Italo Giorgiutti

L'algèbre de Steenrod et sa duale

Séminaire Henri Cartan, tome 11, n° 2 (1958-1959), exp. n° 10, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_2_A1_0>

L'ALGÈBRE DE STEENROD ET SA DUALE

par Italo GIORGIUTTI

1. Généralités sur les algèbres de Hopf (cf. [4]).

K désigne un corps de base, commutatif. Une algèbre de Hopf est définie par la donnée :

1° d'un K-espace vectoriel gradué A, tel que chaque A_n soit de dimension finie (comme espace vectoriel), avec $A_n = 0$ pour $n < 0$, et $A_0 \approx K$ (l'isomorphisme de A_0 sur K est donné). On note η l'injection $K \longrightarrow A$, composée de l'isomorphisme $K \approx A_0$ et de l'injection naturelle $A_0 \longrightarrow A$. On note ε l'augmentation $A \longrightarrow K$, composée de la projection naturelle $A \longrightarrow A_0$ et de l'isomorphisme $A_0 \approx K$;

2° d'une application K-linéaire de degré 0 :

$$\Phi : A \otimes_K A \longrightarrow A \quad ,$$

qui fait de A une algèbre graduée (non supposée associative en général), admettant $1 \in K$ comme élément unité ; le fait que 1 est élément unité se traduit comme suit : les deux applications composées

$$A = K \otimes A \xrightarrow{\eta \otimes 1_A} A \otimes A \xrightarrow{\Phi} A$$

$$A = A \otimes K \xrightarrow{1_A \otimes \eta} A \otimes A \xrightarrow{\Phi} A$$

sont l'identité ;

3° d'une application K-linéaire de degré 0 (appelée "application diagonale")

$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes_K A$$

qui fait de A une coalgèbre graduée (non supposée associative en général), admettant ε comme élément unité, ce qui signifie ceci : les deux applications composées

$$A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1_A} K \otimes A = A$$

$$A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \xrightarrow{1_A \otimes \varepsilon} A \otimes K = A$$

sont l'identité. Il revient au même de dire que l'on a

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1 \text{ , et, pour } a \in A_n \quad (n > 0) \text{ ,}$$

$$\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a + \sum_i u_i \otimes v_i \quad ,$$

les u_i et les v_i étant homogènes de degrés > 0. Autre condition équivalente : pour tout $a \in A$, $\Delta a - (a \otimes 1)$ est dans le noyau de $1_A \otimes \varepsilon$, et $\Delta a - (1 \otimes a)$ est dans le noyau de $\varepsilon \otimes 1_A$.

Les données précédentes sont en outre assujetties à l'unique condition suivante : le diagramme

$$(1) \qquad \begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\Delta \otimes \Delta"] \arrow[d, "\Phi"] & A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[r, "1_A \otimes T \otimes 1_A"] & A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[d, "\Phi \otimes \Phi"] \\ A \arrow[rr, "\Delta"] & & A \otimes A \end{tikzcd}$$

où $T(x \otimes y) = (-1)^{\xi\eta}\, y \otimes x$, avec $\xi = \deg x$, $\eta = \deg y$, est <u>commutatif</u>.

La commutativité de (1) exprime que, lorsqu'on munit $A \otimes A$ de sa structure d'algèbre graduée (produit tensoriel "gauche" de deux algèbres graduées), l'application Δ est un homomorphisme d'algèbres graduées. La commutativité de (1) exprime aussi, dualement, que Φ est un homomorphisme de coalgèbres graduées.

DÉFINITION. - On dit que la multiplication Φ est <u>associative</u> si le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\Phi \otimes 1_A"] \arrow[d, "1_A \otimes \Phi"] & A \otimes A \arrow[d, "\Phi"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\Phi"] & A \end{tikzcd}$$

est commutatif. De même, on dit que l'application diagonale Δ est associative si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & A \otimes A \arrow[d, "1_A \otimes \Delta"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\Delta \otimes 1_A"] & A \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$$

On dit que la multiplication Φ est <u>commutative</u> (ou, plus exactement, anticommutative) si le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\Phi"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "\Phi"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Définition analogue de la commutativité de Δ.

<u>Algèbre de Hopf duale</u> : Soit A^* le dual-gradué de l'espace vectoriel gradué A, c'est-à-dire

$$A^* = \sum_n A^n \quad , \quad A^n = \mathrm{Hom}_K(A_n , K) \quad .$$

Soient $\varepsilon^* : A^* \to K$ et $\eta^* : K \to A^*$ les transposées des applications η et ε. Identifions $A^* \otimes A^*$ au dual-gradué de $A \otimes A$, en définissant comme produit scalaire $(A^* \otimes A^*) \otimes (A \otimes A) \to K$ l'application composée

$$A^* \otimes A^* \otimes A \otimes A \xrightarrow{1 \otimes T \otimes 1} A^* \otimes A \otimes A^* \otimes A \xrightarrow{\lambda \otimes \lambda} K \otimes K = K \quad ,$$

λ désignant le produit scalaire ; en d'autres termes, on pose

$$< x' \otimes y' \; , \; x \otimes y > = (-1)^{\xi\eta'} < x' \, , \, x > . < y' \, , \, y > \quad ,$$

avec $\xi' = \deg x'$, $\eta = \deg y$.

Alors l'application Φ a pour transposée une application

$$\Delta^* : A^* \to A^* \otimes A^*$$

de degré 0 ; de même, l'application Δ a pour transposée une application

$$\Phi^* : A^* \otimes A^* \to A^*$$

de degré 0 . Il est immédiat que les applications η^* , ε^* , Φ^* et Δ^* définissent A^* comme algèbre de Hopf (on notera, en particulier, que le ~~diagramme~~ ~~trans~~posé de (1) est commutatif, et que l'application transposée de $T : A \otimes A \to A \otimes A$ est l'application $A^* \otimes A^* \to A^* \otimes A^*$ qui envoie $x' \otimes y'$ en $(-1)^{\xi'\eta'} \; y' \otimes x'$, avec $\xi' = \deg x'$, $\eta' = \deg y'$).

On dit que A^* est l'algèbre de Hopf duale de A.

Bidualité : on identifie A au dual-gradué de A^* , en convenant que $\langle x \, , \, x' \rangle = \langle x' \, , \, x \rangle$. Alors $A \otimes A$ s'identifie au dual-gradué de $A^* \otimes A^*$, l'application Δ est transposée de Φ^* , et Φ est transposée de Φ^* . Donc l'algèbre de Hopf Δ s'identifie à l'algèbre de Hopf duale de A^* .

2. L'algèbre de Steenrod.

On note p un nombre premier. Conformément à la définition donnée dans l'Exposé 9, paragraphe 2 A (page 9-08), on considère l'espace vectoriel (sur le corps Z_p) S^i formé des opérations cohomologiques stables de type $(i \, , Z_p \, , Z_p)$; une telle opération s définit donc, pour tout entier n , une application linéaire $H^n(X \, ; Z_p) \to H^{n+i}(X \, ; Z_p)$, et ceci pour tout ensemble simplicial X . Rappelons que S^i est un Z_p-espace vectoriel de dimension finie (cf. Exposé 9, lemme de la page 9-05).

Soit S^* la somme directe des S^i . La composition des opérations cohomologiques stables définit sur S^* une structure d'algèbre graduée associative, ayant pour élément unité l'opération identique. La sous-algèbre S^0 des éléments de degré 0 s'identifie canoniquement au corps de base Z_p, puisque les seules opérations cohomologiques de degré 0 sont définies par les homomorphismes $Z_p \to Z_p$ des groupes de coefficients.

D'autre part, on a défini (Exposé 9, paragraphe 2 C, page 9-10) une <u>application diagonale</u> Δ dans S^* ; Δ envoie S^i dans $\sum_{j+k=i} S^j \otimes S^k$. Cette application diagonale est caractérisée par la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ. - Si, pour tout couple d'ensembles simpliciaux X, Y, on note C l'injection canonique

$$H^*(X ; Z_p) \otimes H^*(Y ; Z_p) \longrightarrow H^*(X \times Y ; Z_p) \quad ,$$

on a, pour tout $s \in S^*$,

(2) $C \circ (\Delta s) = s \circ C$ (égalité de deux applications de $H^*(X ; Z_p) \otimes H^*(Y ; Z_p)$ dans $H^*(X \times Y ; Z_p)$, étant entendu que l'on fait opérer $S^* \otimes S^*$ sur $H^*(X ; Z_p) \otimes H^*(Y ; Z_p)$ en respectant la "règle des signes" : $(s' \otimes s'') \cdot (u \otimes v) = (-1)^{qr}(s' \cdot u) \otimes (s'' \cdot v)$, où q et r désignent les degrés de s'' et u respectivement).

PROPOSITION 1. - <u>Munie de l'application diagonale Δ, S^* est une algèbre de Hopf. De plus l'application diagonale est associative et commutative.</u>

DÉMONSTRATION.

a. Pour tout $s \in S^*$, $\Delta s - (s \otimes 1)$ est annulé par $1 \otimes \varepsilon$. En effet, prenons Y réduit à un point, et identifions X à $X \times Y$; alors C s'identifie à l'isomorphisme de $H^*(X) \otimes H^*(Y) = H^*(X) \otimes Z_p$ avec $H^*(X)$; **a priori**, $\Delta s - s' \otimes 1$ appartient au noyau de $1 \otimes \varepsilon$; alors la relation (2) montre que $s' = s$, ce qu'il fallait démontrer. On verrait de même que, pour tout $s \in S^*$, $\Delta s - (1 \otimes s)$ est annulé par $\varepsilon \otimes 1$.

b. Pour montrer que le diagramme (1) est commutatif (lorsqu'on y remplace A par S^*), il suffit de prouver que l'application diagonale $\Delta : S^* \to S^* \otimes S^*$ est <u>multiplicative</u> (la structure multiplicative de $S^* \otimes S^*$ étant celle du produit tensoriel gauche de deux algèbres graduées). Or soient s, $s' \in S^*$; l'opération composée $(\Delta s) \circ (\Delta s')$ (où Δs et $\Delta s'$ opèrent dans $H^*(X ; Z_p) \otimes H^*(Y ; Z_p)$) n'est autre que celle définie par le produit $(\Delta s) \cdot (\Delta s')$ dans l'algèbre $S^* \otimes S^*$. On a alors

$$(ss') \circ C = s \circ s' \circ C = s \circ C \circ (\Delta s') = C \circ (\Delta s) \circ (\Delta s') = C \circ ((\Delta s) \cdot (\Delta s'))$$

et ceci prouve que $\Delta(ss') = (\Delta s)(\Delta s')$.

c. L'associativité de Δ résulte de la relation caractéristique (2) et de l'associativité de l'application C , cette dernière exprimant la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^*(X) \otimes H^*(X') \otimes H^*(X'') & \xrightarrow{C \otimes 1} & H^*(X \times X') \otimes H^*(X'') \\ \downarrow 1 \otimes C & & \downarrow C \\ H^*(X) \otimes H^*(X' \times X'') & \xrightarrow{C} & H^*(X \times X' \times X'') \end{array}$$

(on identifie $X \times (X' \times X'')$ et $(X \times X') \times X''$ comme d'habitude).

d. Reste enfin à prouver la commutativité de l'application Δ . Notons f l'application naturelle $X \times Y \rightarrow Y \times X$ (qui envoie le point (x , y) au point (y , x)) ; et soit T l'application $H^*(X) \otimes H^*(Y) \rightarrow H^*(Y) \otimes H^*(X)$ qui envoie $u \otimes v$ en $(-1)^{qr}\, v \otimes u$ (q et r désignant les degrés des éléments u et v supposés homogènes). Il est bien connu que

$$C \circ T = f^* \circ C \quad ,$$

où $f^* : H^*(Y \times X) \rightarrow H^*(X \times Y)$ est induit par f . On a

$$C \circ T \circ (\Delta s) = f^* \circ C \circ (\Delta s) = f^* \circ s \circ C = s \circ f^* \circ C = s \circ C \circ T = C \circ (\Delta s) \circ T ,$$

d'où, puisque C est une injection,

$$T \circ (\Delta s) \circ T^{-1} = \Delta s \quad .$$

La commutativité de l'application Δ résulte alors du fait que

$$T \circ (s' \otimes s'') \circ T^{-1} = (-1)^{q'q''}\, s'' \otimes s' \quad ,$$

avec $q' = \deg s'$, $q'' = \deg s''$.

Ainsi la proposition 1 est démontrée. Par définition, S^* , munie de sa structure d'algèbre de Hopf, s'appelle l'algèbre de Steenrod. Pour chaque p premier, il y a une algèbre de Steenrod.

L'algèbre de Hopf duale de S^* sera notée S_* ; on notera S_n l'espace vectoriel des éléments de degré n de S_* . D'après la proposition 1, la multiplication de S_* est associative et commutative (i. e. anticommutative). On se propose, dans cet Exposé et le suivant, d'expliciter complètement la structure d'algèbre de Hopf de S_* , en suivant MILNOR [3].

3. Propriétés connues de l'algèbre de Steenrod.

Nous allons donner ici la liste des résultats supposés connus au sujet de S^* , et qui ont d'ailleurs été démontrés en partie dans l'Exposé 9 pour le cas $p = 2$. Pour le reste, nous renvoyons aux articles cités en [1], [2], [5] dans la Bibliographie, ainsi qu'au Séminaire Cartan 1954/55 où sont démontrés tous ces résultats.

Cas $p = 2$. - Sq^i désigne l'unique opération cohomologique stable de type (i, Z_2, Z_2) telle que $Sq^i x = x^2$ pour $x \in H^i(X ; Z_2)$, (cf. Exposé 9). Sq^0 est l'identité, et on a $Sq^i x = 0$ si $\deg (x) < i$.

Pour toute suite d'entiers ≥ 0

$I = (a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$, nuls pour k assez grand, on définit

$$Sq^I = Sq^{a_1} \circ Sq^{a_2} \circ \ldots \circ Sq^{a_k} \circ \ldots ,$$

ce qui a un sens puisque Sq^{a_k} est l'identité pour k grand. On sait que les Sq^I relatifs aux suites I telles que $a_k \geq 2a_{k+1}$, forment une base du Z_2-espace vectoriel S^* ; en réalité, on aura seulement besoin de savoir que ces Sq^I engendrent l'espace vectoriel S^*.

Cas p premier impair. - Soit β l'opérateur de Bockstein

$$H^n(X ; Z_p) \longrightarrow H^{n+1}(X ; Z_p) ,$$

associé à la suite exacte de coefficients

$$0 \to Z_p \longrightarrow Z_{p^2} \longrightarrow Z_p \longrightarrow 0$$

(On ne fait pas la convention de signe adoptée dans [2] ; ainsi β anticommute avec la suspension, et c'est bien une opération cohomologique stable, au sens de l'Exposé 9, page 9-08). Soit d'autre part, pour chaque entier $i \geq 0$, $\mathcal{P}^i$ l'opération de Steenrod de degré $2i(p - 1)$: c'est l'unique opération cohomologique stable de type $(2i(p - 1), Z_p, Z_p)$ telle que $\mathcal{P}^i x = x^p$ pour $x \in H^{2i}(X ; Z_p)$. $\mathcal{P}^0$ est l'identité, et on a $\mathcal{P}^i x = 0$ si $\deg x < 2i$. Définissons, pour tout entier $a \geq 0$, congru à 0 ou 1 modulo $2p - 2$:

$$(3) \qquad St^a = \begin{cases} \mathcal{P}^i & \text{si } a = 2i(p - 1) , \\ \beta \circ \mathcal{P}^i & \text{si } a = 2i(p - 1) + 1 . \end{cases}$$

Pour toute suite $I = (a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$ telle que $a_k \equiv 0$ ou 1 (mod $2p - 2$), $a_k = 0$ pour k assez grand, définissons

$St^I = St^{a_1} \circ St^{a_2} \circ \ldots \circ St^{a_k} \circ \ldots$. On sait que les St^I relatifs aux suites "admissibles" I, c'est-à-dire telles que $a_k \geq pa_{k+1}$, forment une base du

Z_p-espace vectoriel S^*. En réalité, on aura seulement besoin de savoir que ces Sq^I engendrent l'espace vectoriel S^*.

REMARQUE. - Pour $p = 2$, convenons de poser $\mathcal{P}^i = Sq^{2i}$. On sait (Exposé 9, paragraphe 3) que $\beta = Sq^1$; alors les formules (3) sont encore valables si on y écrit Sq^a au lieu de St^a (cf. page 9-13).

Détermination de l'application diagonale de S^*.

Commençons par le cas où $p = 2$. Puisque les Sq^i engendrent l'algèbre S^* et que l'application diagonale Δ est un homomorphisme d'algèbres graduées, l'application Δ est théoriquement connue quand on connaît les $\Delta(Sq^i)$. On á démontré (Exposé 9, paragraphe 3, B) :

$$(4) \qquad \Delta(Sq^i) = \sum_{j+k=i} Sq^j \otimes Sq^k \quad .$$

Sur cette formule, on peut vérifier l'associativité et la commutativité de Δ. La formule (4) s'interprète comme suit : posons $Sq = \sum_{i \geq 0} Sq^i$; alors, si x et $x' \in H^*(X\ ;\ Z_2)$, on a $Sq(xx') = (Sq\ x)(Sq\ x')$; autrement dit, Sq est un endomorphisme de l'algèbre $H^*(X\ ;\ Z_2)$.

Soit maintenant p premier impair. Il est immédiat que

$$(5) \qquad \Delta(\beta) = \beta \otimes 1 + 1 \otimes \beta \quad ,$$

et on démontre (en utilisant par exemple la même méthode que dans l'Exposé 9 pour $p = 2$) que

$$(5') \qquad \Delta(\mathcal{P}^i) = \sum_{j+k=i} \mathcal{P}^j \otimes \mathcal{P}^k \quad .$$

Puisque l'algèbre S^* est engendrée par β et les $\mathcal{P}^i$, les formules (5) et (5') déterminent théoriquement l'application Δ. Ici encore, on peut vérifier directement l'associativité ét la commutativité de Δ. Si on pose $\mathcal{P} = \sum_i \mathcal{P}^i$, $\mathcal{P}$ est un endomorphisme de l'algèbre de cohomologie $H^*(X\ ;\ Z_p)$.

REMARQUE. - Il faut prendre garde que si l'on pose, comme on l'a dit plus haut, $\mathcal{P}^i = Sq^{2i}$ dans le cas $p = 2$, la formule (5') devient inexacte.

4. Etude des opérations de S^* dans $H^*(Z_p\ ,\ 1\ ;\ Z_p)$.

$H^*(Z_p\ ,\ 1\ ;\ Z_p)$ est l'algèbre de cohomologie, à coefficients dans Z_p, de $K(Z_p\ ,\ 1)$. Il est bien connu (cf. par exemple l'Exposé 8, paragraphe 3) que :

Si $p = 2$; $H^*(Z_2, 1; Z_2)$ est une algèbre de polynômes engendrée par un élément $x \in H^1(Z_2, 1; Z_2)$;

Si p est premier impair, $H^*(Z_p, 1; Z_p)$ est le produit tensoriel d'une algèbre extérieure à un générateur $x \in H^1(X_p, 1; Z_p)$ et d'une algèbre de polynômes à un générateur $y \in H^2(Z_p, 1; Z_p)$, avec $y = \beta x$.

LEMME 1. - Soit $p = 2$. Pour toute suite I différente de $(0, 0, \ldots, 0, \ldots)$, on a $Sq^I x = 0$, sauf si I est de la forme $(2^k, 2^{k-1}, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$, auquel cas $Sq^I x = x^{2^{k+1}}$.

DÉMONSTRATION. - Pour des raisons de degré, on a :

$$Sq\ x = x + x^2 \quad ,$$

d'où, puisque Sq est un endomorphisme de l'algèbre $H^*(Z_2, 1; Z_2)$,

$$Sq(x^{2^k}) = x^{2^k} + x^{2^{k+1}} \quad ;$$

on a donc $Sq^i x^{2^k} = 0$ sauf si $i = 0$ ou $i = 2^k$. On en déduit aussitôt le lemme.

LEMME 2. - Soit p premier impair. Pour toute suite I différente de $(0, \ldots, 0, \ldots)$, on a

$St^I y = 0$, sauf si St^I est de la forme $\mathcal{P}^{p^k} \mathcal{P}^{p^{k-1}} \ldots \mathcal{P}^1$, auquel cas on a $St^I y = y^{p^{k+1}}$. On a de même

$St^I x = 0$, sauf si $St^I = \beta$ (auquel cas $x = y$) ou si St^I est de la forme $\mathcal{P}^{p^k} \mathcal{P}^{p^{k-1}} \ldots \mathcal{P}^1 \beta$, auquel cas $St^I x = y^{p^{k+1}}$.

DÉMONSTRATION. - On a $\mathcal{P} y = y + y^p$, d'où

$$\mathcal{P}(y^{p^k}) = y^{p^k} + y^{p^{k+1}} \quad ,$$

ce qui entraîne $\mathcal{P}^i(y^{p^k}) = 0$ sauf si $i = 0$ ou $i = p^k$. De plus $\beta y = 0$ (puisque $y = \beta x$ et que $\beta\beta = 0$), donc $\beta(y^j) = 0$ pour tout entier j. De là on déduit la première partie de l'énoncé.

La deuxième partie se prouve en observant que $\mathcal{P}^i x = 0$ pour $i \geq 1$ (pour des raisons de degré) et $\beta x = y$.

Revenons au cas $p = 2$. Il résulte du lemme 1 que, pour tout élément $s \in S^*$, on a :

(6) $$sx = \sum_{i \geq 0} a_i x^{2^i} , \text{ avec } a_i \in Z_2 .$$

Il est clair que les coefficients a_i dépendent linéairement de s ; il est immédiat que a_i s'annule sur les s homogènes de degré $\neq 2^i - 1$; autrement dit, la forme linéaire a_i est un élément homogène de S_*, de degré $2^i - 1$. On notera désormais ξ_i cet élément. Observer que $\xi_0 = 1$, élément unité de l'algèbre S_*.

Soit $P(\xi_0 , \xi_1 , \ldots , \xi_k , \ldots)$ l'algèbre des polynômes construite sur les générateurs ξ_i (d'élément unité ξ_0) : c'est une algèbre graduée. Puisque l'algèbre graduée S_* est associative et commutative, on a un homomorphisme d'algèbres graduées unitaires $\rho : P(\xi_0 , \ldots , \xi_k , \ldots) \rightarrow S_*$.

THÉORÈME 1. - Pour $p = 2$, l'homomorphisme ρ est un isomorphisme d'algèbres graduées.

Ce théorème sera démontré au paragraphe 5. Passons au cas où p est premier impair. Il résulte du lemme 2 que, pour tout $s \in S^*$, on a

(7) $$sv = \sum_{i \geq 0} a_i y^{p^i} , \quad sx = a_0 x + \sum_{i \geq 0} b_i y^{p^i} ,$$

les a_i et les b_i appartenant à Z_p. Ces coefficients a_i et b_i dépendent linéairement de s. D'une façon précise, a_i définit sur S^* une forme linéaire de degré $2(p^i - 1)$, que nous noterons ξ_i ; et b_i définit une forme linéaire de degré $2p^i - 1$, que nous noterons τ_i. Ainsi les ξ_i et les τ_i sont des éléments homogènes de S_* et ξ_0 est l'élément unité de l'algèbre S_*.

Soit $U(\xi_i , \tau_i)$ le produit tensoriel de l'algèbre extérieure construite sur les générateurs τ_i (de degrés $2p^i - 1$) et de l'algèbre des polynômes construite sur les générateurs ξ_i (de degrés $2p^i - 2$), ξ_0 étant pris pour élément unité. Puisque l'algèbre graduée S_* est associative et anticommutative, on a un homomorphisme d'algèbres graduées unitaires $\rho : U(\xi_i , \tau_i) \rightarrow S_*$.

THÉORÈME 2. - Pour p premier impair, l'homomorphisme ρ est un isomorphisme d'algèbres graduées.

Ce théorème sera démontré au paragraphe 6. Les théorèmes 1 et 2 déterminent entièrement la structure d'algèbre graduée de S_*.

PROPOSITION 2. - Dans le cas $p = 2$, on a $\langle \xi_k , Sq^I \rangle = 0$, sauf si $I = (2^{k-1} , 2^{k-2} , \ldots , 1 , 0 , \ldots)$, auquel cas $\langle \xi_k , Sq^I \rangle = 1$. Dans le cas où p est premier impair, on a $\langle \xi_k , St^I \rangle = 0$, sauf si

$I = (p^{k-1}(2p-2)\,,\ p^{k-2}(2p-2)\,,\ \ldots\,,\ 2p-2\,,\ 0\,,\ \ldots)$, auquel cas $\langle \xi_k\,,\ St^I \rangle = 1$; de plus, on a $\langle \tau_k\,,\ St^I \rangle = 0$, sauf si $I = (p^{k-1}(2p-2)\,,\ p^{k-2}(2p-2)\,,\ \ldots\,,\ 2p-2\,,\ 1\,,\ 0\,,\ \ldots)$, auquel cas $\langle \tau_k\,,\ St^I \rangle = 1$.

La proposition 2 résulte aussitôt de la définition des ξ_i et des τ_i , et des lemmes 1 et 2.

5. Démonstration du théorème 1.

On suppose ici $p = 2$. A chaque suite $(r_1\,,\ \ldots\,,\ r_k\,,\ \ldots)$ d'entiers $\geqslant 0$, nuls sauf un nombre fini, associons la suite

$$I = (a_1\,,\ \ldots\,,\ a_k\,,\ \ldots)\,, \text{ avec } a_k = \sum_{i \geqslant k} 2^{i-k}\, r_i\ .$$

on a

$$a_k = 2a_{k+1} + r_k\ .$$

Donc la suite I est admissible (c'est-à-dire $a_k \geqslant 2a_{k+1}$). Réciproquement, toute suite admissible définit la suite des

$$r_k = a_k - 2a_{k+1} \qquad (k = 1\,,\ 2\,,\ \ldots)\ .$$

On obtient ainsi une correspondance bijective entre les suites $(r_1\,,\ \ldots\,,\ r_k\,,\ \ldots)$ et les suites admissibles I . On notera $\omega(I)$ le monôme $\prod_k (\xi_k)^{r_k} \in S_*$ qui correspond à une suite admissible I . Observons que le degré du monôme $\omega(I)$ est égal à celui de $Sq^I \in S^*$.

Ordonnons l'ensemble des suites admissibles I par l'ordre lexicographique à partir de la droite. On va prouver le lemme suivant :

LEMME 3. - $\langle \omega(J)\,,\ Sq^I \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } I < J\,, \\ 1 & \text{si } I = J\,. \end{cases}$

Le théorème 1 en résultera. En effet, la matrice des $\langle \omega(J)\,,\ Sq^I \rangle$ étant triangulaire, avec 1 dans la diagonale principale, il s'ensuit que les Sq^I sont linéairement indépendants dans S^* , et comme on sait qu'ils engendrent l'espace vectoriel S^* , on conclut que les $\omega(J)$ forment une base de l'espace dual S_* , d'où le théorème 1.

Démontrons maintenant le lemme 3. L'assertion est triviale si $J = (0\,,\ 0\,,\ \ldots)$. Supposons donc $J = (a_1\,,\ \ldots\,,\ a_k\,,\ 0\,,\ \ldots)$, avec $a_k \geqslant 1$;

alors, puisque $I \leqslant J$, on a $I = (b_1 , \dots , b_k , 0 , \dots)$, avec $b_k \leqslant a_k$.

Le monôme $\omega(J)$ est égal au produit $\omega(J')\, \xi_k$, avec

$$J' = (a_1 - 2^{k-1} , a_2 - 2^{k-2} , \dots , a_k - 1 , 0 , \dots) \quad .$$

On a donc

$$< \omega(J) , Sq^I > = < \omega(J')\, \xi_k , Sq^I > \quad ,$$

et puisque l'application diagonale Δ de S^* est transposée de la multiplication de S_* , ceci est égal à $< \omega(J') \otimes \xi_k , \Delta(Sq^I) >$.

Or la formule (4) entraîne $\Delta(Sq^I) = \sum Sq^{I'} \otimes Sq^{I''}$, la sommation étant étendue à tous les couples (I' , I'') tels que $I' + I'' = I$ (ce qui signifie que si $I' = (b'_1 , \dots , b'_i , \dots)$ et $I'' = (b''_1 , \dots , b''_i , \dots)$, on a $b_i = b'_i + b''_i$ pour tout i). D'où

$$< \omega(J) , Sq^I > = \sum < \omega(J') , Sq^{I'} > . < \xi_k , Sq^{I''} > \quad .$$

Or, d'après la proposition 2, $< \xi_k , Sq^{I''} >$ est nul sauf si $I'' = (2^{k-1} , 2^{k-2} , \dots , 1 , 0 , \dots)$, auquel cas c'est égal à 1 . De deux choses l'une : ou bien $b_k = 0$, et alors il est impossible que $I = I' + I''$ (I'' ayant la valeur qu'on vient de préciser) ; dans ce cas, on voit que $< \omega(J) , Sq^I > = 0$. Ou bien $b_k \geq 1$, et alors on voit que $< \omega(J) , Sq^I > = < \omega(J') , Sq^{I'} >$, avec $I' = (b_1 - 2^{k-1} , b_2 - 2^{k-2} , \dots , b_k - 1 , 0 , \dots)$.

La suite I' est alors admissible, et $I' \leq J'$. D'où l'assertion du lemme 3, par récurrence sur le degré commun de $\omega(J)$ et de Sq^I .

COROLLAIRE <u>du lemme</u> 3. - <u>On a</u> $< (\xi_1)^i , Sq^i > = 1$, <u>et</u> Sq^i <u>est orthogonal à tout monôme de</u> S_* <u>autre que</u> $(\xi_1)^i$.

En effet, la suite $I = (i , 0 , \dots)$ est antérieure (dans l'ordre lexicographique) à toute suite admissible de même degré.

6. <u>Démonstration du théorème</u> 2.

On suppose que p est premier impair. L'algèbre $U(\xi_i , \tau_i)$ admet pour base les monômes de la forme

$$(\tau_0^{\varepsilon_0} \dots \tau_i^{\varepsilon_i} \dots)(\xi_1^{r_1} \dots \xi_j^{r_j} \dots) \quad ,$$

où les exposants ε_i sont égaux à 0 ou 1 (et nuls sauf un nombre fini), et les exposants r_j sont des entiers ≥ 0 quelconques (nuls sauf un nombre fini).

A chaque suite $(\varepsilon_0 , \dots , \varepsilon_i , \dots , r_1 , \dots , r_j , \dots)$ de ce type, associons la suite $I = (a_1 , \dots , a_k , \dots)$ définie par

$$a_k = \varepsilon_{k-1} + (2p-2) \sum_{i \geqslant k} (\varepsilon_i + r_i)\, p^{i-k} \quad .$$

On a

(8) $$a_k \equiv \varepsilon_{k-1} \pmod{2p-2} \quad ,$$

(9) $$a_k - pa_{k+1} = \varepsilon_{k-1} + (p-2)\,\varepsilon_k + (2p-2)\, r_k \geqslant 0 \quad .$$

Donc la suite I est admissible. Réciproquement, toute suite admissible $I = (a_1 , \dots , a_k , \dots)$ définit la suite des ε_{k-1} par la relation (8), et ensuite (9) définit les entiers $r_k \geqslant 0$. On obtient ainsi une correspondance bijective entre les suites (ε_i , r_j) et les suites admissibles I . On notera $\omega(I)$ le monôme qui correspond de cette manière à une suite admissible I . Un calcul facile montre que le degré du monôme $\omega(I)$ est égal au degré de l'élément $St^I \in S^*$.

Ordonnons l'ensemble des suites admissibles I par l'ordre lexicographique <u>à partir de la droite</u>. On va prouver le lemme suivant :

LEMME 4. - $$\langle \omega(J) , St^I \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } I < J , \\ \pm 1 & \text{si } I = J . \end{cases}$$

Le théorème 2 en résultera évidemment.

DÉMONSTRATION du lemme 4 . - L'assertion est triviale si $J = (0 , 0 , \dots)$. Supposons donc $J = (a_1 , \dots , a_k , 0 , \dots)$, avec $a_k \neq 0$. Puisque $I \leqslant J$, on a $I = (b_1 , \dots , b_k , 0 , \dots)$, avec $b_k \leqslant a_k$. Il y a alors deux cas possibles :

<u>Premier cas</u> : $a_k \geqslant 2p-2$.

Alors le monôme $\omega(J)$ est le produit du monôme $\omega(J')$ et de ξ_k , en posant

$$J' = (a_1 - p^{k-1}(2p-2) , \dots , a_{k-1} - p(2p-2) , a_k - (2p-2) , 0 , \dots)$$

qui est aussi une suite admissible. On en déduit

$$\langle \omega(J) , St^I \rangle = \langle \omega(J') \otimes \xi_k , \Delta(St^I) \rangle \quad ;$$

or les relations (5) et (5') entraînent $\Delta(St^I) = \sum \pm St^{I'} \otimes St^{I''}$, la sommation étant étendue à tous les couples $I' = (b'_1 , \dots , b'_k , \dots)$, $I'' = (b''_1 , \dots , b''_k , \dots)$ tels que

$$\begin{cases} b'_k \equiv 0 \quad \text{ou} \quad 1 \pmod{2p-2}, & b''_k \equiv 0 \quad \text{ou} \quad 1 \pmod{2p-2} \quad, \\ b'_k + b''_k = b_k \quad . \end{cases}$$

D'où

$$< \omega(J) , St^I > = \sum \pm < \omega(J') , St^{I'} > . < \xi_k , St^{I''} > \quad .$$

D'après la proposition 2, $< \xi_k , St^{I''} >$ est nul sauf si

$$I'' = (p^{k-1}(2p-2) , \ldots , 2p-2 , 0 , \ldots) \quad ,$$

et dans ce cas c'est égal à 1 . De deux choses l'une : ou bien $b_k < 2p-2$ (c'est-à-dire $b_k = 1$ ou 0), et alors il est impossible que $I = I' + I''$, I'' ayant la valeur qu'on vient de préciser ; dans ce cas, on voit que $< \omega(J) , Sq^I > = 0$, et le lemme est démontré. Ou bien $b_k \geq 2p-2$, et alors on a

$$< \omega(J) , St^I > = \pm < \omega(J') , St^{I'} > \quad ,$$

en posant $I' = (b_1 - p^{k-1}(2p-2) , \ldots , b_{k-1} - p(2p-2) , b_k - (2p-2), 0 , \ldots)$;

dans ce cas, la suite I' est admissible, et $I' \leq J'$. D'où le principe d'~~une~~ démonstration récurrente du lemme 4.

<u>Deuxième cas</u> : $a_k = 1$.

Alors le monôme $\omega(J)$ est égal à $\omega(J')\tau_{k-1}$, où $J' = (a_1 - 1 , 0 , \ldots)$ si $k = 1$, et, si $k > 1$,

$$J' = (a_1 - p^{k-2}(2p-2) , \ldots , a_{k-1} - (2p-2) , 0 , \ldots) \quad .$$

On a donc

$$< \omega(J) , St^I > = \sum \pm < \omega(J') , St^{I'} > . < \tau_{k-1} , St^{I''} > \quad ,$$

la sommation étant étendue aux couples (I' , I'') comme il a été expliqué ci-~~dessus~~. D'après la proposition 2, $< \tau_{k-1} , St^{I''} >$ est nul sauf si $I'' = (p^{k-2}(2p-2) , \ldots , 2p-2 , 1 , 0 , \ldots)$ [si $k = 1$, on doit prendre $I'' = (1 , 0 , \ldots)$], auquel cas c'est égal à 1 . De deux choses l'une :

Ou bien $b_k = 0$, et alors il est impossible que $I = I' + I''$, I'' ayant la valeur qu'on vient de préciser ; dans ce cas, on a $< \omega(J) , St^I > = 0$, ce qui prouve le lemme.

Ou bien $b_k = 1$, et alors on a $< \omega(J) , St^I > = \pm < \omega(J') , St^{I'} >$, en posant $I' = (b_1 - 1 , 0 , \ldots)$ si $k = 1$, et, si $k > 1$,

$$I' = (b_1 - p^{k-2}(2p-2)\ ,\ \dots\ ,\ b_{k-1} - (2p-2)\ ,\ 0\ ,\ \dots) \quad ;$$

alors la suite I' est admissible, et $I' \leq J'$. D'où le principe d'une démonstration récurrente du lemme 4.

Le lemme 4 est ainsi entièrement démontré.

COROLLAIRE du lemme 4. - On a $\langle (\xi_1)^i\ ,\ \mathcal{P}^i \rangle = 1$, et $\mathcal{P}^i$ est orthogonal à tout monôme de S_* autre que $(\xi_1)^i$.

La relation écrite se vérifie par récurrence sur i ; de plus, la suite $I = (i\ ,\ 0\ ,\ \dots)$ est antérieure (dans l'ordre lexicographique) à toute suite admissible de même degré. On voit de même : $\langle \tau_0\ ,\ \beta \rangle = 1$, et β est orthogonal à tout monôme de S_* autre que τ_0 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADEM (J.). - The relations on Steenrod powers of cohomology classes, Algebraic geometry and algebraic topology, A symposium in honor of S. Lefschetz. - Princeton, Princeton University Press, 1957 ; p. 191-238.

[2] CARTAN (Henri). - Sur l'itération des opérations de Steenrod, Comment. Math. Helvet., t. 29, 1955, p. 40-58.

[3] MILNOR (J.). - The Steenrod algebra and its dual, Annals of Math., t. 67, 1958, p. 150-171.

[4] MOORE (J. C.). - Notes on Hopf algebras. - Princeton, 1958, multigraphié.

[5] SERRE (Jean-Pierre). - Cohomologie modulo 2 d'Eilenberg-MacLane, Comment. Math. Helvet., t. 27, 1953, p. 198-232.