) \otimes B \qquad .$$

Dualement, soit A une algèbre de Hopf quotient d'une algèbre de Hopf B dont l'application diagonale est associative. On dit que A est un quotient normal de B si les deux applications composées

$$B \xrightarrow{\Delta} B \otimes B \longrightarrow B \otimes I(A)$$

$$B \xrightarrow{\Delta} B \otimes B \longrightarrow I(A) \otimes B$$

ont même noyau C ; alors C est une sous-algèbre de Hopf de B, qu'on note $A\backslash\!\backslash B$, et qu'on peut appeler le "noyau" de la surjection $B \to A$. S'il en est ainsi, A est le conoyau de chacune des applications composées

$$B \otimes I(C) \longrightarrow B \otimes B \xrightarrow{\Phi} B$$

$$I(C) \otimes B \longrightarrow B \otimes B \xrightarrow{\Phi} B$$

Les propositions 3 et 3 bis entraînent :

THÉORÈME 1. - Soit B une algèbre de Hopf dont la multiplication et l'application diagonale sont associatives. Si A est une sous-algèbre de Hopf normale de B, l'algèbre de Hopf quotient $C = B/\!/A$ est normale, et $A = C\backslash\!\backslash B$. Si C est une algèbre de Hopf, quotient normal de B, alors le "noyau" A de $B \to C$ est une sous-algèbre de Hopf normale de B, et $C = B/\!/A$.

REMARQUE. - Si A et B satisfont aux hypothèses de la proposition 3, alors les duales B^* et A^* satisfont aux hypothèses de la proposition 3 bis, et réciproquement. Si la multiplication de B est associative, l'application diagonale de B^* est associative ; si de plus A est une sous-algèbre normale de B, alors A^* est un quotient normal de B^*, et l'algèbre de Hopf $C = B/\!/A$ a pour duale le "noyau" de $B^* \longrightarrow A^*$.

3. Exemples tirés de l'algèbre de Steenrod et de sa duale.

EXEMPLE 1. - Nous supposons p premier impair. Soit A la sous-algèbre de S_* engendrée par les ξ_i ; c'est une sous-algèbre de Hopf (à cause de la formule (12) de l'Exposé 11). A est une sous-algèbre normale, à cause de la commutativité de la multiplication de S_*. Il est clair que $C = S_* /\!/ A$ s'identifie à l'algèbre extérieure engendrée par les τ_k, l'application diagonale étant

$$\tau_k \longrightarrow \tau_k \otimes 1 + 1 \otimes \tau_k$$

(les τ_k sont primitifs dans C). La duale C^* s'identifie à une sous-algèbre de Hopf de S^* : c'est la sous-algèbre engendrée par les β_k, qui est une algèbre extérieure ayant pour base les β^E. La sous-algèbre C^* est une sous-algèbre normale de S^* (ce qui se vérifierait directement sur la formule (18) de l'Exposé 11). De plus, ici, la duale $A^* = S^* /\!/ C^*$ s'identifie à la sous-algèbre de Hopf de S^* ayant pour base les $\mathcal{P}^R$; mais il faut prendre garde que ceci n'est pas une sous-algèbre normale de S^*. En effet, si l'idéal a gauche de S^* engendré par les $\mathcal{P}^R$ autres que 1 était un idéal à droite, cet idéal contiendrait les β_{k+1} pour tout entier $k \geq 0$, puisque (d'après l'Exposé 11, corollaire au théorème 1), on a

$$\beta_{k+1} = \mathcal{P}^{p^k} \beta_k - \beta_k \mathcal{P}^{p^k} \quad ;$$

donc $S^* /\!/ A^*$ se réduirait à la sous-algèbre engendrée par β_0 ; or τ_0 engendre dans S_* un idéal J qui est distinct de l'orthogonal de A^* (par exemple $\tau_1 \notin J$, et τ_1 est orthogonal à A^*), d'où une contradiction.

EXEMPLE 2. - Prenons $p = 2$. Soit t un entier > 0, et soit J_t l'idéal (bilatère) de S_* engendré par

$$(\xi_1)^{2^t}, \ \dots , \ (\xi_i)^{2^{t-i+1}} , \ \dots , \ (\xi_t)^2 , \ \xi_{t+1} , \ \xi_{t+2} , \ \dots$$

Soit C_t l'algèbre quotient de S_* par J_t ; multiplicativement, C_t est une algèbre de polynômes "tronquée" à t variables $\xi_1 , \dots , \xi_t$, les relations étant

$$(\xi_1)^{2^t} = 0 , \ \dots , \ (\xi_i)^{2^{t-i+1}} = 0 , \ \dots , \ (\xi_t)^2 = 0 \quad .$$

Il est immédiat que l'application diagonale de S_* (Exposé 11, formule (10)) passe au quotient dans C_t, car

$$\Delta_*(\xi_k)^{2^{t-k+1}} = \sum_{0 \leq i \leq k} (\xi_{k-i})^{2^{t-(k-i)+1}} \otimes (\xi_i)^{2^{t-k+1}} .$$

Ainsi C_t est une algèbre de Hopf, quotient de S_*. Sa duale, qu'on notera $S^*(t)$, s'identifie à une <u>sous-algèbre de Hopf de</u> S^* ; c'est la sous-algèbre ayant pour base les Sq^R, où R parcourt l'ensemble des suites $(r_1 , \dots , r_k , \dots)$ telles que

$$r_1 < 2^t , \dots , r_k < 2^{t-k} , \dots \qquad (\text{donc } r_k = 0 \text{ pour } k > t).$$

On voit que la sous-algèbre $S^*(t)$ est de dimension finie, égale à $2^{t(t+1)/2}$; et qu'<u>elle contient</u> Sq^i <u>pour</u> $i < 2^t$; <u>et ne contient aucun des</u> Sq^i <u>pour</u> $i \geq 2^t$. (On verra plus loin (théorème 3) que $S^*(t)$ est la sous-algèbre de S^* engendrée par les Sq^i pour $i < 2^t$). L'algèbre S^* est réunion des sous-algèbres $S^*(t)$ de dimension finie, et par conséquent tous les éléments de S^* de degré > 0 sont <u>nilpotents</u> (MILNOR [2]).

EXEMPLE 2 bis. - On suppose p premier impair ; soit J_t l'idéal de S_* engendré par les $(\xi_i)^{p^{t-i+1}}$ et ξ_{t+1}, ξ_{t+2}, ... comme ci-dessus, et en outre par tous les τ_k $(k \geq 0)$. C'est encore une algèbre de polynômes tronquée en $\xi_1 , \dots , \xi_t$, et une algèbre de Hopf. Sa duale est la sous-algèbre de Hopf de S^* ayant pour base les $\mathcal{P}^R$, où R parcourt l'ensemble des suites $(r_1 , \dots , r_k , \dots)$ satisfaisant à

$$r_1 < p^t , \dots , r_k < p^{t-k} , \dots \qquad (\text{donc } r_k = 0 \text{ pour } k > t).$$

La sous-algèbre en question est de dimension finie, égale à $p^{t(t+1)/2}$; elle contient $\mathcal{P}^i$ pour $i < p^t$, et ne contient pas $\mathcal{P}^i$ pour $i \geq p^t$ (on verra (théorème 3) que c'est la sous-algèbre de S^* engendrée par les $\mathcal{P}^i$ pour $i < p^t$). Il en résulte que tous les $\mathcal{P}^R$ distincts de 1 sont nilpotents.

EXEMPLE 3. - On suppose p premier impair. Soit cette fois J_t l'idéal de S_* engendré par

$$(\xi_1)^{p^t} , \dots , (\xi_i)^{p^{t-i+1}} , \dots , (\xi_t)^p , \xi_{t+1} , \xi_{t+2} , \dots$$

et les τ_k pour $k > t$. L'algèbre quotient C_t est le produit tensoriel d'une algèbre de polynômes tronquée en $\xi_1 , \dots , \xi_t$ et d'une algèbre extérieure engendrée par $\tau_o , \dots , \tau_t$. De plus, l'application diagonale de S_* (Exposé 11, formules (12) et (13)) passe au quotient dans C_t, notamment parce que $\Delta_*(\tau_k)$, pour $k > t$, appartient à $J_t \otimes S_*$. Ainsi C_t est une algèbre de Hopf. Sa duale, qu'on notera $S^*(t)$, s'identifie à une <u>sous-algèbre de Hopf</u> de S^* ; c'est la sous-algèbre ayant pour base les $\beta^E \mathcal{P}^R$, où E et R parcourent l'ensemble des suites $E = (\varepsilon_o , \dots , \varepsilon_k , \dots)$ et $R = (r_1 , \dots , r_k , \dots)$ telles que

$$\varepsilon_k = 0 \quad \text{pour} \quad k > t , \qquad r_k < p^{t-k} \qquad (\text{donc} \quad r_k = 0 \quad \text{pour} \quad k > t) ;$$

la sous-algèbre $S^*(t)$ est de dimension finie, égale à

$$2^{t+1} \; p^{t(t+1)/2} \quad .$$

Elle contient les $\mathcal{P}^i$ pour $i < p^t$, ainsi que les β_i pour $i \leq t$, mais ne contient pas $\mathcal{P}^i$ pour $i \geq p^t$, ni β_i pour $i > t$ (on verra (théorème 3) que $S^*(t)$ est la sous-algèbre engendrée par β_o et les $\mathcal{P}^i$ pour $i < p^t$). L'algèbre S^* est réunion des sous-algèbres $S^*(t)$ dont chacune est de dimension finie, donc <u>chaque élément de</u> S^* <u>dont le degré est</u> > 0 <u>est nilpotent</u> (MILNOR, [2]).

4. <u>Recherche des éléments primitifs d'une algèbre de Hopf.</u>

LEMME. - Soit A une algèbre de Hopf dont la multiplication soit <u>commutative</u> et <u>associative</u>. Supposons que A, comme algèbre, soit un produit tensoriel d'algèbres de polynômes, éventuellement tronquées, dont chacune a un générateur homogène x_k (de degré > 0). [Rappelons que d'après A. BOREL [1], toute algèbre de Hopf sur un corps parfait, dont la multiplication est commutative et associative, est de ce type. Mais nous n'utiliserons pas le résultat de BOREL]. Soit y un élément homogène, qui s'écrit comme polynôme en x_n à coefficients polynomiaux par rapport à des x_i tels que les $\Delta(x_i)$ ne fassent pas intervenir x_n. Alors, si y est <u>primitif</u> et contient effectivement x_n, y est le produit d'un scalaire et d'un élément de la forme

$$(x_n)^d + z \quad ,$$

où z ne dépend que des x_i, et où l'exposant d est une puissance de la caractéristique p (d = 1 si la caractéristique est nulle).

DÉMONSTRATION. - On a a priori

$$y = a_o(x_n)^d + a_1(x_n)^{d-1} + \dots + a_n \quad ,$$

d étant un entier $\geqslant 1$, et les a_k étant des polynômes en les x_i. Par hypothèse, les $\Delta(a_k)$ ne font pas intervenir x_n. On suppose $a_o \neq 0$; on va alors montrer que $a_o \in K$, en raisonnant par l'absurde.

Notons A_k l'espace vectoriel engendré par les monômes en x_n dont le degré est k ; on a

$$\Delta(y) = (\Delta a_o).((x_n)^d \otimes 1) \quad \text{modulo} \quad A_{d-1} \otimes A \ ;$$

donc, si le degré de a_o était > 0, on aurait, y étant primitif,

$$0 = \delta y = (\delta a_o + 1 \otimes a_o).((x_n)^d \otimes 1) \quad \text{modulo} \quad A_{d-1} \otimes A \quad ,$$

d'où

$$(x_n)^d \otimes a_o \in A_{d-1} \otimes A + J \otimes A \quad ,$$

J désignant l'idéal engendré par les x_i autres que x_n. Comme $a_o \neq 0$, ceci est absurde. Par conséquent il est bien prouvé que $\deg(a_o) = 0$, autrement dit $a_o \in K$.

En multipliant y par un scalaire $\neq 0$, on peut donc supposer désormais $a_o = 1$. On va montrer que $a_k = 0$ pour $0 < k < d$. Raisonnons encore par l'absurde : supposons que $a_k \neq 0$ pour un k tel que $0 < k < d$, et que $a_j = 0$ pour $0 < j < k$. Alors

$$y = (x_n)^d + a_k(x_n)^{d-k} + \ldots + a_n \ , \quad a_k \neq 0 \ , \quad \deg(a_k) > 0 \quad .$$

Posons

$$u = \Delta x_n - x_n \otimes 1 = \delta x_n + 1 \otimes x_n \quad .$$

On a

$$\Delta(y) = (x_n \otimes 1 + u)^d + (\Delta a_k).((x_n)^{d-k} \otimes 1) \quad \text{modulo} \quad A_{d-k-1} \otimes A \quad .$$

On en déduit

$$0 = \delta y = \sum_{i=1}^{d-1} [d-i\ , i]\,(x_n \otimes 1)^{d-i}\, u^i + (1 \otimes a_k + \delta a_k)(x_n \otimes 1)^{d-k}$$

$$\text{modulo} \quad A_{d-k-1} \otimes A \quad ,$$

(en notant $[t\ , t']$ le coefficient binomial $\frac{(t + t')!}{t!\ t'!}$) ; d'où, en remplaçant u par $\delta x_n + 1 \otimes x_n$,

$$\sum_{i=1}^{d-1} [d - i , i] (x_n)^{d-i} \otimes (x_n)^i + (x_n)^{d-k} \otimes a_k \in A_{d-k-1} \otimes A + J \otimes A \quad .$$

Ceci impose $a_k = 0$, contrairement à l'hypothèse.

Finalement, on a $y = (x_n)^d + z$, z étant un polynôme en les x_i . Puisque y est primitif, on a

$$(\Delta x_n)^d - (x_n \otimes 1)^d - (1 \otimes x_n)^d = - \delta z \in J \otimes A \quad ;$$

or le premier membre est égal, modulo $J \otimes A$, à

$$\sum_{i=1}^{d-1} [d - i , i] (x_n)^{d-i} \otimes (x_n)^i \quad ,$$

ce qui exige que les coefficients binomiaux $[d - i , i]$ soient nuls pour $1 \leqslant i \leqslant d - 1$. Il s'ensuit (résultat classique) que d est une puissance de la caractéristique p (si $p \neq 0$) , ou que $d = 1$ (si la caractéristique est nulle). Ceci achève la démonstration du lemme.

5. Application : éléments primitifs de S_* et de certains de ses quotients.

THÉORÈME 2.

a. Considérons l'une des algèbres de Hopf suivantes : dans le cas $p = 2$, l'algèbre S_* ou les algèbres quotients C_t considérées à l'exemple 2 ; dans le cas où p est premier impair, la sous-algèbre de S_* engendrée par les ξ_i ou l'une des algèbres quotients considérées dans l'exemple 2 bis. Dans chacune de ces algèbres de Hopf, les éléments primitifs sont les combinaisons linéaires d'éléments de la forme $(\xi_1)^d$, où d est une puissance de p .

b. Considérons pour p premier impair, l'une des algèbres de Hopf suivantes : soit l'algèbre S_* , soit l'un des quotients de S_* considérés à l'exemple 3. Dans une telle algèbre de Hopf, les éléments primitifs sont les combinaisons linéaires de τ_0 et des éléments de la forme $(\xi_1)^d$, où d est une puissance de p .

DÉMONSTRATION de a. - Soit y un élément primitif homogène. Supposons que ξ_n figure dans l'expression de y , mais qu'aucun des ξ_i , pour $i > n$, n'y figure. D'après le lemme, y est, à un facteur scalaire près, de la forme

$$(\xi_n)^d - z \quad ,$$

où d est une puissance de p , et z ne dépend que des ξ_i pour $i < n$. On va montrer que $n \geqslant 2$ conduit à une contradiction. On aurait

(1) $$\delta(z) = \sum_{i=1}^{n-1} (\xi_{n-i})^{p^i d} \otimes (\xi_i)^d \quad ;$$

donc, si B' désigne la sous-algèbre engendrée par les ξ_i pour $i \leq n-2$, on aurait

(2) $$\delta(z) = (\xi_1)^{p^{n-1}d} \otimes (\xi_{n-1})^d \text{ modulo } A \otimes B' \quad .$$

Il en résulte que z, qui est un polynôme en ξ_{n-1} à coefficients dans B', contient effectivement ξ_{n-1} :

$$z = b_o(\xi_{n-1})^k + b_1(\xi_{n-1})^{k-1} + \dots ,$$

avec $b_o \neq 0$. Le degré de z étant celui de $(\xi_n)^d$ ne peut être égal à celui de $(\xi_{n-1})^k$, donc le degré de b_o est > 0. Alors, dans l'expression de δz, ξ_{n-1} figure à droite du produit tensoriel avec l'exposant k, mais jamais avec un exposant $> k$; en comparant à (2), cela prouve que $k = d$. Mais alors, dans l'expression de δz, ξ_{n-1} ne figure jamais, à gauche du produit tensoriel, avec un exposant $> d$, ce qui contredit (1).

Ce raisonnement est valable dans les algèbres quotients considérées dans les exemples 2 et 2 bis : en effet, puisque $y \neq 0$, on a $d < p^{t-n+1}$; il s'ensuit que $(\xi_1)^{p^{n-1}d}$ et $(\xi_{n-1})^d$ sont $\neq 0$ dans la relation (2), et que $(\xi_{n-1})^{pd}$ et $(\xi_1)^d$ sont $\neq 0$ dans la relation (1).

DÉMONSTRATION de b. - Soit y un élément primitif homogène. Si aucun des τ_n $(n \geq 0)$ ne figure dans y, on est ramené au cas précédent. Supposons donc que τ_n figure dans y, mais qu'aucun τ_i n'y figure pour $i > n$ $(n \geq 0)$. On va montrer que $n = 0$, ce qui, grâce au lemme, établira le théorème. Raisonnons par l'absurde, en supposant $n > 0$; y est de la forme $a\tau_n + b$, a et b étant des éléments tels que τ_n ne figure pas dans $\Delta(a)$ ni dans $\Delta(b)$. D'après le lemme, y est, à un facteur scalaire près, de la forme

$$\tau_n - z \quad ,$$

et puisque y est primitif, on a

(3) $$\delta(z) = \sum_{i=0}^{n-1} (\xi_{n-i})^{p^i} \otimes \tau_i \quad .$$

Donc ξ_{n-1} figure effectivement dans z, et on a

$$z = u\tau_{n-1} + v \quad ,$$

où u et v sont indépendants de τ_{n-1}. Le degré de u, égal à la différence des degrés de τ_n et de τ_{n-1}, est > 0 ; donc δz contient un terme en $\tau_{n-1} \otimes u$, ce qui est en contradiction avec (3).

Ce raisonnement est valable dans les algèbres quotients considérées à l'exemple 3. En effet, on a alors $n \leq t$, donc $(\xi_{n-1})^p \neq 0$.

Par dualité, le théorème 1 fournit des informations sur l'engendrement de l'algèbre S^* et de certaines de ses sous-algèbres. Rappelons en effet que si A et A^* sont deux algèbres de Hopf en dualité, l'espace $P(A)$ des éléments primitifs de A et l'espace $Q(A^*)$ des éléments "indécomposables" de A^* sont en dualité. Ici, dans le cas $p = 2$, l'élément de la base de Milnor de S^* qui correspond à $(\xi_1)^d \in S_*$ est Sq^d (Exposé 10, corollaire du lemme 3). Dans le cas où p est premier impair, l'élément de la base de Milnor de S^* qui correspond à $(\xi_1)^d$ est $\mathcal{P}^d$, et celui qui correspond à τ_0 est $\beta_0 = \beta$ (opérateur de Bockstein) (cf. Exposé 10, corollaire du lemme 4). Le théorème 2 donne aussitôt :

THÉORÈME 3.

a. <u>Les</u> Sq^{2^h} $(h = 0, 1, \ldots)$ <u>forment un système minimal de générateurs de l'algèbre de Steenrod</u> S^* <u>pour</u> $p = 2$. <u>Pour</u> $p = 2$, <u>la sous-algèbre</u> $S^*(t)$ <u>admet pour système minimal de générateurs les</u> Sq^{2^h} <u>pour</u> $0 \leq h < t$. <u>Pour</u> p <u>premier impair, la sous-algèbre de</u> S^* <u>ayant pour base les</u> $\mathcal{P}^R$ <u>admet pour système minimal de générateurs les</u> $\mathcal{P}^{p^h}$ $(h = 0, 1, \ldots)$; <u>la sous-algèbre ayant pour base les</u> $\mathcal{P}^R$, <u>où</u> R <u>satisfait à</u>

$$r_1 < p^t, \ldots, r_k < p^{t-k}, \ldots,$$

<u>admet pour système minimal de générateurs les</u> $\mathcal{P}^{p^h}$ <u>pour</u> $0 \leq h < t$ (<u>donc cette sous-algèbre est engendrée par les</u> $\mathcal{P}^i$ <u>pour</u> $i < p^t$).

b. <u>Pour</u> p <u>premier impair</u>, β <u>et les</u> $\mathcal{P}^{p^h}$ $(h = 0, 1, \ldots)$ <u>forment un système minimal de générateurs pour l'algèbre de Steenrod</u> S^* ; <u>la sous-algèbre</u> $S^*(t)$ <u>admet pour système minimal de générateurs</u> β <u>et les</u> $\mathcal{P}^{p^h}$ <u>pour</u> $0 \leq h < t$ (<u>donc</u> $S^*(t)$ <u>est la sous-algèbre engendrée par</u> β <u>et les</u> $\mathcal{P}^i$ <u>pour</u> $i < p^t$).

6. <u>Antiautomorphismes d'une algèbre de Hopf</u>.

Soit A une algèbre de Hopf. Pour commencer, on ne fait aucune hypothèse d'associativité ou de commutativité au sujet de la multiplication Φ et de l'application diagonale Δ .

PROPOSITION 4. - Il existe une application linéaire $c : A \to A$ et une seule telle que l'application composée

$$(4) \qquad A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \xrightarrow{1 \otimes c} A \otimes A \xrightarrow{\Phi} A$$

soit égale à $\eta \circ \varepsilon$. Cette application est de degré 0 .

REMARQUE. - La condition imposée à c peut encore s'exprimer comme suit : on a $c(1) = 1$, et l'application composée (4) est nulle sur $I(A)$.

DÉMONSTRATION. - On prouve l'existence et l'unicité de $c(x)$ par récurrence sur le degré de $x \in A$. Pour le degré 0 , on a $c(1) = 1$. Si x est de degré $n > 0$, soit

$$\delta x = \sum_i y_i \otimes z_i \qquad (\deg (z_i) < n) \qquad ;$$

la condition imposée à l'application (4) s'écrit

$$(5) \qquad c(x) = - x - \sum_i y_i . (cz_i) \qquad ,$$

ce qui détermine $c(x)$ puisque les $c(z_i)$ sont déjà connus. La relation (5) sert donc de définition récurrente à c .

REMARQUE. - L'application $c^* : A^* \to A^*$ de l'algèbre duale est la transposée de c , comme on le voit en transposant (4).

Algèbres de Hopf opposées. - Etant donnée une algèbre de Hopf A , de multiplication Φ et d'application diagonale Δ , on va lui associer trois autres algèbres de Hopf, en général distinctes de A et distinctes entre elles. Elles ont le même support A , et ne diffèrent que par la multiplication et l'application diagonale. Soit Φ' l'application composée

$$A \otimes A \xrightarrow{T} A \otimes A \xrightarrow{\Phi} A \qquad ,$$

où T , comme d'habitude, transforme $x \otimes y$ en $(-1)^{(\deg x)(\deg y)} y \otimes x$. Les applications Φ' et Δ définissent sur A une structure d'algèbre de Hopf : la vérification est aisée, le point essentiel consistant à vérifier que le diagramme (1) de l'Exposé 10 est bien commutatif ; or cela revient à vérifier que le produit des trois permutations suivantes

$$(1 , 2 , 3 , 4) \longrightarrow (3 , 4 , 1 , 2)$$
$$(1 , 2 , 3 , 4) \longrightarrow (1 , 3 , 2 , 4)$$
$$(1 , 2 , 3 , 4) \longrightarrow (2 , 1 , 4 , 3) \, ,$$

est égale à la seconde d'entre elles. On notera que si Φ est associative, il en est de même de Φ' ; si Φ est commutative, alors $\Phi = \Phi'$, et la nouvelle structure d'algèbre de Hopf coïncide avec l'ancienne.

De même, soit Δ' l'application composée $T \circ \Delta$; alors Φ et Δ' définissent sur A une structure d'algèbre de Hopf ; si Δ est associative, il en est de même de Δ' ; si Δ est commutative, $\Delta' = \Delta$.

En combinant les deux résultats précédents, on voit que Φ' et Δ' définissent aussi sur A une structure d'algèbre de Hopf. Nous avons ainsi obtenu quatre structures d'algèbres de Hopf sur A (en comptant la structure initialement donnée).

On constate sur la formule (5) que c est aussi caractérisée par la condition que l'application composée

$$(4')\qquad A \xrightarrow{\Delta'} A \otimes A \xrightarrow{c \otimes 1} A \otimes A \xrightarrow{\Phi'} A$$

soit égale à $\eta \circ \varepsilon$.

PROPOSITION 5. - <u>Si la multiplication</u> Φ <u>est associative, on a</u>

$$(6)\qquad c(x.y) = (-1)^{pq}\, c(y).c(x) \ , \quad p = \deg(x) \ , \quad q = \deg(y) \quad .$$

<u>Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif</u>

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "c \otimes c"] \arrow[d, "\Phi"] & A \otimes A \arrow[d, "\Phi'"] \\ A \arrow[r, "c"] & A \end{tikzcd}$$

<u>ainsi que le diagramme analogue où les rôles de</u> Φ <u>et de</u> Φ' <u>sont échangés</u>.

DÉMONSTRATION. - C'est évident si $p = 0$ ou $q = 0$. On va faire la démonstration par récurrence sur $p + q$, en supposant p et q strictement positifs. Soit

$$\Delta x = \sum_i x_i' \otimes x_i'' \ , \qquad \text{avec } x_0' = 1 \ , \ x_0'' = x \ ,$$

$$\Delta y = \sum_j y_j' \otimes y_j'' \ , \qquad \text{avec } y_0' = 1 \ , \ y_0'' = y \ .$$

Notons p_i' , p_i'' , q_j' , q_j'' les degrés de x_i' , x_i'' , y_j' , y_j'' respectivement. On a

$$p_i' + p_i'' = p \ , \quad q_j' + q_j'' = q \ , \quad p_i'' < p \ \text{ pour } i \neq 0 \ , \quad q_j'' < q \ \text{ pour } j \neq 0 \ .$$

On voit que

$$\Delta(x.y) = \sum_{i,j} (-1)^{p_i'' q_j'} (x_i'.y_j') \otimes (x_i''.y_j'') \qquad ,$$

d'où, par la définition de c ,

$$(7) \qquad 0 = \sum_{i,j} (-1)^{p''_i q'_j} \, x'_i . y'_j . c(x''_i . y''_j) \quad .$$

D'autre part, par la définition de c , on a $\sum_j y'_j . (cy''_j) = 0$, d'où evidemment

$$(8) \qquad 0 = \sum_{i,j} (-1)^{p''_i q} \, x'_i . y'_j . (cy''_j) . (cx''_i) \quad .$$

Comparons (7) et (8), et utilisons l'hypothèse de récurrence, qui donne

$$c(x''_i . y''_j) = (-1)^{p''_i q''_j} \, (cy''_j) . (cx''_i)$$

sauf peut-être pour $i = 0$, $j = 0$. En retranchant (8) de (7), on obtient alors la relation (6) à démontrer.

PROPOSITION 5 bis. - *Si l'application diagonale* Δ *est associative, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "c"] \arrow[d, "\Delta'"] & A \arrow[d, "\Delta"] \\ A \otimes A \arrow[r, "c \otimes c"] & A \otimes A \end{tikzcd}$$

ainsi que le diagramme analogue où les rôles de Δ *et de* Δ' *sont échangés.*

DÉMONSTRATION. - On applique la proposition 5 à l'algèbre duale.

Avant de poursuivre, il nous faut préciser les notations : on notera $c(\Phi , \Delta)$ l'application c considérée jusqu'ici, et relative à la multiplication Φ et à l'application diagonale Δ . On a donc aussi des applications $c(\Phi' , \Delta)$, $c(\Phi , \Delta')$ et $c(\Phi' , \Delta')$.

PROPOSITION 6. - *Si la multiplication* Φ *est associative, les applications* $c(\Phi , \Delta)$ et $c(\Phi , \Delta')$ *sont des bijections, réciproques l'une de l'autre.*

DÉMONSTRATION. - Il suffira de montrer

$$(9) \qquad c(\Phi , \Delta) \circ c(\Phi , \Delta') = \text{identité},$$

car alors, en échangeant les rôles de Δ et Δ' , on obtiendra aussi

$$c(\Phi , \Delta') \circ c(\Phi , \Delta) = \text{identité}.$$

Pour abréger, notons c l'application $c(\Phi , \Delta)$, et c' l'application

$c(\Phi, \Delta')$. On veut montrer que

$$(10) \qquad cc'(x) = x ,$$

par récurrence sur le degré de x (c'est trivial pour $x = 1$). Soit

$$\delta x = \sum_i y_i \otimes z_i ;$$

on a

$$(11) \qquad cx + x + \sum_i y_i.(cz_i) = 0$$

$$(11') \qquad x + c'x + \sum_i (-1)^{p_i q_i} z_i.(c' y_i) = 0 ,$$

avec $p_i = \deg(y_i)$, $q_i = \deg(z_i)$. Appliquons c aux deux membres de la relation (11'), en tenant compte du fait que c est un antihomomorphisme de la multiplication, puisque celle-ci est associative (proposition 5) ; il vient :

$$cx + cc' x + \sum_i (cc' y_i).(cz_i) = 0 ,$$

ce qui, par comparaison avec (11), prouve (10) par récurrence sur le degré. La proposition 6 est ainsi démontrée.

On a une proposition duale :

PROPOSITION 6 bis. - Si l'application diagonale Δ est associative, les applications $c(\Phi, \Delta)$ et $c(\Phi', \Delta)$ sont des bijections, réciproques l'une de l'autre.

REMARQUE. - Il suffit donc que l'une au moins des applications Φ ou Δ soit associative, pour que chacune des quatre applications $c(\Phi, \Delta)$, $c(\Phi, \Delta')$, $c(\Phi', \Delta)$, $c(\Phi', \Delta')$ soit bijective. De plus, si Φ est associative et Δ commutative, la transformation $c(\Phi, \Delta)$ est involutive (i. e. est sa propre inverse) ; il en est de même lorsque Δ est associative et Φ commutative.

PROPOSITION 7. - Lorsque Φ et Δ sont toutes deux associatives, on a

$$(12) \qquad c(\Phi, \Delta) = c(\Phi', \Delta') ,$$

et l'application $c(\Phi, \Delta)$ est un isomorphisme de l'algèbre de Hopf (A, Φ, Δ) sur l'algèbre "doublement opposée" (A, Φ', Δ').

DÉMONSTRATION. - D'après les propositions 6 et 6 bis, on a

$c(\Phi , \Delta) \circ c(\Phi , \Delta') = \text{identité}$,

$c(\Phi' , \Delta) \circ c(\Phi , \Delta) = \text{identité}$,

d'où, par un raisonnement classique, $c(\Phi' , \Delta) = c(\Phi, \Delta')$. En remplaçant Φ par Φ' dans cette relation, on obtient (12). Que $c(\Phi, \Delta)$ soit un isomorphisme de (A , Φ , Δ) sur (A , Φ' , Δ') résulte des propositions 5 et 5 bis.

REMARQUES. - La relation (12) exprime ceci : si

$$\delta x = \sum_i y_i \otimes z_i \quad ,$$

on a à la fois

$$cx + x + \sum_i y_i . (cz_i) = 0 \qquad \text{et}$$

$$cx + x + \sum_i (cy_i) . z_i = 0 \quad .$$

On notera que si Φ et Δ sont associatives, les quatre applications c se réduisent à deux, et que si en outre Φ <u>ou</u> Δ est commutative, toutes les applications c sont confondues. Ce dernier cas se présente pour l'algèbre de Steenrod.

<u>Cas de l'algèbre de Steenrod</u> S^* : les $c(Sq^i)$, resp. les $c(\mathcal{P}^i)$, sont les <u>opérations de Thom</u>, qui interviennent dans le problème du plongement d'un espace compact dans un espace numérique R^n de dimension donnée (cf. [5]). Pour calculer c dans l'algèbre S^*, il est commode de calculer c dans l'algèbre duale S_*, puis de prendre la transposée : dans S_*, on a

$$\xi_k + c\xi_k + \sum_{i=1}^{k-1} (\xi_{k-i})^{p^i} . (c\xi_i) = 0 \quad ,$$

et, si p est premier impair,

$$\tau_k + c\tau_k + \sum_{i=0}^{k-1} (\xi_{k-i})^{p^i} . (c\tau_i) = 0 \quad .$$

MILNOR [2] en déduit des formules explicites pour c.

EXEMPLES. - Pour $p = 2$, on a, dans l'algèbre S^* :

$$c(Sq^1) = Sq^1 \ , \quad c(Sq^2) = Sq^2 \ , \quad c(Sq^3) = Sq^2\, Sq^1 \quad ,$$

$$c(Sq^4) = Sq^4 + Sq^3\, Sq^1 \ , \quad c(Sq^5) = Sq^4\, Sq^1 \ , \text{ etc.}$$

Puisque c est un antiautomorphisme involutif de l'algèbre S^*, c permet de transformer tout problème concernant les idéaux à gauche de S^* en problème concernant les idéaux à droite. Par exemple, en utilisant la table de multiplication de la base de Milnor (Exposé 11, paragraphe 4), on prouve facilement les deux assertions suivantes (pour $p = 2$) :

- Les $\theta \in S^*$ tels que $Sq^2 . \theta = 0$ sont exactement les éléments de l'idéal à droite $Sq^2 . Sq^1 . S^*$;

- Les $\theta \in S^*$ tels que $Sq^2 . Sq^1 . \theta = 0$ sont exactement les éléments de l'idéal à droite engendré par Sq^1 et $Sq^2 . Sq^3$.

En transformant par c, on obtient :

Les $\theta \in S^*$ tels que $\theta . Sq^2 = 0$ sont exactement les éléments de l'idéal à gauche engendré par Sq^3 ;

Les $\theta \in S^*$ tels que $\theta . Sq^3 = 0$ sont exactement ceux de l'idéal à gauche engendré par Sq^1 et $Sq^2 . Sq^3$ (qui est aussi l'idéal à gauche engendré par Sq^1 et Sq^5).

Il y a d'autres résultats du même type ; ils sont utiles dans le calcul des groupes d'homotopie des sphères, par la méthode qui consiste à tuer les groupes d'homotopie successifs au moyen de fibrations ayant en fibre des espaces d'Eilenberg-MacLane.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (Armand). - Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts. Annals of Math., t. 57, 1953, p. 115-207.

[2] MILNOR (J.). - The Steenrod algebra and its dual, Annals of Math., t. 67, 1958, p. 150-171.

[3] MILNOR (J.) and MOORE (J. C.). - On the structure of Hopf algebras. - Princeton, 1959, multigraphié.

[4] MOORE (J. C.). - Seminar Notes, 1958.

[5] THOM (R.). - Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comment. Math. Helvet., t. 28, 1954, p. 17-86.