

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

ITALO GIORGIUTTI

L'algèbre de Steenrod et sa duale (suite)

Séminaire Henri Cartan, tome 11, n° 2 (1958-1959), exp. n° 11, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_2_A2_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'ALGÈBRE DE STEENROD ET SA DUALE (Suite)

par Italo GIORGIUTTI

On se propose d'expliciter l'application diagonale de l'algèbre de Hopf S_*^* , et d'en déduire la structure multiplicative de l'algèbre de Steenrod S^* ⁽¹⁾.

1. Opérations de S^* dans l'homologie $H_*(X; Z_p)$.

On notera simplement $H_*(X)$ et $H^*(X)$ l'homologie et la cohomologie à coefficients dans Z_p . Supposons d'abord que l'ensemble simplicial X soit de type fini, c'est-à-dire que X soit engendré (comme ensemble simplicial) par un nombre fini d'éléments. Alors X ne possède qu'un nombre fini d'éléments non dégénérés, et par suite les espaces vectoriels $H_*(X)$ et $H^*(X)$ sont de dimension finie. Il en résulte que non seulement $H^*(X)$ est le dual de $H_*(X)$, mais $H_*(X)$ s'identifie au dual de $H^*(X)$. Puisque S^* opère à gauche dans $H^*(X)$, alors, par transposition, S^* opère à droite dans $H_*(X)$. On a donc, pour $u \in H_*(X)$, $v \in H^*(X)$, $s \in S^*$:

$$(1) \quad \langle u.s, v \rangle = \langle u, s.v \rangle .$$

De plus, les opérations de S^* dans $H_*(X)$ ont un caractère fonctoriel vis-à-vis de X (toujours supposé de type fini). Or tout ensemble simplicial X est limite inductive de sous-ensembles simpliciaux de type fini ; donc, par passage à la limite inductive, on obtient des opérations de S^* à droite dans $H_*(X)$, pour un X quelconque ; ces opérations ont un caractère fonctoriel, et satisfont encore à (1). Il en résulte que, dans le cas d'un ensemble simplicial X quelconque, les opérations de S^* dans $H^*(X)$ ne sont autres que les transposées des opérations de S^* dans l'homologie $H_*(X)$ (rappelons que $H^*(X)$ s'identifie toujours au dual $\text{Hom}(H_*(X), Z_p)$).

Puisque S^* opère associativement dans $H^*(X)$ (par définition de la multiplication dans S^*), il en est de même pour les opérations dans $H_*(X)$; autrement dit, le diagramme suivant est commutatif

⁽¹⁾ Consulter : MILNOR (J.). - The Steenrod algebra and its dual, Annals of Math., t. 67, 1958, p. 150-171.

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} H_*(X) \otimes S^* \otimes S^* & \xrightarrow{\lambda \otimes 1} & H_*(X) \otimes S^* \\ \downarrow 1 \otimes \Phi^* & & \downarrow \lambda \\ H_*(X) \otimes S^* & \xrightarrow{\lambda} & H_*(X) \end{array}$$

en notant $\lambda : H_*(X) \otimes S^* \rightarrow H_*(X)$ l'application définissant la structure de S^* -module à droite de $H_*(X)$, et Φ^* la multiplication de S^* .

L'application $C^* : H^*(X) \otimes H^*(X) \rightarrow H^*(X)$ définissant la multiplication en cohomologie est, on le sait, transposée d'une application diagonale

$C_* : H_*(X) \rightarrow H_*(X) \otimes H_*(X)$, tout au moins si X est de type fini. Or on a vu dans l'Exposé 10 (cf. aussi l'Exposé 9, page 9-10) que, pour $s \in S^*$, on a $C^* \circ (\Delta^* s) = s \circ C^*$, Δ^* désignant l'application diagonale $S^* \rightarrow S^* \otimes S^*$. Par transposition, on a donc $(\Delta^* s) \circ C_* = C_* \circ s$ (égalité de deux applications de $H_*(X)$ dans $H_*(X) \otimes H_*(X)$), et cette relation est valable même si X n'est pas de type fini. Cette relation exprime la commutativité du diagramme

$$(2) \quad \begin{array}{ccccc} H_* \otimes S^* & \xrightarrow{C_* \otimes \Delta^*} & H_* \otimes H_* \otimes S^* \otimes S^* & \xleftarrow{1 \otimes T \otimes 1} & H_* \otimes S^* \otimes H_* \otimes S^* \\ \downarrow \lambda & & \downarrow C_* & & \downarrow \lambda \otimes \lambda \\ H_* & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & H_* \otimes H_* & & H_* \otimes H_* \end{array}$$

T désignant toujours la transformation définie par

$$T(u \otimes s) = (-1)^{qr} s \otimes u, \quad q = \deg(u), \quad r = \deg(s).$$

2. Etude du dual de $H_*(X) \otimes S^*$.

Puisque S^k est de dimension finie, chacun des deux espaces vectoriels S^k et S_k s'identifie au dual de l'autre. Il en résulte que le dual de $H_r(X) \otimes S^k$ s'identifie à $H^r(X) \otimes S_k$. Graduons $H_*(X) \otimes S^*$ en convenant que l'espace des éléments de degré (inférieur) i est $\sum_k H_{k+i}(X) \otimes S^k$. Le dual s'identifie à

$$\prod_k H^{k+i}(X) \otimes S_k. \text{ Le dual-gradué de } H_*(X) \otimes S^* \text{ est donc } \sum_i \left(\prod_k H^{k+i}(X) \otimes S_k \right);$$

on le notera $H^*(X) \widehat{\otimes} S_*$ (produit tensoriel "complété"). Un élément de $H^*(X) \widehat{\otimes} S_*$ sera noté $\sum_j u_j \otimes s_j$, la sommation étant infinie.

On observera qu'on a un isomorphisme canonique

$$(3) \quad H^*(X) \widehat{\otimes} S_* \widehat{\otimes} S_* \cong H^*(X) \widehat{\otimes} (S_* \otimes S_*)$$

D'autre part, la multiplication C^* de $H^*(X)$ et la multiplication $\hat{\Phi}_*$ de S_* définissent sur $H^*(X) \hat{\otimes} S_*$ une structure d'algèbre graduée.

La transposée de l'application λ (qui est de degré 0) est une application linéaire $\lambda^* : H^*(X) \rightarrow H^*(X) \hat{\otimes} S_*$, de degré 0.

PROPOSITION 1. - L'application λ^* est un homomorphisme d'algèbres graduées, et le diagramme suivant est commutatif

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} H^*(X) & \xrightarrow{\lambda^*} & H^*(X) \hat{\otimes} S_* \\ \downarrow \lambda^* & & \downarrow 1 \hat{\otimes} \Delta_* \\ H^*(X) \hat{\otimes} S_* & \xrightarrow{\lambda^* \hat{\otimes} 1} & (H^*(X) \hat{\otimes} S_*) \hat{\otimes} S_* \approx H^*(X) \hat{\otimes} (S_* \otimes S_*) \end{array}$$

DÉMONSTRATION. - Transposons le diagramme (2) : on obtient un diagramme commutatif qui exprime précisément que λ^* est un homomorphisme d'algèbres graduées. Quant au diagramme (4), il est transposé du diagramme commutatif (1).

PROPOSITION 2. - Soit y un élément homogène de $H^*(X)$. La relation

$$(5) \quad \lambda^*(y) = \sum_i y_i \otimes \omega_i$$

(somme infinie, où les y_i sont des éléments homogènes de $H^*(X)$ et les ω_i des éléments homogènes de S_*) équivaut à la relation

$$(6) \quad s \cdot v = \sum_i (-1)^{(\deg \omega_i)(\deg v_i)} \langle s, \omega_i \rangle y_i \quad \text{pour tout } s \in S^* .$$

(La somme du second membre de (6) est finie).

En effet, soit u un élément quelconque de $H_*(X)$. On a

$$(7) \quad \langle u \otimes s, \lambda^* v \rangle = \langle u \cdot s, y \rangle = \langle u, s \cdot y \rangle .$$

Si (5) a lieu, le premier membre de (7) est égal à

$$(8) \quad \sum_i (-1)^{(\deg \omega_i)(\deg v_i)} \langle u, y_i \rangle \cdot \langle s, \omega_i \rangle ,$$

et comme il est égal au dernier membre de (7) quel que soit u , la relation (6) s'ensuit. Inversement, si (6) a lieu, en faisant le produit scalaire avec $u \in H_*(X)$, on trouve que $\lambda^* y$ et $\sum_i y_i \otimes \omega_i$ ont même produit scalaire avec $u \otimes s$, quels que soient u et s , donc sont égaux, ce qui prouve (5).

3. Explicitation de l'application diagonale de S_* .

Premier cas : $p = 2$.

Prenons $X = K(Z_2, 1)$. On a vu (Exposé 10, paragraphe 4) que $H^*(X)$ est une algèbre de polynômes à un générateur x de degré 1, et que

$$s \cdot x = \sum_{i \geq 0} \langle s, \xi_i \rangle x^{2^i} \quad \text{pour } s \in S^*,$$

les ξ_i étant les générateurs de l'algèbre de polynômes S_* (théorème 1 de l'Exposé 10). Compte tenu de la proposition 2, cette relation équivaut à

$$(9) \quad \lambda^* x = \sum_{i \geq 0} x^{2^i} \otimes \xi_i \quad (\text{somme infinie})$$

On peut considérer que la relation (9) sert de définition aux éléments $\xi_i \in S_{2^i-1}$.

Puisque λ^* est un homomorphisme d'algèbres (proposition 1), on a

$$\lambda^*(x^{2^j}) = \sum_i x^{2^{i+j}} \otimes (\xi_i)^{2^j} .$$

Exprimons que le diagramme (4) est commutatif ; on trouve

$$\sum_{i,j} x^{2^{i+j}} \otimes (\xi_j)^{2^i} \otimes \xi_i = \sum_k x^{2^k} \otimes \Delta_*(\xi_k) ,$$

d'où

$$(10) \quad \Delta_*(\xi_k) = \sum_{0 \leq i \leq k} (\xi_{k-i})^{2^i} \otimes \xi_i ,$$

ou, en explicitant :

$$\Delta_*(\xi_k) = \xi_k \otimes 1 + (\xi_{k-1})^2 \otimes \xi_1 + (\xi_{k-2})^4 \otimes \xi_2 + \dots$$

En particulier, $\Delta_*(\xi_1) = \xi_1 \otimes 1 + 1 \otimes \xi_1 + \dots + (\xi_1)^{2^{k-1}} \otimes \xi_{k-1} + 1 \otimes \xi_k$.

Deuxième cas : p premier impair.

Prenons $X = K(Z_p, 1)$. On a vu (Exposé 10, paragraphe 4) que $H^*(X)$ est produit tensoriel d'une algèbre extérieure à un générateur x de degré 1, et d'une algèbre de polynômes à un générateur y de degré 2 ; de plus (Exposé 10, relations (7)) :

$$\begin{cases} s.v = \sum_{i \geq 0} \langle s, \xi_i \rangle y^{p^i} \\ s.x = \langle s, \xi_0 \rangle x + \sum_{i \geq 0} \langle s, \tau_i \rangle y^{p^i} \end{cases}$$

pour tout $s \in S^*$. Compte tenu de la proposition 2, ces relations équivalent à

$$(11) \quad \begin{cases} \lambda^* y = \sum_{i \geq 0} y^{p^i} \otimes \xi_i \\ \lambda^* x = x \otimes \xi_0 + \sum_{i \geq 0} y^{p^i} \otimes \tau_i \end{cases} \quad (\text{sommations infinies})$$

On peut considérer que ces relations servent de définition aux éléments ξ_i et τ_i qui engendrent l'algèbre S_* (théorème 2 de l'Exposé 10).

Un raisonnement et un calcul tout pareils à ceux faits dans le cas $p = 2$ montrent que

$$(12) \quad \Delta_*(\xi_k) = \sum_{0 \leq i \leq k} (\xi_{k-i})^{p^i} \otimes \xi_i \quad .$$

(observer que (12) redonne (10) si l'on y fait $p = 2$).

Pour calculer $\Delta_*(\tau_k)$, on observe d'abord que la première relation (11) donne

$$\lambda^*(y^{p^j}) = \sum_{i \geq 0} y^{p^{i+j}} \otimes (\xi_i)^{p^j} \quad ,$$

puis on écrit que le diagramme (4) est commutatif, lorsqu'on part de l'élément $x \in H^*(X)$; on trouve

$$\begin{aligned} x \otimes \xi_0 \otimes \xi_0 + \sum_{i \geq 0} y^{p^i} \otimes \tau_i \otimes \xi_0 + \sum_{i,j} y^{p^{i+j}} \otimes (\xi_j)^{p^i} \otimes \tau_i &= \\ &= x \otimes (\Delta_* \xi_0) + \sum_{k \geq 0} y^{p^k} \otimes \Delta_*(\tau_k) \quad , \end{aligned}$$

d'où

$$(13) \quad \Delta_*(\tau_k) = \tau_k \otimes 1 + \sum_{0 \leq i \leq k} (\xi_{k-i})^{p^i} \otimes \tau_i \quad .$$

On a en particulier

$$\Delta_*(\tau_0) = \tau_0 \otimes 1 + 1 \otimes \tau_0 \quad .$$

Les formules (10), (12) et (13), jointes aux théorèmes 1 et 2 de l'Exposé 10,

explicitent, en principe, l'algèbre de Hopf S_* , aussi bien dans le cas $p \neq 2$ que dans le cas où p est premier impair. Par dualité, l'algèbre de Steenrod S^* se trouve aussi explicitée.

Pour toute suite $R = (r_1, \dots, r_k, \dots)$ formée d'entiers ≥ 0 , nuls sauf un nombre fini, on notera ξ^R le monôme $(\xi_1)^{r_1} \dots (\xi_k)^{r_k} \dots$. De même, pour toute suite $E = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \dots)$ d'entiers égaux à 0 ou 1, et nuls sauf un nombre fini, on notera τ^E le monôme $(\tau_0)^{\varepsilon_0} \dots (\tau_k)^{\varepsilon_k} \dots$. Pour $p = 2$, les monômes ξ^R forment une \mathbb{Z}_2 -base de l'algèbre S_* ; pour p premier impair, les monômes $\tau^E \xi^R$ forment une \mathbb{Z}_p -base de S_* .

Soit $T = (t_1, \dots, t_k, \dots)$. On se propose d'expliciter $\Delta_*(\xi^T)$. Pour tout système de $k+1$ entiers n_0, \dots, n_k , notons $[n_0, \dots, n_k]$ le coefficient binomial

$$\frac{(n_0 + \dots + n_k)!}{n_0! \dots n_k!};$$

en élevant les deux membres de (12) à la puissance t_k , on trouve que $\Delta_*(\xi_k^{t_k})$ est égal à la somme, relative à tous les systèmes de $n+1$ entiers n_0, \dots, n_k dont la somme est égale à t_k , des expressions

$$[n_0, \dots, n_k] \xi_k^{n_0} \xi_{k-1}^{pn_1} \xi_{k-2}^{p^2 n_2} \dots \xi_1^{p^{k-1} n_{k-1}} \otimes \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \dots \xi_k^{n_k}$$

Faisons maintenant le produit de ces expressions pour toutes les valeurs de $k = 1, 2, \dots$; on obtient

$$(14) \quad \Delta_*(\xi^T) = \sum_{T(N)=T} b(N) \xi^{R(N)} \otimes \xi^{S(N)},$$

la sommation étant étendue à toutes les matrices $N = (n_{i,j})$ où i et j prennent indépendamment toutes les valeurs entières ≥ 0 , telles que $n_{0,0} = 0$ et que les $n_{i,j}$ soient nuls sauf un nombre fini, et telles enfin que $T(N)$ soit égal à T . Expliquons les notations $T(N)$, $R(N)$, $S(N)$ et $b(N)$: on pose

$$T(N) = (t_1(N), \dots, t_k(N), \dots), \text{ avec } t_k(N) = \sum_{i+j=k} n_{i,j};$$

$$R(N) = (r_1(N), \dots, r_k(N), \dots), \text{ avec } r_k(N) = \sum_j p^j n_{k,j};$$

$$S(N) = (s_1(N), \dots, s_k(N), \dots), \text{ avec } s_k(N) = \sum_i n_{i,k};$$

$$b(N) \text{ est l'entier } \frac{[k]! t_k(N)!}{\prod_{i,j} n_{i,j}!}.$$

4. La base de Milnor dans l'algèbre de Steenrod S^* .

Commençons par le cas où $p = 2$. Pour toute suite $R = (r_1, \dots, r_k, \dots)$ d'entiers ≥ 0 , nuls sauf un nombre fini, on notera

$Sq^R = Sq^{r_1, \dots, r_k, \dots}$ l'élément de la base de S^* , duale de la base de S_* formée des \sum^R . Les Sq^R constituent la "base de Milnor" de S^* . Observons que $Sq^{i, 0, \dots, 0, \dots}$ n'est autre que Sq^i (Exposé 10, corollaire du lemme 3).

Il est immédiat que

$$(15) \quad \Delta^*(Sq^R) = \sum Sq^{R'} \otimes Sq^{R''} ,$$

la sommation étant étendue à tous les couples (R', R'') tels que $R' + R'' = R$ (c'est-à-dire $r'_k + r''_k = r_k$ pour tout k). D'autre part, la formule (10) donne par transposition, la table de multiplication de l'algèbre S^* :

$$(16) \quad Sq^R \cdot Sq^S = \sum_N b(N) Sq^{T(N)} ,$$

la sommation étant étendue à toutes les matrices N telles que $R(N) = R$, $S(N) = S$.

Voici quelques cas particuliers de la formule (16). Supposons d'abord que tous les termes de la suite R soient égaux à 0 ou 1 ; on a alors

$$(16. a) \quad Sq^R \cdot Sq^S = [r_1, s_1] \dots [r_k, s_k] \dots Sq^{R+S} ;$$

le coefficient de Sq^{R+S} dans le second membre est égal à 1 si et seulement si s_k est pair pour tous les k tels que $r_k = 1$; sinon il est égal à 0. On a notamment

$$Sq^1 Sq^i = (1+i) Sq^{1+i} ,$$

$$Sq^{0,0,\dots,1,0,\dots} Sq^i = Sq^{i,0,\dots,1,0,\dots} .$$

Plus particulièrement, si les termes de R et ceux de S sont tous égaux à 0 ou 1, on a

$$(16. b) \quad Sq^R \cdot Sq^S = \begin{cases} Sq^{R+S} & \text{si tous les termes de } R+S \text{ sont } 0 \text{ ou } 1 , \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Donc les Sq^R (relatifs aux suites R ne contenant que 0 et 1) forment la base d'une sous-algèbre commutative de S^* ; tous ces Sq^R , sauf $Sq^0 = 1$, sont de carré nul, et la sous-algèbre en question est donc l'algèbre extérieure engendrée par $Sq^1, Sq^{0,1}, Sq^{0,0,1}, \dots$

Il sera commode de noter Sq_k l'élément Sq^R , où $R = (r_1, \dots, r_k, \dots)$ est tel que

$$\begin{cases} r_i = 0 & \text{pour } i \neq k \\ r_k = 1 \end{cases}$$

Ainsi $Sq_1 = Sq^1$, $Sq_2 = Sq^{0,1}$, etc.

EXERCICE. - (Toujours dans le cas $p = 2$) : vérifier que les Sq_k admettent la définition récurrente

$$Sq_{k+1} = Sq^{2^k} Sq_k + Sq_k Sq^{2^k}, \quad k \geq 1.$$

Etudions maintenant le cas où p est premier impair. Pour toute suite $R = (r_1, \dots, r_k, \dots)$ d'entiers ≥ 0 , nuls sauf un nombre fini, on notera \mathcal{P}^R celui des éléments de la base de S^* , duale de la base formée des $\tau^{E'} \cdot \xi^{R'}$, qui correspond à l'élément ξ^R . De même, pour toute suite $E = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k, \dots)$ d'entiers égaux à 0 ou 1, nuls sauf un nombre fini, on notera β^E celui des éléments de la base de S^* qui correspond à l'élément τ^E de la base de S_* . On a donc

$\langle \mathcal{P}^R, \xi^R \rangle = 1$, $\langle \mathcal{P}^R, \tau^{E'} \cdot \xi^{R'} \rangle = 0$ si $E \neq (0)$, ou si $E = (0)$ et $R' \neq R$.

$\langle \beta^E, \tau^E \rangle = 1$, $\langle \beta^E, \tau^{E'} \cdot \xi^R \rangle = 0$ si $R \neq (0)$, ou si $R = (0)$ et $E' \neq E$.

D'après l'Exposé 10 (corollaire du lemme 4), l'élément $\mathcal{P}^{1,0,0,\dots}$ n'est autre que \mathcal{P}^1 ; de même, $\beta^{1,0,0,\dots}$ n'est autre que l'opération de Bockstein β . Il sera commode de noter \mathcal{P}_k (pour k entier ≥ 1) l'élément \mathcal{P}^R , où $R = (r_1, \dots, r_k, \dots)$ est tel que $r_i = 0$ pour $i \neq k$, $r_k = 1$; et on notera β_k (pour tout entier ≥ 0) l'élément β^E , où $E = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k; \dots)$ est tel que $\varepsilon_i = 0$ pour $i \neq k$, $\varepsilon_k = 1$. L'élément \mathcal{P}_k a le degré $2(p^k - 1)$, et l'élément β_k a le degré $2p^k - 1$; β_0 n'est autre que β .

PROPOSITION 3. - Le produit $\beta^E \cdot \mathcal{P}^R$ a un produit scalaire égal à 1 avec $\tau^{E'} \cdot \xi^{R'}$, et égal à 0 avec tout autre élément de la base de S_* . Autrement dit, les produits $\beta^E \cdot \mathcal{P}^R$ constituent la base duale de la base de S_* .

DÉMONSTRATION. - On veut montrer que $\langle \mathcal{I}^*(\beta^E \otimes \mathcal{P}^R), \tau^{E'} \cdot \xi^{R'} \rangle$ est égal

à 1 si $E = E'$ et $R = R'$, à 0 dans le cas contraire. Or c'est égal à

$$\langle \beta^E \otimes \mathcal{O}^R, \Delta_*(\tau^{E'}) \cdot \Delta_*(\xi^{R'}) \rangle,$$

et les formules (13) et (14) montrent aussitôt que ceci est égal à

$$\langle \beta^E \otimes \mathcal{O}^R, (\tau^{E'} \otimes 1) \cdot (1 \otimes \xi^{R'}) \rangle = \langle \beta^E, \tau^{E'} \rangle \cdot \langle \mathcal{O}^R, \xi^{R'} \rangle,$$

d'où la proposition.

THÉOREME 1. - Les β^E forment la base d'une sous-algèbre de S^* ; d'une façon précise, le produit $\beta^E \cdot \beta^{E'}$ est nul, sauf si la suite $E + E'$ ne contient que 0 et 1, auquel cas on a

$$\beta^E \cdot \beta^{E'} = (-1)^q \beta^{E+E'},$$

où q désigne le nombre des couples d'entiers $k, h \geq 0$ tels que

$$\xi_k = 1, \quad \xi'_h = 1, \quad k > h.$$

(La sous-algèbre ayant pour base les β^E est donc l'algèbre extérieure construite sur les β_k ($k \geq 0$), ces éléments anticommute deux à deux; et l'on a, si $E = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k, \dots)$, $\beta^E = (\beta_0)^{\varepsilon_0} \dots (\beta_k)^{\varepsilon_k} \dots$).

Les \mathcal{O}^E engendrent une sous-algèbre de S^* , dont la table de multiplication est donnée par

$$(17) \quad \mathcal{O}^R \cdot \mathcal{O}^S = \sum_N b(N) \mathcal{O}^{T(N)},$$

la sommation étant étendue à toutes les matrices N telles que $R(N) = R$, $S(N) = S$. Enfin, la loi de commutation des deux sous-algèbres précédentes est donnée par la formule

$$(18) \quad \mathcal{O}^R \cdot \beta_k = \beta_k \cdot \mathcal{O}^R + \beta_{k+1} \mathcal{O}^{R-(p^k, 0, \dots)} + \beta_{k+2} \mathcal{O}^{R-(0, p^k, 0, \dots)} \\ + \beta_{k+3} \mathcal{O}^{R-(0, 0, p^k, 0, \dots)} + \dots$$

Toutes les assertions du théorème sont des conséquences faciles des formules (13) et (14); on laisse au lecteur le soin de les vérifier.

COROLLAIRE. - La formule (18) donne notamment

$$(18. a) \quad \beta_{k+1} = \mathcal{O}^{p^k} \cdot \beta_k - \beta_k \cdot \mathcal{O}^{p^k}$$

pour tout entier $k \geq 0$.

Enfin, on explicite aisément l'application diagonale de S^* , transposée de la multiplication de S_* :

$$(19) \quad \begin{cases} \Delta^*(\beta_k) = \beta_k \otimes 1 + 1 \otimes \beta_k \\ \Delta^*(\mathcal{P}^R) = \sum \mathcal{P}^{R'} \otimes \mathcal{P}^{R''} \end{cases} ,$$

la sommation étant étendue à tous les couples (R', R'') tels que $R' + R'' = R$.

Comme dans le cas $p = 2$ pour la formule (16), on peut, lorsque p est premier impair, tirer quelques conséquences intéressantes de la relation (17) : supposons que tous les termes de la suite R soient $< p$: alors

$$(17. a) \quad \mathcal{P}^R \cdot \mathcal{P}^S = [r_1, s_1] \dots [r_k, s_k] \dots \mathcal{P}^{R+S} .$$

S'il existe un k tel que le reste de s_k (modulo p) soit $\geq p - r_k$, ceci est nul. En particulier, les \mathcal{P}^R relatifs aux suites R dont tous les termes sont $< p$, forment la base d'une sous-algèbre commutative de S^* .

A titre d'exercice, on vérifiera que les \mathcal{P}_k admettent la définition récurrente suivante

$$\mathcal{P}_{k+1} = \mathcal{P}^{p^k} \cdot \mathcal{P}_k - \mathcal{P}_k \cdot \mathcal{P}^{p^k}, \quad k \geq 1 \quad (\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}^1) .$$
