

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

ADRIEN DOUADY

Les complexes d'Eilenberg-MacLane

Séminaire Henri Cartan, tome 11, n° 1 (1958-1959), exp. n° 8, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_1_A8_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

26 janvier 1959

-:-:-:-

LES COMPLEXES D'EILLENBERG-MACLANE

par Adrien DOUADY

1. Rappel.

Les notations sont celles de l'exposé 7, n° 1 .

Si $X = (X_n)$ est un ensemble simplicial, on notera $S_n(X)$ l'ensemble X_n , pour se permettre de mettre des indices à X , et on appellera ses éléments n -simplexes de X .

On dit qu'un ensemble simplicial Y est un sous-ensemble simplicial de X , et on écrit $Y \subset X$, si $S_n(Y) \subset S_n(X)$, les ∂_i et les s_i étant induits par ceux de X . On définit alors l'ensemble simplicial quotient X/Y : on obtient $S_n(X/Y)$ à partir de $S_n(X)$ en identifiant entre eux les éléments de $S_n(Y)$.

Si X et Y sont deux ensembles simpliciaux, on définit l'ensemble simplicial produit $X \times Y$ par

$$S_n(X \times Y) = S_n(X) \times S_n(Y)$$

$$\partial_i(x, y) = (\partial_i(x), \partial_i(y))$$

$$s_i(x, y) = (s_i(x), s_i(y)) .$$

Le n -modèle $\underline{\Delta}_n$ est l'ensemble simplicial défini par :

$$S_q(\underline{\Delta}_n) = \text{Hom}(\Delta_q, \Delta_n)$$

avec, si $a \in S_q(\underline{\Delta}_n)$

$$\partial_i(a) = a \cdot \delta_i$$

$$s_i(a) = a \cdot \sigma_i$$

L'identité $x \in \text{Hom}(\Delta_n, \Delta_n)$ est appelée n -simplexe fondamental de $\underline{\Delta}_n$.

Pour tout n -simplexe a d'un ensemble simplicial X , il existe une application simpliciale \tilde{a} et une seule de $\underline{\Delta}_n$ dans X telle que $\tilde{a}(x) = a$.

En posant $\tilde{\delta}_i = \widetilde{\partial}_i(x)$ et $\tilde{\sigma}_i = \widetilde{s}_i(x)$, on a

$$\widetilde{\partial}_i(a) = \tilde{a} \circ \tilde{\delta}_i, \quad \widetilde{s}_i(a) = \tilde{a} \circ \tilde{\sigma}_i,$$

$$\widetilde{f}(a) = f \circ \tilde{a}$$

pour toute application simpliciale f .

Deux applications simpliciales f_0 et f_1 de X dans X' sont dites homotopes s'il existe une application simpliciale h du produit $(X \times \underline{\Delta}_1)$ dans X' telle que $h \circ i_0 = f_0$, $h \circ i_1 = f_1$, i_0 et i_1 désignant les deux injections $(I, \tilde{\delta}_1)$ et $(I, \tilde{\delta}_0)$ de $X = X \times \underline{\Delta}_0$ dans $X \times \underline{\Delta}_1$.

Soit (X, Y) , où $Y \subset X$, une paire d'ensembles simpliciaux, et soit π un groupe abélien. Le groupe de cochaînes $C^n(X, Y; \pi)$ est le groupe abélien des fonctions $S_n(X) \rightarrow \pi$, nulles sur $S_n(Y)$. On pose

$$C^*(X, Y; \pi) = \bigoplus_n C^n(X, Y; \pi).$$

On note $C^n(X; \pi)$, $C^*(X; \pi)$ si Y est vide.

Le groupe des cochaînes normalisées $C_N^*(X, Y; \pi)$ est formé des cochaînes nulles sur les simplexes de la forme $s_i(a)$, dits simplexes dégénérés. Pour $\gamma \in C^n(X, Y; \pi)$, on définit $\delta^i(\gamma) = \gamma \circ \partial_i$, et

$$\delta\gamma = \sum_i (-1)^i \delta^i(\gamma) \in C^{n+1}(X, Y; \pi).$$

Pour $\pi \in \pi$, on définit $\gamma \pi \in C^0(X; \pi)$ par $\gamma \pi(a) = \pi$ pour tout $a \in S_0(X)$. On a $\delta \circ \delta = 0$, $\delta \circ \gamma = 0$.

On appelle cohomologie le quotient :

$$H^* = \bigoplus H^n = \text{Ker } \delta / \text{In } \delta$$

(on obtient le même résultat en partant de C_N^* et de C^*).

On appelle cohomologie réduite :

$$\tilde{H}^* = \bigoplus \tilde{H}^n = \text{Ker } \delta / \text{In } \delta + \text{In } \gamma$$

On a $H^n(X, Y; \pi) = \tilde{H}^n(X/Y; \pi)$ si $n > 0$ ou si Y est non vide.

A toute application simpliciale de X dans X' qui envoie Y dans Y' , $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$, on fait correspondre

$f^* : C^n(X', Y'; \Pi) \rightarrow C^n(X, Y; \Pi)$ par $f^*(\gamma) = \gamma \circ f$.

f^* commute avec δ , et fait de C^n , C_N^n , C^* , C_N^* , H^n , H^* , \tilde{H}^0 , \tilde{H}^* , des foncteurs contravariants.

La suite exacte :

$$0 \rightarrow C^*(X, Y; \Pi) \rightarrow C^*(X; \Pi) \rightarrow C^*(Y; \Pi) \rightarrow 0$$

donne naissance à la suite exacte fonctorielle bien connue

$$0 \rightarrow H^0(X, Y; \Pi) \rightarrow H^0(X; \Pi) \rightarrow H^0(Y; \Pi) \rightarrow H^1(X, Y; \Pi) \rightarrow \dots$$

Si Π est un anneau, on définit pour tout couple de paires d'ensembles simpliciaux une application

$$C : H^p(X, Y; \Pi) \otimes H^q(X', Y'; \Pi) \rightarrow H^{p+q}((X, Y) \times (X', Y'); \Pi),$$

où $(X, Y) \times (X', Y')$ désigne la paire $(X \times X', X \times Y' \cup Y \times X')$, qui jouit des propriétés suivantes :

1° Fonctorialité : Soit $f : X \rightarrow X_1$, $g : X' \rightarrow X'_1$,

$$(f, g) : X \times X' \rightarrow X_1 \times X'_1.$$

Soient $u \in H^*(X_1)$, $v \in H^*(X'_1)$. Alors

$$\begin{aligned} (f, g)^* C(u \otimes v) &= C(f^*(u) \otimes g^*(v)) \\ &= C(f^* \otimes g^*)(u \otimes v). \end{aligned}$$

2° Associativité : Si X, Y, Z sont trois ensembles ou paires d'ensembles simpliciaux, $u \in H^*(X)$, $v \in H^*(Y)$, $w \in H^*(Z)$, les éléments $C(u \otimes C(v \otimes w))$ et $C(C(u \otimes v) \otimes w)$ de $H^*(X \times Y \times Z)$ sont égaux.

3° Symétrie : Soit σ l'application de $X \times Y$ dans $Y \times X$ définie par $\sigma(a, b) = (b, a)$.

Si $u \in H^p(X)$, $v \in H^q(Y)$, on a :

$$\sigma^* C(v \otimes u) = (-1)^{pq} C(u \otimes v).$$

4° Compatibilité avec δ : Si $X' \subset X$, $X' \times Y \subset X \times Y$,

$$u' \in H^p(X'; \Pi), \quad v \in H^q(Y; \Pi),$$

on a :

$$\delta C(u' \otimes v) = C(\delta u' \otimes v).$$

Si $Y' \subset Y$, $X \times Y' \subset X \times Y$,

$$u \in H^p(X; \pi), \quad v' \in H^q(Y; \pi),$$

on a

$$\delta C(u \otimes v') = (-1)^p C(u \otimes \delta v').$$

5° Si π est un corps, C est injective. Si de plus les espaces vectoriels $H^p(X; \pi)$ et $H^q(Y; \pi)$ sont de dimension finie sur π pour tous p, q , C est un isomorphisme

$$\oplus_{p+q=n} H^p(X; \pi) \otimes H^q(Y; \pi) \longrightarrow H^n(X \times Y; \pi).$$

Dans tous les cas, le cup-produit $H^p(X; \pi) \otimes H^q(X; \pi) \rightarrow H^{p+q}(X, \pi)$ est le composé $\Delta^* \circ C$, où Δ est l'application diagonale $X \rightarrow X \times X$ définie par $\Delta(a) = (a, a)$.

On a donc $u \cup v = \Delta^*(C(u \otimes v))$.

Il est fonctoriel, associatif, et vérifie :

$$v \cup u = (-1)^{pq} u \cup v, \quad \text{si } \deg u = p, \quad \deg v = q.$$

Enfin on a :

$$C(u \otimes u') \cup C(v \otimes v') = (-1)^{qp'} C(u \cup v \otimes u' \cup v')$$

si

$$u \in H^p(X), \quad v \in H^q(X), \quad u' \in H^{p'}(X'), \quad v' \in H^{q'}(X').$$

2. Les complexes d'Eilenberg-MacLane.

A. L'ensemble simplicial $\mathcal{L}(\pi, n)$.

DEFINITION. - On note $\mathcal{L}(\pi, n)$ l'ensemble simplicial défini par :

$$S_q(\mathcal{L}(\pi, n)) = C^n(\Delta_{\sim q}; \pi),$$

$$\partial_i = \tilde{\sigma}_i^* : C^n(\Delta_{\sim q}; \pi) \longrightarrow C^n(\Delta_{\sim q-1}; \pi)$$

$$s_i = \tilde{\sigma}_i^* : C^n(\Delta_{\sim q}; \pi) \longrightarrow C^n(\Delta_{\sim q+1}; \pi)$$

DEFINITION. - On appelle cochaîne fondamentale la cochaîne $\xi \in C^n(\mathcal{L}(\pi, n); \pi)$ définie par

$$\xi(a) = a(x),$$

où a parcourt $S_n(\mathcal{L}(\pi, n)) = C^n(\underline{\Delta}_n; \pi)$, et x désigne le n -simplexe fondamental de $\underline{\Delta}_n$.

PROPOSITION 0. - Si $b \in S_q(\mathcal{L}(\pi, n)) = C^n(\underline{\Delta}_q; \pi)$, alors $\tilde{b}^*(\xi) = b$.

DÉMONSTRATION. - $\tilde{b} : \underline{\Delta}_q \rightarrow \mathcal{L}(\pi, n)$. Si $a \in S_p(\underline{\Delta}_q)$, $\tilde{a} : \underline{\Delta}_p \rightarrow \underline{\Delta}_q$, on a $\tilde{b}(a) = \tilde{a}^*(b) \in C^n(\underline{\Delta}_p, \pi)$: c'est la traduction du fait que \tilde{b} est simpliciale, vu la définition des ∂_i et s_i dans $\mathcal{L}(\pi, n)$.

On a, pour tout $a \in S_n(\underline{\Delta}_q)$,

$$(\tilde{b}^*(\xi))(a) = \xi(\tilde{b}(a)) = (\tilde{b}(a))(x) = (\tilde{a}^*(b))(x) = b(\tilde{a}(x)) = b(a) .$$

PROPOSITION 1. - Pour tout ensemble simplicial X , et toute cochaîne $\gamma \in C^n(X; \pi)$, il existe une application simpliciale et une seule g de X dans $\mathcal{L}(\pi, n)$ telle que $g^*(\xi) = \gamma$.

DÉMONSTRATION.

a. Unicité. - On a, pour tout q -simplexe a de X :

$$\tilde{a} : \underline{\Delta}_q \rightarrow X$$

$$\tilde{a}^*(\gamma) = \tilde{a}^*(g^*(\xi)) = (g \circ \tilde{a})^*(\xi) = \tilde{g}^*(\xi) = g(a) .$$

b. Existence. - Posons $g(a) = \tilde{a}^*(\gamma)$. Il reste à vérifier que g est simpliciale :

$$g(\partial_i a) = \tilde{\partial}_i \tilde{a}^*(\gamma) = (\tilde{a} \circ \tilde{\zeta}_i)^*(\gamma) = \tilde{\zeta}_i^*(\tilde{a}^*(\gamma)) = \partial_i(g(a)) .$$

De même pour les s_i .

L'application g associée à une cochaîne γ sera notée $\bar{\gamma}$.

Soit $e \subset \mathcal{L}(\pi, n)$ le sous-ensemble simplicial formé des cochaînes nulles. $\bar{\gamma}$ sera nulle sur un sous-ensemble simplicial $Y \subset X$ si $\bar{\gamma}(Y) = e$.

B. L'ensemble simplicial $L(\pi, n)$.

DÉFINITION. - On note $L(\pi, n)$ le sous-ensemble simplicial de $\mathcal{L}(\pi, n)$ formé des cochaînes normalisées, c'est-à-dire nulles sur les simplexes de la forme $s_i a$.

PROPOSITION 2. - Une cochaîne $\gamma \in C^n(X; \pi)$ est normalisée si et seulement si $\bar{\gamma}(X) \subset L(\pi, n)$.

DÉMONSTRATION. - Si γ est normalisée, $\bar{\gamma}(a) = \tilde{a}^*(\gamma)$ est normalisée, donc est un simplexe de $L(\pi, n)$ pour tout simplexe a de X .

Si $\bar{\gamma} : X \rightarrow L(\pi, n)$,

$$\gamma(sa) = \gamma(\tilde{a}(sx)) = \tilde{a}^*(\gamma)(sx) = \bar{\gamma}(a)(sx) = 0.$$

En particulier la restriction de $\bar{\gamma}$ à $L(\pi, n)$, à laquelle est associée l'injection de $L(\pi, n)$ dans $\mathcal{L}(\pi, n)$, et qu'on notera encore $\bar{\gamma}$ par abus de langage, est une cochaîne normalisée.

PROPOSITION 3. - Si $Y \subset X$, toute application simpliciale de Y dans $\mathcal{L}(\pi, n)$ (resp. $L(\pi, n)$) s'étend à X .

DÉMONSTRATION. - Il suffit de prolonger à X une cochaîne (resp. une cochaîne normalisée) de Y .

COROLLAIRE 1. - $\mathcal{L}(\pi, n)$ et $L(\pi, n)$ satisfont à la condition d'extension de Kan : on dit que X satisfait à la condition de Kan si toute application de Δ_q dans X s'étend à Δ_{q+1} , en notant Λ_q le sous-ensemble simplicial de Δ_{q+1} engendré par les $\partial_i(x)$, $i > 0$, x élément fondamental de Δ_{q+1} .

COROLLAIRE 2. - Deux applications simpliciales d'un ensemble simplicial X dans $\mathcal{L}(\pi, n)$ (resp. $L(\pi, n)$) sont toujours homotopes. En particulier ces ensembles sont contractiles.

C. L'ensemble simplicial $K(\pi, n)$.

DÉFINITION. - On note $K(\pi, n)$ le sous-ensemble simplicial de $L(\pi, n)$ formé des cocycles normalisés.

On a donc $S_q(K(\pi, n)) = Z_N^n(\Delta_q; \pi)$.

PROPOSITION 4. - Pour qu'une cochaîne normalisée γ sur X soit un cocycle, il faut et il suffit que $\bar{\gamma}(X)$ soit contenu dans $K(\pi, n)$.

DÉMONSTRATION. - Si γ est un cocycle, $\bar{\gamma}(a) = \tilde{a}^*(\gamma)$ est un cocycle, donc est un simplexe de $K(\pi, n)$. Si $\bar{\gamma}$ envoie X dans $K(\pi, n)$,

$$\delta\gamma(a) = (\delta\gamma)(\tilde{a}(x)) = (\tilde{a}^*(\delta\gamma))(x) = (\delta(\tilde{a}^*\gamma))(x) = (\delta(\bar{\gamma}(a)))(x) = 0.$$

En particulier la restriction (encore notée ξ) de ξ à $K(\pi, n)$ est un cocycle, appelé cocycle fondamental.

Sa classe de cohomologie est appelée classe fondamentale, et sera notée $\xi_n(\pi)$ ou ξ_n , ou simplement ξ . On note $H^q(\pi, n; G)$ au lieu de $H^q(K(\pi, n); G)$. Par exemple, $\xi_n \in H^n(\pi, n; \pi)$.

Le cobord $\delta: C_N^n(\Delta_{\sim q}; \pi) \rightarrow Z_N^{n+1}(\Delta_{\sim q}; \pi)$ définit une application simpliciale P de $L(\pi, n)$ sur $K(\pi, n+1)$, l'image réciproque de ϵ étant $K(\pi, n)$.

Si $\beta \in C^n(X; \pi)$, on a $P \circ \bar{\beta} = \bar{\delta\beta}$: en effet

$$P(\bar{\beta}(a)) = \delta(a^*(\beta)) = a^*(\delta\beta) = \bar{\delta\beta}(a) .$$

PROPOSITION 5. - L'application P est fibrée au sens de Kan, c'est-à-dire qu'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_q & \xrightarrow{\bar{\beta}} & L(\pi, n) \\ \downarrow & & \downarrow P \\ \Delta_{\sim q+1} & \xrightarrow{\bar{\xi}} & K(\pi, n+1) \end{array}$$

se complète par $\bar{\beta}' : \Delta_{\sim q+1} \rightarrow L(\pi, n)$.

DÉMONSTRATION. - Il faut montrer qu'un $(n+1)$ -cocycle γ de $\Delta_{\sim q+1}$ qui, sur Λ_q , est le bord d'une n -cochaîne β , est sur $\Delta_{\sim q+1}$ le bord d'une n -cochaîne β' prolongeant β à $\Delta_{\sim q+1}$.

Si $n < q$, les n -simplexes de $\Delta_{\sim q+1}$ sont dans Λ_q .

β se prolonge donc uniquement à $\Delta_{\sim q+1}$ en β' . Pour $n = q - 1$, on a bien $\delta\beta'(\partial_0 x) = \gamma(\partial_0 x)$, car $\delta\beta'$ et γ sont deux cocycles qui coïncident sur tous les autres q -simplexes. Si $n = q$, γ est caractérisé par $\gamma(x)$, β est n'importe quoi, il suffit de poser $\beta'(\partial_0 x) = \gamma(x) - \sum (-1)^i \beta(\partial_i(x))$ pour que $\gamma(x) = \delta\beta'(x)$, donc $\gamma = \delta\beta'$. Si $n > q$, γ et β sont nuls, il suffit de poser $\beta' = 0$.

D. THEOREME. - Soient γ_0 et γ_1 deux cocycles de $Z^n(X; \pi)$. Pour que les applications $\bar{\gamma}_0$ et $\bar{\gamma}_1$ de X dans $K(\pi, n)$ soient homotopes, il faut et il suffit que γ_0 et γ_1 soient cohomologues, c'est-à-dire aient même image dans $H^n(X; \pi)$.

DÉMONSTRATION.

a. La condition est évidemment nécessaire, car $\gamma_0 = \bar{\gamma}_0^*(\xi)$, $\gamma_1 = \bar{\gamma}_1^*(\xi)$; or, si $\bar{\gamma}_0$ et $\bar{\gamma}_1$ sont homotopes, $\bar{\gamma}_0^* = \bar{\gamma}_1^*$.

b. La condition est suffisante; d'après les propositions 1 et 4, cela revient à prouver ceci: si γ_0 et γ_1 sont deux cocycles cohomologues, on peut trouver un cocycle Γ sur $X \times \Delta_1$ tel que $i_0^*(\Gamma) = \gamma_0$, $i_1^*(\Gamma) = \gamma_1$, i_0 et i_1 étant les injections de X dans $X \times \Delta_1$ correspondant aux deux sommets de Δ_1 . Par hypothèse, on a $\gamma_1 = \gamma_0 + \delta\beta$. Si $\Gamma_0 = \pi^*(\gamma_0)$, où π est la projection de $X \times \Delta_1$ sur X , on a $i_1^*\Gamma_0 - i_0^*\Gamma_0 = 0$. Si B est une cochaîne sur $X \times \Delta_1$ telle que $i_0^*B = 0$, $i_1^*B = \beta$, ce qui est possible puisque les images de i_0 et i_1 sont disjointes, $\Gamma = \Gamma_0 + \delta B$ est un cocycle répondant à la question.

On a donc, pour tout espace X , une correspondance biunivoque entre $H^n(X; \Pi)$ et l'ensemble des classes d'applications de X dans $K(\Pi, n)$.

Soient X un ensemble simplicial vérifiant la condition de Kan, e un "sommet" de X , c'est-à-dire un sous-ensemble simplicial engendré par un 0-simplexe de X . On note $\pi_n(X, e)$ l'ensemble des applications de (Δ_n, S_{n-1}) dans (X, e) , S_{n-1} désignant le sous-ensemble simplicial de Δ_n engendré par les $(n-1)$ -simplexes. Pour $n \geq 1$, cet ensemble est muni d'une structure de groupe qui, lorsque X est un groupe simplicial et e l'élément neutre, est induite par la multiplication des applications dans X .

D'ailleurs $\pi_n(X, e)$ n'est pas autre chose que le n -ième groupe d'homotopie de la réalisation géométrique de (X, e) . On peut aussi lui appliquer le théorème d'Hurewicz. Le théorème a deux corollaires:

COROLLAIRE 1. - $\pi_q(K(\Pi, n), e) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq n \\ \Pi & \text{si } q = n \end{cases}$. En effet l'ensemble des classes d'applications de (Δ_q, S_{q-1}) dans $(K(\Pi, n), e)$ est $H^n(\Delta_q, S_{q-1}; \Pi) = 0$ si $q \neq n$, Π si $q = n$.

COROLLAIRE 2. - $\check{H}^q(\Pi, n; G) = \begin{cases} 0 & \text{si } q < n \\ \text{Hom}(\Pi, G) & \text{si } q = n \end{cases}$.

3. Détermination de $H^*(Z_p, 1; Z_p)$, p désignant un nombre premier.

A. On a $H^0(Z_p, 1; Z_p) = Z_p$, car $K(Z_p, 1)$ est connexe, et $H^1(Z_p, 1; Z_p) = \text{Hom}(Z_p, Z_p) = Z_p$, avec pour générateur l'élément fondamental ξ_1 .

Soit $\chi_1 : K(Z, 1) \rightarrow K(Z_p, 1)$ l'application simpliciale définie par $\chi_n : Z^1(\Delta_n; Z) \rightarrow Z^1(\Delta_n; Z_p)$ associée à l'application canonique $Z \rightarrow Z_p$.

Cette application est fibrée au sens de Kan, comme on peut le voir par un raisonnement analogue à celui de 2(C), proposition 5, et l'image réciproque de e est l'image isomorphe de $K(Z, 1)$ par la multiplication par p :

$$Z^1(\Delta_n; Z) \rightarrow Z^1(\Delta_n; Z)$$

Il en est d'ailleurs toujours ainsi quand on considère l'application canonique d'un groupe simplicial G dans l'ensemble simplicial B quotient de G par un sous-groupe G' de G . Le fibré qu'on obtient est alors analogue à un fibré principal : en particulier le système local d'homologie ou de cohomologie de la fibre est constant si G' est connexe.

Or $G' = K(Z, 1)$ est homotopiquement équivalent au cercle S_1 , et la suite exacte de Gysin (exposé 3, proposition 5 (C)) donne :

$$0 \rightarrow H^1(Z_p, 1; Z_p) \xrightarrow{\chi^*} H^1(Z, 1; Z_p) \rightarrow H^0(Z_p, 1; Z_p) \xrightarrow{\theta'} H^2(Z_p, 1; Z_p) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow H^n(Z_p, 1; Z_p) \xrightarrow{\theta'} H^{n+2}(Z_p, 1; Z_p) \rightarrow 0$$

où θ' est la multiplication par un élément fixe $g \in H^2(Z_p, 1; Z_p)$. Comme $\chi^* : \text{Hom}(Z_p, Z_p) \rightarrow \text{Hom}(Z, Z_p)$ est un isomorphisme, on voit que θ' est un isomorphisme en toute dimension.

On en déduit par récurrence que

$$H^n(Z_p, 1; Z_p) = Z_p \quad \text{pour tout } n,$$

le générateur étant

$$\begin{aligned} &g^i, \quad \text{si } n = 2i \\ &g^i \}, \quad \text{si } n = 2i + 1 \end{aligned}$$

B. - Cas p premier impair.

On a nécessairement $\xi_1^2 = 0$. L'algèbre de cohomologie est le produit tensoriel de l'algèbre extérieure engendrée par ξ_1 , de degré 1, et de l'algèbre de polynômes engendrée par g , de degré 2 :

$$H^*(Z_p, 1; Z_p) = \wedge(\xi) \otimes Z_p[g].$$

C. - Cas $p = 2$.

On a alors $\xi_1^2 = g$. Il suffit de montrer que ξ_1^2 n'est pas nul. Or, s'il l'était, cela entraînerait, en anticipant sur l'exposé 9, théorème 1, que le carré de tout élément de $H^1(X, Z_2)$ est nul quel que soit X . Or il n'en est pas ainsi quand X est l'espace projectif réel à 2 dimensions (calcul direct ou dualité de Poincaré). On en déduit que l'algèbre de cohomologie est l'algèbre de polynômes engendrée par ξ :

$$H^*(Z_2, 1 ; Z_2) = Z_2 [\xi] .$$
