Adrien Douady

Opérations cohomologiques

Séminaire Henri Cartan, tome 11, n° 1 (1958-1959), exp. n° 9, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_1_A9_0>

OPÉRATIONS COHOMOLOGIQUES

par Adrien DOUADY

CONVENTION, Règle de Koszul : Si A et B sont des algèbres graduées, on définit sur $A \otimes B$ une structure d'algèbre, associative si A et B le sont, en posant :

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = (-1)^{\beta\gamma} \ ac \otimes bd$$

si b est de degré β et c de degré γ.

Si A et B opèrent respectivement sur des modules gradués E et F, on fait opérer $A \otimes B$ sur $E \otimes F$ en posant :

$$(a \otimes b)(e \otimes f) = (-1)^{\beta\varepsilon} \ ae \otimes bf ,$$

où β et ε désignent les dégrés de b et e.

1. Opérations cohomologiques.

A. Définition. - Une opération cohomologique Ω, de type $(n, \Pi ; q, G)$, est un morphisme de foncteurs

$$H^n(\ ; \Pi) \longrightarrow H^q(\ ; G)$$

considérés comme foncteurs à valeurs dans la catégorie des ensembles.

Ω est donc la donnée, pour toute paire X d'ensembles simpliciaux, d'une application ensembliste

$$\Omega_X : H^n(X ; \Pi) \longrightarrow H^q(X ; G) ,$$

de façon que, pour toute application simpliciale

$$f : X' \longrightarrow X ,$$

on ait le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^n(X\,,\Pi) & \xrightarrow{\Omega_X} & H^q(X\,,G) \\ f^*\downarrow & & f^*\downarrow \\ H^n(X'\,,\Pi) & \xrightarrow{\Omega_{X'}} & H^q(X'\,,G)\,. \end{array}$$

Ω est dite additive si c'est un morphisme de foncteurs à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens et homomorphismes ; autrement dit, si

$$\Omega_X(u+v) = \Omega_X(u) + \Omega_X(v) \qquad \text{pour tout } X\,,$$

et pour tous u , v dans $H^n(X\,;\Pi)$.

THÉORÈME. - Pour tout $\omega \in \tilde{H}^q(\Pi, n\,; G)$, il existe une opération cohomologique Ω de type $(n\,,\Pi\,; q\,, G)$ et une seule telle que :

$$\Omega\,(\xi_n) = \omega,$$

ξ_n désignant la classe fondamentale de $\tilde{H}^n(\Pi, n\,;\Pi)$.

DÉMONSTRATION.

a) Unicité : Si $\dot{\gamma} \in \tilde{H}^n(X\,;\Pi)$, on a $\bar{\gamma}$: $X \longrightarrow (K(\Pi, n)\,, e)$, et $\dot{\gamma} = \bar{\gamma}^*(\xi_n)$, d'où $\Omega(\dot{\gamma}) = \bar{\gamma}^*(\omega)$.

b) Existence : Posons $\Omega(\dot{\gamma}) = \bar{\gamma}^*(\omega)$, qui ne dépend pas du représentant γ choisi dans $\dot{\gamma}$, car, si on le change, $\bar{\gamma}$ est remplacée par une application homotope. Il reste à vérifier la fonctorialité : on a $\overline{f^*(\gamma)} = \bar{\gamma}\circ f$, d'où

$$\Omega\,(f^*(\dot{\gamma})) = \overline{f^*(\gamma)}^*(\omega) = (\bar{\gamma}\circ f)^*(\omega) = f^*(\bar{\gamma}^*(\omega)) = f^*(\Omega\,(\dot{\gamma}))$$

COROLLAIRE. - Les opérations cohomologiques de type $(n\,,\Pi\,; q\,, G)$, où $q < n$, sont toutes nulles. Pour $q = n$, elles sont données par les homomorphismes de Π dans G .

B. Suspension. - Rappelons qu'on appelle suspension

$$\sigma:\ H^{q+1}(\Pi, n+1\,; G) \longrightarrow \tilde{H}^q(\Pi, n\,; G)$$

l'homomorphisme composé $\sigma = \overset{-1}{\delta}\, P^*$ de

$$P^*:\ H^{q+1}(K(\Pi, n+1)\,, e\,; G) \longrightarrow H^{q+1}(L(\Pi, n)\,, K(\Pi, n)\,; G)$$

et de l'inverse de δ: $\tilde{H}^q(\Pi, n\,; G) \longrightarrow H^{q+1}(L(\Pi, n)\,, K(\Pi, n)\,; G)$;

δ est un isomorphisme puisque $L(\Pi, n)$ est acyclique. C'est aussi le composé

$$H^{q+1}(\Pi, n+1 ; G) = E_2^{q+1,0} \longrightarrow E_{q+1}^{q+1,0} \xrightarrow{\theta^{-1}} E_{q+1}^{0,q} \longrightarrow E_2^{0,q} = \tilde{H}^q(\Pi, n; G)$$

où θ désigne la transgression dans la suite spectrale du fibré $L(\Pi, n)$, qui est un isomorphisme (suite exacte de l'exposé 3, n° 4).

THÉORÈME. - Soient $\omega \in \tilde{H}^q(\Pi, n ; G)$, $\omega' \in \tilde{H}^{q+1}(\Pi, n+1 ; G)$, Ω et Ω' les opérations cohomologiques associées.

Pour qu'on ait, pour toute paire (X, Y), le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}^n(Y ; \Pi) \arrow[r, "\Omega"] \arrow[d, "\delta"] & \tilde{H}^q(Y ; G) \arrow[d, "\delta"] \\
\tilde{H}^{n+1}(X, Y ; \Pi) \arrow[r, "\Omega'"] & \tilde{H}^{q+1}(X, Y ; G) ,
\end{tikzcd}$$

il faut et il suffit que $\omega = \sigma(\omega')$.

DÉMONSTRATION. -

a. <u>Il suffit</u> : Supposons $\omega = \sigma\, \omega'$, soit $P^*(\omega') = \delta\, \omega$. Soit $\dot{\gamma} \in H^n(Y ; \Pi)$, $\beta \in C^n(X ; \Pi)$ une cochaîne qui induit sur Y le cocycle γ, et $\eta = \delta \beta \in Z^{n+1}(X, Y ; \Pi)$. On a, par définition, $\delta\, \dot{\gamma} = \dot{\eta}$. On a d'autre part le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\bar{\gamma}"] \arrow[d, dash] & K(\Pi, n) \arrow[d, dash] \\
(X, Y) \arrow[r, "\bar{\beta}"] \arrow[dr, "\bar{\eta}"'] & (L(\Pi, n), K(\Pi, n)) \arrow[d, "P"] \\
 & (K(\Pi, n+1), e) ,
\end{tikzcd}$$

d'où :

$$\Omega'(\delta \dot{\gamma}) = \Omega'(\dot{\eta}) = \bar{\eta}^*(\omega') = \bar{\beta}^*(P^*(\omega')) = \bar{\beta}^*(\delta \omega) = \delta(\bar{\gamma}^*(\omega)) = \delta(\Omega(\dot{\gamma})) .$$

b. <u>Il faut</u> : On a $\xi_n = \sigma(\xi_{n+1})$. En effet ξ_{n+1} n'est autre que l'identité de $K(\Pi, n+1)$, et $\overline{P^*(\xi_{n+1})} = \bar{\xi}_{n+1} \circ P = P$. Si ξ_n est le cocycle fondamental sur $K(\Pi, n)$, et ξ la cochaîne fondamentale sur $L(\Pi, n)$, qui induit ξ_n sur $K(\Pi, n)$, $\bar{\xi}$ est l'identité de $L(\Pi, n)$, et $\overline{\delta \xi} = P$, d'où $P^*(\xi_{n+1}) = \delta \xi_n$.

On a alors :

$$\omega = \Omega(\xi_n) = \Omega(\delta^{-1}(P^*(\xi_{n+1}))) = \delta^{-1}(\Omega'(P^*(\xi_{n+1}))) = \delta^{-1}(P^*(\Omega'(\xi_{n+1}))) = \sigma\,\omega'$$

DÉFINITION. - Si Ω' est une opération cohomologique de type $(n+1, \Pi; q+1, G)$, on appelle <u>suspension</u> de Ω' l'opération cohomologique $\Omega = {}^{\sigma}\Omega'$ de type $(n, \Pi; q, G)$, telle que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^n(X\, ; \Pi) & \xrightarrow{\Omega} & H^q(X\, , G) \\ \delta \downarrow \approx & & \delta \downarrow \approx \\ H^{n+1}(E\, , X \cup e\, ; \Pi) & \xrightarrow{\Omega'} & H^{q+1}(E\, , X \cup e\, ; G) \end{array} ,$$

E désignant le cône de base X et de sommet e , c'est-à-dire $X \times \underset{\sim}{\Delta}_1 / i_0(X)$.

Il ressort du théorème précédent que, si Ω est associée à ω , ${}^{\sigma}\Omega$ est associée à $\sigma(\omega)$.

C. THÉORÈME. - Toute opération cohomologique Ω de la forme ${}^{\sigma}\Omega'$ est additive.

Ce théorème sera une conséquence du

LEMME (Frank PETERSON et E. THOMAS) : Pour toute opération cohomologique Ω, de type $(n, \Pi; q, G)$, on a

$$\Omega(u + \delta v) = \Omega(u) + \Omega(\delta v)$$

si $u \in H^n(X\, , Y\, ; \Pi)$ et $v \in H^{n-1}(Y\, ; \Pi)$.

DÉMONSTRATION <u>du lemme</u> (voir aussi l'appendice pour une démonstration dans un cadre plus général). - Soient γ et θ deux cocycles sur (X, Y) , θ étant cohomologue à 0 sur X , mais pas nécessairement mod Y . Définissons les cocycles Γ et Θ sur $X \times \underset{\sim}{\Delta}_1$ par $\Gamma = P^*(\gamma)$, où P est la projection de $X \times \underset{\sim}{\Delta}_1$ sur X , et $i_1^*(\Theta) = \theta$, $i_0^*(\Theta) = 0$ (Exposé 8, Théorème 2 D, démonstration b).

Soit $\psi \in Z^q(\Pi, n ; G)$ tel que $\omega = \dot{\psi}$ définisse Ω.

Considérons le cocycle sur $X \times \underset{\sim}{\Delta}_1$:

$$\overline{\Gamma + \Theta}^*(\psi) - \bar{\Gamma}^*(\psi) - \bar{\Theta}^*(\psi) .$$

Il est nul sur $Y \times \underset{\sim}{\Delta}_1$, où Γ est nul.

Il est nul sur $i_0(X)$, où Θ est nul.

Sur $i_1(X)$, il induit un cocycle de la classe

$$\Omega(\gamma + \theta) - \Omega(\gamma) - \Omega(\theta) \in H^q(X , Y ; G)$$

Ce dernier cocycle est cohomologue à 0 sur X mod Y. D'où le lemme en posant $u = \dot{\gamma}$, $\delta v = \dot{\theta}$.

DÉMONSTRATION <u>du théorème</u> : Soient $\Omega = {}^{\sigma}\Omega'$, $u , v \in H^n(X , \Pi)$, E le cône de base X, $\delta : H^*(X) \xrightarrow{\approx} H^*(E , X \cup e)$. On a

$$\delta\Omega(u+v) = \Omega'\delta(u+v) = \Omega'(\delta u + \delta v) = \Omega'\delta u + \Omega'\delta v = \delta\Omega u + \delta\Omega v = \delta(\Omega u + \Omega v) ,$$

d'où $\Omega(u + v) = \Omega u + \Omega v$ puisque δ est biunivoque.

D. <u>Applications diagonales</u>.

LEMME : Si Π est un groupe abélien de type fini et G un corps, $H^q(\Pi, n ; G)$ est un espace vectoriel de dimension finie sur G pour tous $n , q > 0$.

DÉMONSTRATION par récurrence sur n :

a. pour $n = 1$: C'est vrai si $\Pi = Z$, car $K(Z , 1)$ a même type d'homotopie qu'un cercle. C'est vrai si $\Pi = Z_n$, en vertu de la coproposition 3. C. de l'exposé 3, car $K(Z_n , 1)$ est base d'un fibré dont l'espace et la fibre sont $K(Z , 1)$ (Exposé 8, paragraphe 3, A). Si Π est un groupe abélien de type fini quelconque, Π est produit de groupes Π_i cycliques, et $K(\Pi, 1)$ est produit des $K(\Pi_i , 1)$ correspondants.

b. Si le lemme est démontré pour n, on le démontre pour $(n + 1)$ en appliquant la coproposition 3. C. de l'exposé 3 au fibré $L(\Pi, n)$ de fibre $K(\Pi, n)$, sur

$K(\pi, n+1)$ simplement connexe.

Il résulte du lemme que :

$$C : \bigoplus_{q'+q''=q} \tilde{H}^{q'}(\pi, n' ; G) \otimes \tilde{H}^{q''}(\pi, n'' ; G) \longrightarrow \tilde{H}^{q}((K(\pi, n'), e) \times (K(\pi, n''), e) ; G)$$

est un isomorphisme.

Notons $0_n^q = \tilde{H}^q(\pi, n ; G)$ l'espace vectoriel sur G des opérations cohomologiques de type $(n, \pi ; q, G)$, auquel nous accorderons le degré $i = q - n$. Supposons π muni d'une structure d'anneau. Alors pour toute $\Omega \in 0_n^q$, et tout couple n', n'' tel que $(n' + n'') = n$, il existe un élément unique

$$D_{n',n''} \Omega \in \bigoplus_{q'+q''=q} 0_{n'}^{q'} \otimes 0_{n''}^{q''} \quad \text{tel que,}$$

si $D_{n',n''} \Omega = \sum \Omega'_j \otimes \Omega''_j$, on ait :

$$\Omega\, C(\xi_{n'} \otimes \xi_{n''}) = C(\sum (-1)^{n'i''_j} \Omega'_j\, \xi_{n'} \otimes \Omega''_j\, \xi_{n''}) .$$

Les applications $D_{n',n''} : 0_n^q \longrightarrow \bigoplus 0_{n'}^{q'} \otimes 0_{n''}^{q'}$ sont G-linéaires et seront appelées diagonales. On a :

$$\Omega\; C(u \otimes v) = C\; (\sum (-1)^{n'i''_j}\; \Omega'_j\;\; u \otimes \Omega''_j\;\; v)$$

pour tous $u \in H^{n'}(X ; \pi)$, $v \in H^{n''}(Y ; \pi)$, X et Y étant des paires quelconques d'ensembles simpliciaux.

E. Compatibilité des applications diagonales avec la suspension.

THÉORÈME : Soit π un anneau de type fini en tant que groupe abélien, G un corps, Ω une opération cohomologique de type $(n, \pi ; q, G)$. Alors, si $D_{n',n''} \Omega = \sum \Omega'_j \otimes \Omega''_j$, on a :

$$\begin{cases} \text{a)} \quad D_{n'-1,n''}\, \sigma\Omega = \sum (-1)^{i''_j}\, \sigma\Omega'_j \otimes \Omega''_j \\ \text{b)} \quad D_{n',n''-1}\, \sigma\Omega = \sum (-1)^{i'_j}\, \Omega'_j \otimes \sigma\Omega''_j \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. - Soient X et Y deux ensembles simpliciaux.

a. Soit E le cône de base X.

Plongeons X dans $(E\ ,\ X \cup e)$ et $X \times Y$ dans $(E\ ,\ X \cup e) \times Y$.
Pour tous $u \in H^{n'-1}(X)$, $v \in H^{n''}(Y)$, on a :

$$\delta\ {}^{\sigma}\Omega\ C(u \otimes v) = \Omega\ \delta\ C(u \otimes v) = \Omega\ C(\delta\ u \otimes v) = C(\sum (-1)^{n'i''} \Omega'\ \delta\ u \otimes \Omega''\ v) =$$

$$= C(\sum (-1)^{n'i''} \delta\ {}^{\sigma}\Omega'\ u \otimes \Omega''\ v) = \delta\ C(\sum (-1)^{n'i''}\ {}^{\sigma}\Omega'\ u \otimes \Omega''\ v)\ ,\ \text{donc}$$

$${}^{\sigma}\Omega\ C(u \otimes v) = C(\sum (-1)^{n'i''_j}\ {}^{\sigma}\Omega'_j\ u \otimes \Omega''_j\ v)$$

puisque δ est biunivoque, d'où (a) en remarquant que u est de degré $n' - 1$.

b. Soit E le cône de base Y. Plongeons Y dans $(E\ ,\ Y \cup e)$ et $X \times Y$ dans $X \times (E\ ,\ Y \cup e)$. Pour tous $u \in H^{n'}(X)$, $v \in H^{n''-1}(Y)$, on a :

$$\delta\ {}^{\sigma}\Omega\ C(u \otimes v) = \Omega\ \delta\ C(u \otimes v) = \Omega\ C(u \otimes \delta\ (-1)^{n'}\ v) =$$

$$= C\ (\sum (-1)^{n'i''} \Omega'\ u \otimes \delta\ {}^{\sigma}\Omega''\ (-1)^{n'}\ v) = C(\sum (-1)^{n'i''+n'}\ \Omega'\ u \otimes \delta\ {}^{\sigma}\Omega''\ v)$$

car ${}^{\sigma}\Omega''$ est nécessairement additive (Théorème 1. C.).

Donc

$${}^{\sigma}\Omega\ C(u \otimes v) = C(\sum (-1)^{n'i''+i'}\ \Omega'\ u \otimes\ {}^{\sigma}\Omega''\ v)\ ,$$

d'où (b) en remarquant que ${}^{\sigma}\Omega''$ est de degré i'' comme Ω'' .

COROLLAIRE. - En posant, pour toute opération cohomologique Ω

$$\tilde{\sigma}(\Omega) = (-1)^{i}\ {}^{\sigma}\Omega\ ,$$

où $i = q - n$ est le degré de Ω , le théorème s'énonce, sous les mêmes hypothèses :

$$\begin{cases} D_{n'-1,n''}\ \tilde{\sigma}(\Omega) = \sum \tilde{\sigma}\ (\Omega'_j) \otimes \Omega''_j \\ D_{n',n''-1}\ \tilde{\sigma}(\Omega) = \sum \Omega'_j \otimes \tilde{\sigma}(\Omega''_j) \end{cases}\ .$$

2. Opérations cohomologiques stables.

A. Définition. - On appelle opération cohomologique stable de type (i, π, G) une suite $P = (P_n)$ d'opérations cohomologiques, P_n étant de type

$$(n, \pi ; n+i, G),$$

telles qu'on ait, pour toute paire (X, Y) d'ensembles simpliciaux et pour tout n, le diagramme anticommutatif si i est impair, commutatif si i est pair :

$$\begin{array}{ccc} H^n(Y;\pi) & \xrightarrow{P_n} & H^{n+i}(Y;G) \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\ H^{n+1}(X, Y;\pi) & \xrightarrow{P_{n+1}} & H^{n+i+1}(X, Y;G) \end{array}$$

Il revient au même de dire que $P_n = \tilde{\sigma}\, P_{n+1} = (-1)^i \sigma\, P_{n+1}$ pour tout n.

Les P_n sont donc nécessairement additives (Théorème 1. C.) . La somme directe des espaces S^i des opérations cohomologiques stables de type (i, π, π) pourra être considéré comme une algèbre pour la composition, qui opère sur $H^*(X;\pi)$ pour tout ensemble simplicial X.

EXEMPLE : l'opération de Bockstein. - Soit $0 \to G \to A \to \pi \to 0$ une suite exacte de groupes abéliens. On a, pour tout n et pour tout ensemble simplicial X, un opérateur cobord $\beta : H^n(X, \pi) \to H^{n+1}(X;G)$, naturel en X. Si $Y \subset X$, on a le diagramme commutatif exact :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \to & C^n(Y;G) & \to & C^n(Y;A) & \to & C^n(Y;\pi) & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \to & C^n(X;G) & \to & C^n(X;A) & \to & C^n(X;\pi) & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \to & C^n(X,Y;G) & \to & C^n(X,Y;A) & \to & C^n(X,Y;\pi) & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

qui donne lieu, ainsi qu'il est bien connu, au diagramme anticommutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^n(Y;\pi) & \xrightarrow{\beta} & H^{n+1}(Y;G) \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\ H^{n+1}(X,Y;\pi) & \xrightarrow{\beta} & H^{n+2}(X, Y;G) . \end{array}$$

β est donc une opération cohomologique stable de type $(1, \Pi ; G)$. Pour tout nombre premier p, l'opération β de la suite exacte

$$0 \longrightarrow Z_p \longrightarrow Z_{p^2} \longrightarrow Z_p \longrightarrow 0$$

est appelée opération de Bockstein modulo p.

B. Proposition. -

a. Si Ω est une opération cohomologique de type $(n, \Pi ; n+i, G)$, où $i < n$, il existe une opération cohomologique stable $P = (P_k)$ de type (i, Π, G) et une seule telle que $P_n = \Omega$.

b. Soit Ω une opération cohomologique de type $(i, \Pi ; 2i ; G)$. Pour qu'il existe une opération cohomologique stable $P = (P_k)$ de type (i, Π, G) telle que $P_i = \Omega$, il faut et il suffit que l'élément $\omega \in H^{2i}(\Pi, i ; G)$ qui définit Ω soit transgressif dans la suite spectrale de cohomologie du fibré $L(\Pi, i)$; ou, ce qui est équivalent, que $d_{i+1}(\omega) = 0$. L'opération cohomologique stable P est alors unique.

DÉMONSTRATION. - On pose $P_n = \Omega$; P_k est définie par récurrence descendante pour $k < i$ par $P_k = \tilde{\sigma} P_{k+1}$.

a. P_k est défini par récurrence ascendante pour $k > i$ par $P_k = \tilde{\sigma}^{-1} P_{k-1}$. En effet la transgression

$$\theta : H^{k+i-1}(\Pi, k-1 ; G) \longrightarrow H^{k+i}(\Pi, k ; G)$$

est un isomorphisme (Exposé 3, coproposition 5, A), et la suspension σ est l'isomorphisme inverse. $\tilde{\sigma} : O_k^{k+i} \longrightarrow O_{k-1}^{k+i-1}$ est donc un isomorphisme.

b. La suspension $\sigma : H^{2i+1}(\Pi, i+1 ; G) \longrightarrow H^{2i}(\Pi, i ; G)$ est injective et son image se compose des éléments transgressifs, comme il ressort du diagramme (avec les notations de l'Exposé 3) :

$$\begin{tikzcd}
\underset{\displaystyle 0}{\underset{\shortparallel}{H^{2i}(X)}} \arrow[r] & E_{2i+1}^{0,2i} \arrow[r, "\theta", "\approx"'] \arrow[d, "inj"] & E_{2i+1}^{2i+1,0} \arrow[r] & \underset{\displaystyle 0}{\underset{\shortparallel}{H^{2i+1}(X)}} \\
& H^{2i}(F) & H^{2i+1}(B) \arrow[l, hook', "\sigma"'] \arrow[u, "\approx"'] &
\end{tikzcd}$$

C. L'application diagonale : Soit π un anneau de type fini en tant que groupe abélien, G un corps. L'espace vectoriel $S^i(\pi, G)$ des opérations cohomologiques stables de type (i, π, G) n'est autre que la limite projective des $O_n^{n+i}(\pi, G)$ et des $\tilde{\sigma}$, limite d'ailleurs atteinte en un temps fini puisque les $\tilde{\sigma}$ sont des isomorphismes pour $n > i$. On a donc

$$S^{i'} \otimes S^{i''} = \lim_{\substack{n' \to \infty \\ n'' \to \infty}} \text{proj } (O_{n'}^{n'+i'} \otimes O_{n''}^{n''+i''}) .$$

Les applications diagonales $D_{n',n''}$, qui vérifient les relations de commutation avec $\tilde{\sigma}$ du Corollaire de 1.E définissent par passage aux limites projectives une application :

$$\Delta : S^i \longrightarrow \bigoplus_{i'+i''=i} S^{i'} \otimes S^{i''} ,$$

appelée application diagonale, qui munit $S^* = \bigoplus S^i$ d'une structure de co-algèbre. Cette structure est anticommutative et associative comme l'opération C d'où elle provient.

PROPOSITION. - Avec la règle de Koszul, on a, pour toute opération cohomologique stable P de degré i :

a. $C \circ \Delta P = P \circ C$

b. $(\delta \otimes 1) \circ \Delta P = (-1)^i \Delta P \circ (\delta \otimes 1)$

c. $(1 \otimes \delta) \circ \Delta P = (-1)^i \Delta P \circ (1 \otimes \delta)$

DÉMONSTRATION. - Soient X et Y des ensembles simpliciaux quelconques, P une opération cohomologique stable. Soit $\Delta P = \sum P' \otimes P''$.

a. on a $D_{n',n''} P_n = \sum P'_{n'} \otimes P''_{n''}$ si $n = n'+n''$. Si $u \in H^{n'}(X)$, $v \in H^{n''}(Y)$, on a :

$$PC(u \otimes v) = P_n C(u \otimes v) = C(\sum (-1) P'_{n'} u \otimes P''_{n''} v) = C(\sum P'_{n'} \otimes P''_{n''})(u \otimes v) = C(\Delta P)(u \otimes v)$$

b. Si $X' \subset X$, et si $\delta : H^*(X') \longrightarrow H^*(X, X')$ est l'opérateur cobord, on a :

$$(\delta \otimes 1) \circ (P' \otimes P'') = \delta \circ P' \otimes P'' = (-1)^{i'} P' \circ \delta \otimes P'' = (-1)^{i'+i''} (P' \otimes P'')(\delta \otimes 1) .$$

e. De même, en considérant $Y' \subset Y$.

3. Les opérations de Steenrod modulo 2.

A. Appliquons la proposition 2 - B - (b) au cas $\Pi = G = Z_2$ (ce qui nous délivre de toute préoccupation de signe).

L'élément $\xi_i^{\,2}$ de $H^{2i}(Z_2\,,\,i\,;\,Z_2)$ est transgressif car

$$d_{i+1}(\xi_i^2) = d_{i+1}(\xi_i)\cdot\xi_i + \xi_i\cdot d_{i+1}(\xi_i) = 0\,.$$

L'opération cohomologique qu'il définit est le cup-carré des éléments de degré i.

PROPOSITION et DÉFINITION. - Il existe une opération cohomologique stable de type $(i\,,\,Z_2\,,\,Z_2)$ et une seule qui donne le cup-carré en dimension i. On l'appelle l'opération Sq^i de Steenrod.

PROPRIÉTÉS.

a. Sq^o est l'identité

b. $Sq^1 = \beta$ est l'opération de Bockstein modulo 2

c. $Sq^i : H^n(\;;Z_2) \longrightarrow H^{n+i}(\;;Z_2)$ est nulle pour $n < i$

d. Sq^i est la seule opération cohomologique stable de type $(i\,,\,Z_2\,,\,Z_2)$, non identiquement nulle, qui s'annule sur la classe fondamentale ξ_{n-1}.

DÉMONSTRATION. -

a. Les opérations cohomologiques de degré 0 sont données par les homomorphismes $Z_2 \longrightarrow Z_2$: il y a donc deux opérations cohomologiques stables, l'identité et 0. Sq^o coïncide avec l'identité en dimension 0, c'est donc l'identité.

b. L'espace vectoriel S^1 des opérations cohomologiques stables de type $(1\,,\,Z_2\,,\,Z_2)$ est isomorphe à l'ensemble des éléments transgressifs de $H^2(Z_2\,,\,1\,;\,Z_2)$. Or $H^*(Z_2\,,\,1\,;\,Z_2) = Z_2[\xi_1]$, et $H^2(Z_2\,,\,1\,;\,Z_2)$ a deux éléments : $\xi_1^{\,2}$ et 0, tous deux transgressifs. Il suffit donc de montrer que β n'est pas nulle sur ξ_1. Mais l'identité $I : Z_2 \longrightarrow Z_2$ ne se factorise pas par Z_4, et ξ_1 n'est pas dans l'image de $H^1(Z_2\,,\,1\,;\,Z_4) \longrightarrow H^1(Z_2\,,\,1\,;\,Z_2)$, donc pas dans le noyau de β.

c. Il suffit de montrer que $\sigma(\xi_i^2) = 0$ dans la suite spectrale du fibré $L(Z_2, i-1)$. Mais $\xi_i = d_i \xi_{i-1}$, d'où

$$d_i(\xi_i \xi_{i-1}) = d_i \xi_i \cdot \xi_{i-1} + \xi_i^2 = \xi_i^2 .$$

L'image de ξ_i^2 dans $E_{2i}^{2i,0}$ est donc nulle, et a fortiori $\sigma(\xi_i^2) = 0$.

d. Le noyau de $\sigma : H^{2i}(Z_2, i ; Z_2) \longrightarrow H^{2i-1}(Z_2, i-1 ; Z_2)$ est le même que celui de $H^{2i}(Z_2, i ; Z_2) \longrightarrow E_{2i}^{2i,0}$: c'est l'image de $d_i^{i,i-1}$.

Or $\quad E_i^{i,i-1} = E_2^{i,i-1} = H^i(Z_2, i ; Z_2) \otimes H^{i-1}(Z_2, i-1 ; Z_2)$

$= \mathrm{Hom}(Z_2, Z_2) \otimes_{Z_2} \mathrm{Hom}(Z_2, Z_2) = Z_2 = \{0, \xi_i \xi_{i-1}\}$. D'où $\mathrm{Ker}\, \sigma = \{0, \xi_i^2\}$.

B. <u>Formule du produit.</u>

THÉORÈME. - On a $\Delta Sq^i = \sum_{j+k=i} Sq^j \otimes Sq^k$,

c'est-à-dire

$$Sq^i\, C(u \otimes v) = C \sum_{j+k=i} Sq^j u \otimes Sq^k v$$

chaque fois que $u \in H^p(X ; Z_2)$, $v \in H^q(Y ; Z_2)$, X et Y étant des ensembles simpliciaux quelconques, p et q des entiers quelconques.

DÉMONSTRATION. -

a. Si $p+q < i$, tout est nul (Propriété A. c)

b. Si $p+q = i$, la formule se réduit à

$$(C(u \otimes v))^2 = C(u^2 \otimes v^2)$$

(Exposé 8, fin du paragraphe 1).

c. Si $p+q > i$, il suffit de le démontrer pour $u = \xi_p$, $v = \xi_q$, car $u = \bar{\alpha}^* \xi_p$, $v = \bar{\beta}^* \xi_q$, $C(u \otimes v) = (\bar{\alpha}, \bar{\beta})^* C(\xi_p \otimes \xi_q)$ si $u = \dot{\alpha}$, $v = \dot{\beta}$.

La démonstration se fait par récurrence sur $p+q$.

La proposition 2 - C(b) et la fonctorialité des opérations cohomologiques stables montrent que ΔSq^i commute à $\delta \otimes 1$ et à $P^* \otimes 1$, donc à $\sigma \otimes 1$,

$\sigma = \overset{-1}{\delta} \circ P^*$ désignant la suspension dans le fibré $L(Z_2 , p-1)$. On a donc :

$$(\sigma \otimes 1)(\Delta Sq^i)(\xi_p \otimes \xi_q) = (\Delta Sq^i)(\sigma \otimes 1)(\xi_p \otimes \xi_q) = (\Delta Sq^i)(\xi_{p-1} \otimes \xi_q) =$$

$$= \sum_{j+k=i} Sq^j \xi_{p-1} \otimes Sq^k \xi_q = (\sigma \otimes 1) \sum_{j+k=i} Sq^j \xi_p \otimes Sq^k \xi_q .$$

De même

$$(1 \otimes \sigma)(\Delta Sq^i)(\xi_p \otimes \xi_q) = (1 \otimes \sigma) \sum_{j+k=i} Sq^j \xi_p \otimes Sq^k \xi_q .$$

Les éléments $(\Delta Sq^i)(\xi_p \otimes \xi_q)$ et $\sum_{j+k=i} Sq^j \xi_p \otimes Sq^k \xi_q$ de

$$\bigoplus_{j+k=i} H^{p+j}(Z_2 , p ; Z_2) \otimes H^{q+k}(Z_2 , q ; Z_2)$$ ont même image par $\sigma \otimes 1$.

Ils ont aussi même image par $1 \otimes \sigma$. Or $\sigma \otimes 1$ (resp $1 \otimes \sigma$) est injectif sur les facteurs de la somme directe correspondant à $j < p$ (resp $k < q$) . Mais, pour tout couple (j , k) tel que $j + k = i < p+q$, on a $j < p$ ou $k < q$, et les deux éléments en question sont égaux.

C. THÉORÈME. - $Sq^1 \circ Sq^i = \begin{cases} Sq^{i+1} & \text{si } i \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$

DÉMONSTRATION. - $Sq^1 . Sq^i$ est une opération cohomologique nulle en dimension i : en effet pour $u \in H^i(X ; Z_2)$ on a $Sq^1(u^2) = (Sq^1 u) . u + u .(Sq^1 u) = 0$ d'après la formule du produit.

Il en résulte que $Sq^1 \circ Sq^i$ est proportionnel à Sq^{i+1} (Propriété 3-A . d) . Tout revient à savoir si le coefficient de proportionnalité est 1 ou 0 . Pour cela il suffit de regarder un exemple, en calculant $Sq^1 \circ Sq^i (u)$ pour un u de degré $i + 1$ tel que $u^2 \neq 0$. Prenons $X = K(Z_2 , 1)$, et soit $u = \xi_1^{\,i+1}$, ξ_1 étant la classe fondamentale de $H^*(Z_2 , 1 ; Z_2) = Z_2 [\xi_1]$. D'après la formule du produit , on a (puisque $Sq^k \xi_1 = 0$ pour $k > 1$, et $Sq^1 \xi_1 = \xi_1^{\,2}$) :

$$Sq^i(\xi_1^{\,i+1}) = (1 + i)\ \xi_1^{\,2i+1}$$

Or $Sq^1 \xi_1^{2i+1} = (2i+1) \xi_1^{2i+2} = \xi_1^{2i+2}$.

Donc $Sq^1 \circ Sq^i(u) = (1+i) \xi_1^{2i+2} = (1+i) u^2$.

En particulier $Sq^1 \circ Sq^1 = 0$, ce qu'on savait déjà puisque $Sq^1 = \beta$.

APPENDICE

Opérations cohomologiques à plusieurs variables.

Soit (X , A) un couple d'espaces simpliciaux, soit G un groupe abélien, et soit n un entier. On sait que la donnée d'un élément de $H^n(X , A ; G)$ équivaut à la donnée d'une classe d'applications homotopes $(X , A) \longrightarrow (K(G , n) , e)$, où e désigne l'unique sommet de $K(G , n)$. On vérifie de la même façon que la donnée d'un élément de $H^n(A ; G)$ équivaut à la donnée d'une classe d'applications homotopes $(X , A) \longrightarrow (L(G , n+1) , K(G , n))$. En formant un produit, on voit donc que $H^n(X , A ; G) \times H^{n'}(A ; G)$ est en correspondance bijective canonique avec les classes d'applications homotopes de (X , A) dans le couple produit $(Y , Z) = (K(G , n) \times L(G' , n' + 1) , e \times L(G' , n'))$.

Considérons alors les opérations cohomologiques à deux variables $T(x , y)$, avec :

$$x \in H^n(X , A ; G) , \quad y \in H^{n'}(A , G') , \quad T(x , y) \in H^q(X , A ; G'') .$$

Par le raisonnement usuel, ces opérations correspondent aux éléments $t \in H^q(Y,Z;G'')$ où (Y , Z) est le couple écrit ci-dessus.

Mais les groupes de cohomologie de (Y , Z) se laissent immédiatement déterminer ; on a :

$$H^q(Y , Z) = H^q(G , n) \times H^{q-1}(G' , n') .$$

En explicitant, on voit alors que T est défini par la donnée de deux opérations cohomologiques $T_a \in H^q(G , n ; G'')$ et $T_r \in H^{q-1}(G' , n' ; G'')$, et que l'on a l'identité :

$$(*) \qquad T(x , y) = T_a(x) + \delta T_r(y) = T(x , 0) + T(0 , y) .$$

<u>Cas particulier</u> : Soit $f(x)$ une operation cohomologique $\in H^q(G , n ; G'')$, et

définissons T par la formule :

$$T(x , y) = f(x + \delta y) .$$

Si l'on fait $y = 0$ dans la formule $(*)$, on voit que $T_a = f$, et si l'on fait $x = 0$, on voit que T_r est la suspension f' de f. On obtient donc le théorème d'additivité :

$$(**) \qquad f(x + \delta y) = f(x) + \delta f'(y) = f(x) + f(\delta y) .$$

Généralisations. On pourrait prendre plusieurs variables $x_i \in H^*(X , A)$, plusieurs variables $y_j \in H(A)$, et même a priori des variables $t_k \in H^*(X)$. On trouverait chaque fois un couple (Y , Z) universel comme ci-dessus. S'il n'y a aucun t_k , la cohomologie relative de ce couple se décompose en somme directe de cohomologies de produits d'espaces d'Eilenberg-Maclane et l'opération

$$T(x_1 , \dots , x_i , y_1 , \dots , y_j)$$

s'écrit sous la forme :

$$T(x_1 , \dots , x_i , y_1 , \dots , y_j) = T_a(x_1 , \dots , x_i) + \delta T_r(y_1 , \dots ; y_j) .$$