

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

HENRI CARTAN

Invariant de Hopf (fin)

Séminaire Henri Cartan, tome 11, n° 1 (1958-1959), exp. n° 6, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_1_A6_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

12 janvier 1959

INVARIANT DE HOPF (Fin)

par Henri CARTAN

5. Sur la structure de $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$ pour n impair.

Rappelons d'abord le résultat classique de SERRE [6] : pour n impair, le groupe $\pi_i(S_n)$ est fini si $i > n$. Indiquons très brièvement le principe d'une démonstration :

a. Soit X un espace connexe et simplement connexe ; si les $H_i(X)$ sont de type fini (resp. de torsion) pour $i > 0$, il en est de même des $\pi_i(X)$. Pour le voir, supposons que $\pi_n(X)$ soit le premier groupe d'homotopie $\neq 0$ ($n \geq 2$) ; on construit (à l'aide d'un espace de chemins) un espace Y ayant le même type d'homotopie que X , et une application fibrée $f : Y \longrightarrow K(\pi_n(X), n)$, de fibre Y' , telle que f définisse un isomorphisme $\pi_n(Y) \longrightarrow \pi_n(X)$; l'espace Y' a les mêmes groupes d'homotopie que Y , sauf $\pi_n(Y') = 0$. Les groupes d'homologie de $K(\pi_n(X), n)$ sont de type fini (resp. de torsion) ; la suite spectrale du fibré montre alors que les $H_i(Y')$ (pour $i > 0$) sont de type fini (resp. de torsion), et il en est notamment ainsi de $\pi_{n+1}(Y') \approx \pi_{n+1}(X)$. D'où le principe d'une démonstration récurrente.

b. Dans la construction précédente, supposons que $X = S_n$, n impair, et calculons les groupes d'homologie à coefficients rationnels. On a

$$H_i(Z, n; \mathbb{Q}) = 0 \text{ pour } i > 0, \text{ sauf pour } i = n,$$

et $H_n(Z, n; \mathbb{Q}) \approx \mathbb{Q}$ (cf. la suite spectrale de la fibration de base $K(Z, n+1)$ et fibre $K(Z, n)$). La suite spectrale du fibré Y montre aussitôt que $H_i(Y'; \mathbb{Q}) = 0$ pour tout $i > 0$. Il s'ensuit que les $H_i(Y')$ à coefficients entiers sont des groupes de torsion pour $i > 0$; et comme ils sont de type fini d'après (a), ce sont des groupes finis. En appliquant (a) à l'espace Y' , on voit que les $\pi_i(Y')$ sont finis. Or $\pi_i(S_n) \approx \pi_i(Y')$ pour $i > n$.

Signalons que des raisonnements analogues (mais un peu plus compliqués) permettent de montrer que, pour n pair, les $\pi_i(S_n)$, pour $i > n$, sont finis sauf si $i = 2n-1$. Nous n'utiliserons pas ce résultat.

On va maintenant préciser la structure de $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$ pour n impair, en utilisant les résultats de l'Exposé 5. Tout d'abord, le noyau de H est le sous-groupe de torsion de $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$; car il contient évidemment le sous-groupe de torsion ; et ce noyau, image de la suspension E , est fini, puisque $\pi_{2n}(S_n)$ est fini.

Premier cas : n impair non exceptionnel. - On a donc $[i_n, i_n] \neq 0$. Alors l'image de $H : \pi_{2n+1}(S_{n+1}) \rightarrow Z$ se compose des entiers pairs, autrement dit, elle est engendrée par $H[i_{n+1}, i_{n+1}]$ (cf. théorème 2 de l'Exposé 5). Dans le diagramme (7) de l'Exposé 5, remplaçons n par $n+1$, et considérons l'application

$$\partial : Z \approx \pi_{2n+2}(\Omega(S_{n+2}), S_{n+1}) \rightarrow \pi_{2n+1}(S_{n+1}).$$

On voit que l'application composée

$$Z \xrightarrow{\partial} \pi_{2n+1}(S_{n+1}) \xrightarrow{\frac{1}{2}H} Z$$

est égale à \pm l'identité. Autrement dit, le groupe $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$ est somme directe du sous-groupe (isomorphe à Z) engendré par $[i_{n+1}, i_{n+1}]$, et du sous-groupe de torsion (noyau de H). Ce dernier, isomorphe au conoyau de ∂ , est, par la suspension $E : \pi_{2n+1}(S_{n+1}) \rightarrow \pi_{2n+2}(S_{n+2})$, isomorphe à $\pi_{2n+2}(S_{n+2})$; ainsi $\pi_{2n+2}(S_{n+2})$ est canoniquement isomorphe au sous-groupe de torsion de $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$. De plus, la suspension double

$$E^2 : \pi_{2n}(S_n) \rightarrow \pi_{2n+2}(S_{n+2})$$

est surjective ; en effet, $E : \pi_{2n+1}(S_{n+1}) \rightarrow \pi_{2n+2}(S_{n+2})$ est surjective, son noyau est l'image de $\partial : Z \rightarrow \pi_{2n+1}(S_{n+1})$, qui admet pour supplémentaire le sous-groupe de torsion, c'est-à-dire l'image de $E : \pi_{2n}(S_n) \rightarrow \pi_{2n+1}(S_{n+1})$.

Deuxième cas : n impair exceptionnel (en fait, $n = 1, 3$ ou 7). - On a alors $[i_n, i_n] = 0$, et on a une suite exacte

$$\pi_{2n}(S_n) \xrightarrow{E} \pi_{2n+1}(S_{n+1}) \xrightarrow{H} Z \rightarrow 0,$$

et d'ailleurs on peut mettre un zéro à gauche, car on verra que la suspension $\pi_i(S_n) \rightarrow \pi_{i+1}(S_{n+1})$ est injective pour tout i , lorsque n est exceptionnel. Il est naturel de se demander si $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$ est somme directe de son groupe de

torsion et d'un relèvement de H contenant $[i_{n+1}, i_{n+1}]$. La réponse est évidemment affirmative pour $n = 1$. En fait, la réponse est négative pour n exceptionnel $\neq 1$, comme l'a montré JAMES [4] : en effet, l'élément $[i_{n+1}, i_{n+1}]$ n'est pas divisible par 2 dans $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$, lorsque n est exceptionnel et $\neq 1$. En d'autres termes, si $\alpha \in \pi_{2n+1}(S_{n+1})$ est tel que $H(\alpha) = 1$, alors

$$\mu = [i_{n+1}, i_{n+1}] + 2\alpha \neq 0 ;$$

JAMES le prouve en montrant que μ est la suspension d'un $\beta \in \pi_{2n}(S_n)$ dont l'image dans $\pi_{2n-1}(\Omega(S_n), S_{n-1})$ est $\neq 0$, ce qui implique $\beta \neq 0$, et comme la suspension E est injective, on obtient $\mu \neq 0$. JAMES donne aussi une interprétation de ce résultat (cf. ci-dessous, fin du paragraphe 9) : il signifie que la sphère S_n , pour $n \neq 1$, ne possède aucune loi de H -espace qui soit homotopiquement commutative (en fait, ce résultat s'applique pour $n = 3$ et $n = 7$).

Supposant toujours n impair et exceptionnel, et admettant, ce qui sera démontré ci-dessous (corollaire de la proposition 5), que $E : \pi_{2n}(S_n) \longrightarrow \pi_{2n+1}(S_{n+1})$ est injective, on va voir qu'on a une suite exacte

$$(1) \quad 0 \longrightarrow \pi_{2n}(S_n) \xrightarrow{E^2} \pi_{2n+2}(S_{n+2}) \longrightarrow Z_2 \longrightarrow 0 .$$

Que E^2 soit injective résulte du fait que l'image de $\pi_{2n}(S_n) \longrightarrow \pi_{2n+1}(S_{n+1})$ est le sous-groupe de torsion de $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$, qui ne rencontre pas le noyau de $E : \pi_{2n+1}(S_{n+1}) \longrightarrow \pi_{2n+2}(S_{n+2})$, puisque ce noyau se compose des multiples de $[i_{n+1}, i_{n+1}]$. Il reste à voir que le conoyau de E^2 est Z_2 ; or $\pi_{2n+2}(S_{n+2})$ est l'image de $E : \pi_{2n+1}(S_{n+1}) \longrightarrow \pi_{2n+2}(S_{n+2})$ qui est surjective ; un élément de $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$, dont l'invariant de Hopf est un, n'est pas la somme d'un multiple entier de $[i_{n+1}, i_{n+1}]$ et d'un élément de torsion, donc n'est pas dans l'image de E^2 . Par contre, le double de tout élément de $\pi_{2n+2}(S_{n+2})$ est dans l'image de E^2 , car le double de tout élément de $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$ est la somme d'un multiple de $[i_{n+1}, i_{n+1}]$ et d'un élément de torsion.

En particulier, pour $n = 1$, on trouve $\pi_4(S_3) \approx Z_2$, ce qui est bien connu. Pour $n \neq 1$, il n'y a pas de factorisation dans la suite exacte (1), sinon $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$ contiendrait un élément dont le double serait égal à $[i_{n+1}, i_{n+1}]$,

contrairement à ce qu'on a dit plus haut. (En fait, la valeur connue de $\pi_8(S_5) \approx Z_{24}$ et celle de $\pi_{16}(S_9) \approx Z_{240}$ mettent en évidence qu'il n'y a pas de facteur direct Z_2 , pour $n = 3$ et $n = 7$).

6. Calcul homologique de l'invariant de Hopf.

Soit f une application continue $S_{2n-1} \rightarrow S_n$. Soit X_f l'espace obtenu en attachant une boule fermée B_{2n} à la sphère S_n au moyen de l'application f de la frontière S_{2n-1} de B_{2n} . Comme on l'a vu dans un cas particulier dans l'Exposé 5 (n° 3), les groupes de cohomologie $H^i(X_f; Z)$ sont nuls pour $i \neq 0, n, 2n$; $H^n(X_f; Z) \rightarrow H^n(S_n; Z)$ est un isomorphisme, ainsi que

$$H^{2n}(X_f; Z) \leftarrow H^{2n}(X_f, S_n; Z) \rightarrow H^{2n}(B_{2n}, S_{2n-1}; Z).$$

Donc $H^n(X_f; Z)$ et $H^{2n}(X_f; Z)$ sont canoniquement isomorphes à Z . Définissons un entier $k(f)$ comme suit : le cup-carré du générateur de $H^n(X_f; Z)$ est égal à $k(f)$ fois le générateur de $H^{2n}(X_f; Z)$.

THEOREME 5. - L'entier $k(f)$ ne dépend que de la classe u de f dans $\pi_{2n-1}(S_n)$, et $k(f)$ est opposé à l'invariant de Hopf $H(u)$.

DÉMONSTRATION. - Montrons d'abord que le type d'homotopie de l'espace X_f ne dépend que de la classe d'homotopie u de l'application f . Soient f_0 et f_1 deux applications homotopes $S_{2n-1} \rightarrow S_n$, et soit $g : I \times S_{2n-1} \rightarrow S_n$ une déformation de f_0 en f_1 . Attachons $I \times B_{2n}$ à S_n au moyen de l'application g de $I \times S_{2n-1}$. On obtient un espace Y ; pour chaque $t \in I$, on a un sous-espace Y_t ; il est clair que $Y_0 = X_{f_0}$, $Y_1 = X_{f_1}$. Il suffit maintenant de montrer que l'injection $Y_t \rightarrow Y$ est, pour chaque t , une homotopie-équivalence; comme les espaces sont simplement connexes (on a supposé $n \geq 2$), il suffit de montrer que les applications $H_i(Y_t) \rightarrow H_i(Y)$ sont des isomorphismes; c'est immédiat.

Ainsi $k(f)$ ne dépend que de la classe u de f ; on le notera $k(u)$. Voici la marche de la suite de la démonstration : on prouvera que $k(u)$ est une fonction additive de $u \in \pi_{2n-1}(S_n)$. Pour n impair, $k(u)$ est donc nul, puisque le groupe $\pi_{2n-1}(S_n)$ est fini; donc $k(u) + H(u) = 0$. Pour n pair, les deux homomorphismes k et H définissent chacun, par passage au quotient, un homomorphisme dans Z du quotient de $\pi_{2n-1}(S_n)$ par son sous-groupe de torsion, quotient dont tous les éléments sont proportionnels à la classe de $[i_n, i_n]$. Pour prouver que $k + H = 0$, il suffit donc de prouver que k et H prennent des

valeurs opposées sur l'élément $[i_n, i_n]$. Or il en est bien ainsi : il suffit de confronter le théorème 2 et la proposition 4 de l'Exposé 5.

Tout revient finalement à prouver que $k(u)$ est une fonction additive de $u \in \mathbb{N}_{2n-1}(S_n)$, le seul cas intéressant étant celui où n est pair. Soient u, v, w trois éléments de $\mathbb{N}_{2n-1}(S_n)$, tels que $w = u+v$. On peut supposer que u est défini par une application $f : S_{2n-1} \rightarrow S_n$ qui est constante sur l'hémisphère inférieur, et que v est définie par une application g qui est constante sur l'hémisphère supérieur. Soit $h : S_{2n-1} \rightarrow S_n$ l'application égale à f sur l'hémisphère supérieur, à g sur l'hémisphère inférieur ; w est dans la classe de h . On constate alors immédiatement les faits suivants :

L'espace X_h est réunion de deux sous-espaces fermés A et B , dont l'intersection $A \cap B$ est réunion d'une sphère S_{2n-1} et d'une sphère S_n ayant tout juste un point commun. Contractons S_{2n-1} en un point a ; soit Y le quotient de X_h ainsi obtenu ; alors le quotient de A est précisément X_f , celui de B est X_g , et on a $X_f \cap X_g = S_n$. On a le diagramme commutatif suivant (où tous les groupes de cohomologie sont à coefficients entiers)

$$\begin{array}{ccccc}
 H^n(X_f) & \xleftarrow{\approx} & H^n(Y) & \xrightarrow{\approx} & H^n(X_g) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H^{2n}(X_f) & \xleftarrow{\quad} & H^{2n}(Y) & \xrightarrow{\quad} & H^{2n}(X_g) \\
 \uparrow \approx & & \uparrow \approx & & \uparrow \approx \\
 H^{2n}(X_f, S_n) & \xleftarrow{\quad} & H^{2n}(Y, S_n) & \xrightarrow{\quad} & H^{2n}(X_g, S_n)
 \end{array}$$

où les trois premières flèches verticales désignent les applications de cup-carré. De plus, les homomorphismes de la dernière ligne identifient $H^{2n}(Y, S_n)$ à la somme directe de $H^{2n}(X_f, S_n)$ et $H^{2n}(X_g, S_n)$. Soit e le générateur de $H^n(Y)$, identifié à ses images dans $H^n(X_f)$ et $H^n(X_g)$; son carré est un élément de $H^{2n}(Y) \approx H^{2n}(X_f) \oplus H^{2n}(X_g)$, donc est égal à la somme $k(u)e' + k(v)e''$, en notant e' et e'' les générateurs de $H^{2n}(X_f)$ et $H^{2n}(X_g)$.

Or on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 H^{2n}(Y, S_n) & \longrightarrow & H^{2n}(Y) & \xleftarrow{\text{carré}} & H^n(Y) \\
 \downarrow \approx & & \downarrow \lambda & & \downarrow \approx \\
 H^{2n}(X_h, A \cap B) & \longrightarrow & H^{2n}(X_h) & \xleftarrow{\text{carré}} & H^n(X_h)
 \end{array}$$

dont les homomorphismes verticaux sont définis par l'application de X_h sur son quotient Y . L'image de e' (resp. de e'') dans $H^{2n}(Y)$ est envoyée par λ dans le générateur de $H^{2n}(X_h)$. Donc le carré du générateur $e \in H^n(Y)$ est envoyé par λ dans $k(u) + k(v)$ fois le générateur de $H^{2n}(X_h)$, ce qui prouve que

$$k(w) = k(u) + k(v) ,$$

et achève enfin la démonstration.

COROLLAIRE du théorème 5. - Pour qu'une application $f : S_{2n-1} \rightarrow S_n$ ait un invariant de Hopf égal à ± 1 (n pair), il faut et il suffit que le cup-carré

$$H^n(X_f ; Z_2) \longrightarrow H^{2n}(X_f ; Z_2)$$

ne soit pas nul.

Observons que le cup-carré n'est pas autre chose ici que l'opération de Steenrod $Sq^n : H^n \rightarrow H^{2n}$ (dans la cohomologie à coefficients modulo 2) ; cf. un exposé ultérieur (Exposé 9) : D'autre part on a ici $H^i(X_f ; Z_2) = 0$ pour $n < i < 2n$. Voici alors comment ADAMS démontre que les seuls entiers "exceptionnels" (cf. Exposé 5, th. 4) sont 1, 3 ou 7 ; il prouve :

THÉOREME de Adams [1]. - Soit X un espace, et soient m et n deux entiers tels que $H^i(X ; Z_2) = 0$ pour $m < i < m+n$. Alors l'opération de Steenrod

$$Sq^n : H^m(X ; Z_2) \longrightarrow H^{m+n}(X ; Z_2)$$

est nulle, sauf peut-être si $n = 1, 2, 4$ ou 8 .

La suite de ce Séminaire sera en grande partie consacrée à la théorie des opérations cohomologiques secondaires, ce qui permettra d'établir le théorème ci-dessus.

7. Etude d'une application $S_{2n+1} \rightarrow S_{n+1}$ dont l'invariant de Hopf est un.

On aura besoin du :

LEMME 1. - Soit $f : S_{2n+1} \rightarrow S_{n+1}$, d'où une application

$$\Omega(f) : \Omega(S_{2n+1}) \longrightarrow \Omega(S_{n+1}) ,$$

qui induit un homomorphisme

$$H_{2n}(\Omega(S_{2n+1})) \longrightarrow H_{2n}(\Omega(S_{n+1})) .$$

Chacun de ces groupes est isomorphe à Z_2 , et l'image du générateur canonique de

$H_{2n}(\Omega(S_{2n+1}))$ est égale à $H(f)$ fois le générateur canonique de $H_{2n}(\Omega(S_{n+1}))$,
 $H(f)$ étant l'invariant de Hopf de l'application f .

DÉMONSTRATION : considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_{2n}(\Omega(S_{2n+1})) & \longrightarrow & H_{2n}(\Omega(S_{2n+1})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_{2n}(\Omega(S_{n+1})) & \longrightarrow & H_{2n}(\Omega(S_{n+1})) \end{array}$$

où les homomorphismes verticaux sont définis par f , les homomorphismes horizontaux étant ceux de Hurewicz. L'homomorphisme de la première ligne est un isomorphisme, celui de la seconde ligne n'est autre que H , en vertu de la définition de H . Alors $H(f)$ est l'image, dans $H_{2n}(\Omega(S_{n+1})) \approx \mathbb{Z}$, du générateur de $\pi_{2n}(\Omega(S_{2n+1}))$, d'où le lemme.

Considérons alors l'inclusion $i : S_n \longrightarrow \Omega(S_{n+1})$ et l'application

$$\Omega(f) : \Omega(S_{2n+1}) \longrightarrow \Omega(S_{n+1}).$$

Grâce à la structure multiplicative de $\Omega(S_{n+1})$, on en déduit une application

$$g : S_n \times \Omega(S_{2n+1}) \longrightarrow \Omega(S_{n+1}),$$

définie par $g(x, y) = i(x) \cdot \Omega(f)(y)$.

PROPOSITION 5. - Si $H(f) = 1$, l'application g définit des isomorphismes des groupes d'homotopie

$$\pi_i(S_n) \times \pi_{i+1}(S_{2n+1}) \approx \pi_{i+1}(S_{n+1}) \text{ pour tout } i.$$

Ces isomorphismes sont obtenus en faisant le produit de l'application de suspension $\pi_i(S_n) \longrightarrow \pi_{i+1}(S_{n+1})$ et de l'application $\pi_{i+1}(S_{2n+1}) \longrightarrow \pi_{i+1}(S_{n+1})$ définie par f .

COROLLAIRE. - Si n est exceptionnel, les homomorphismes de suspension $\pi_i(S_n) \longrightarrow \pi_{i+1}(S_{n+1})$ sont injectifs.

DÉMONSTRATION de la proposition 5 : d'après le théorème 5 de l'Exposé 4, il suffit de montrer que g définit un isomorphisme des groupes d'homologie. Or l'homologie du produit $S_n \times \Omega(S_{2n+1})$ est $H_*(S_n) \otimes H_*(\Omega(S_{2n+1}))$, qu'on envoie dans l'algèbre d'homologie $H_*(\Omega(S_{n+1}))$ par les deux applications

$H_*(S_n) \longrightarrow H_*(\Omega(S_{n+1}))$ et $H_*(\Omega(S_{2n+1})) \longrightarrow H_*(\Omega(S_{n+1}))$. La première envoie le générateur de $H_n(S_n)$ sur le générateur de $H_n(\Omega(S_{n+1}))$, puisqu'il s'agit de l'application définie par l'inclusion $S_n \longrightarrow \Omega(S_{n+1})$ (Exposé 5, paragraphe 1); la seconde, en vertu du lemme 1, envoie le générateur de $H_{2n}(\Omega(S_{2n+1}))$ sur celui de $H_{2n}(\Omega(S_{n+1}))$, qui est le carré du générateur de $H_n(\Omega(S_{n+1}))$. Vu les structures d'algèbres de polynômes de $H_*(\Omega(S_{2n+1}))$ et de $H_*(\Omega(S_{n+1}))$, on constate que l'application $H_*(S_n) \otimes H_*(\Omega(S_{2n+1})) \longrightarrow H_*(\Omega(S_{n+1}))$ est bijective dans tous les degrés.

C.Q.F.D.

8. Fibrés de base S_{n+1} et de fibre S_n .

Rappelons d'abord les fibrations classiques : S_3 fibré sur S_2 , de fibre S_1 ; S_7 fibré sur S_4 , de fibre S_3 ; S_{15} fibré sur S_8 , de fibre S_7 . Ces fibrations sont déduites de la multiplication des nombres complexes (resp. des quaternions, resp. des octaves) de norme 1, compte tenu de l'identité (valable dans ces trois cas) : $x^{-1}(xy) = y$.

Explicitons : soit $n = 1$ (resp. 3, resp. 7); identifions \mathbb{R}^{n+1} aux nombres complexes (resp. quaternions, resp. octaves), et S_{2n+1} à l'espace des couples (x, y) tels que $|x|^2 + |y|^2 = 1$. Identifions S_n aux éléments de \mathbb{R}^{n+1} de norme 1, et faisons opérer S_n dans S_{2n+1} par

$$(x, y) \longrightarrow (zx, zy) \quad (z \in S_n).$$

Grâce à l'identité précédente, on obtient un fibré S_{2n+1} de fibre S_n , et il est immédiat que la base est homéomorphe à \mathbb{S}_{n+1} (\mathbb{R}^{n+1} complété par un "point à l'infini").

Dans ces trois cas, l'application $S_{2n+1} \longrightarrow S_{n+1}$ du fibré sur sa base a un invariant de Hopf égal à ± 1 : c'est un cas particulier d'un résultat plus général qu'on va établir maintenant.

PROPOSITION 6. - Soit X un fibré de Serre, de base S_{n+1} , de fibre S_n , tel que $H_n(X) = 0$. Alors l'entier n est exceptionnel; il existe une application continue $f : S_{2n+1} \longrightarrow X$ définissant des isomorphismes $\pi_k(S_{2n+1}) \longrightarrow \pi_k(X)$ pour tout k , et l'application composée $S_{2n+1} \xrightarrow{f} X \longrightarrow S_{n+1}$ a un invariant de Hopf égal à ± 1 .

DÉMONSTRATION : la suite exacte d'homotopie du fibré montre que $\pi_k(X) = 0$ pour $k < n$, et que $\pi_n(X)$ est un quotient de $\pi_n(S_n)$, donc est abélien; puisque

$H_n(X) = 0$ par hypothèse, le théorème de Hurewicz montre que $\pi_n(X) = 0$; la suite exacte d'homotopie montre alors que $\partial : \pi_{n+1}(S_{n+1}) \longrightarrow \pi_n(S_n)$ est surjectif; c'est donc un isomorphisme. Utilisons le :

LEMME 2. - Soit X un fibré de Serre, de base S_{n+1} et de fibre S_n ; si l'application $\partial : \pi_{n+1}(S_{n+1}) \longrightarrow \pi_n(S_n)$ de la suite exacte d'homotopie est un isomorphisme, alors, pour tout k , l'application composée

$$\pi_k(S_n) \xrightarrow{E} \pi_{k+1}(S_{n+1}) \xrightarrow{\partial} \pi_k(S_n)$$

est l'identité.

Montrons d'abord ce lemme. On peut supposer (en changeant au besoin l'orientation de S_{n+1} au moyen d'un automorphisme convenable), que $\partial : \pi_{n+1}(S_{n+1}) \longrightarrow \pi_n(S_n)$ est l'inverse de l'isomorphisme de suspension. D'après l'Exposé 1 (paragraphe 7), l'application ∂ est induite par

$$\pi_k(\Omega(S_{n+1}, b_0)) \longleftarrow \pi_k(\Omega(X, S_n, x_0)) \longrightarrow \pi_k(S_n),$$

l'espace des chemins $\Omega(X, S_n, x_0)$ étant fibré sur S_n , et étant aussi fibré sur $\Omega(S_{n+1}, b_0)$ par l'application induite par la projection $X \longrightarrow S_{n+1}$; cette deuxième fibration a une fibre contractile et définit des isomorphismes des groupes d'homotopie. L'application d'injection $i : S_n \longrightarrow \Omega(S_{n+1}, b_0)$ dans la base du fibré $\Omega(X, S_n, x_0)$ se relève en une application $j : S_n \longrightarrow \Omega(X, S_n, x_0)$; si on compose j avec l'application de projection $\Omega(X, S_n, x_0) \longrightarrow S_n$, on obtient une application $S_n \longrightarrow S_n$ qui, d'après l'hypothèse faite sur

$$\partial : \pi_{n+1}(S_{n+1}) \longrightarrow \pi_n(S_n),$$

induit l'application identique de $\pi_n(S_n)$. Donc $p \circ j$ est homotope à l'identité, et il s'ensuit que l'application composée

$$\pi_k(S_n) \xrightarrow{i_*} \pi_k(\Omega(S_{n+1})) \xrightarrow{p_*} \pi_k(S_n)$$

est l'identité, ce qui établit le lemme.

Achevons maintenant la démonstration de la proposition 6. Le lemme 2 entraîne que la suspension $E : \pi_k(S_n) \longrightarrow \pi_{k+1}(S_{n+1})$ est injective; donc (Exposé 5, théorème 4, (iv)) n est exceptionnel. De plus, ∂ est surjectif, donc la suite exacte d'homotopie du fibré se coupe en petites suites exactes

$$0 \longrightarrow \pi_{k+1}(X) \longrightarrow \pi_{k+1}(S_{n+1}) \xrightarrow{\partial} \pi_k(S_n) \longrightarrow 0,$$

dans lesquelles on a une factorisation directe canonique, puisque la suspension $E : \pi_k(S_n) \longrightarrow \pi_{k+1}(S_{n+1})$ relève ∂ . Autrement dit, l'application fibrée $X \longrightarrow S_{n+1}$ définit des injections $\pi_{k+1}(X) \longrightarrow \pi_{k+1}(S_{n+1})$ qui, jointes aux applications de suspension $\pi_k(S_n) \longrightarrow \pi_{k+1}(S_{n+1})$, définissent des isomorphismes

$$\pi_k(S_n) \times \pi_{k+1}(X) \approx \pi_{k+1}(S_{n+1}).$$

Comparant avec la proposition 5, on trouve des isomorphismes $\pi_{k+1}(S_{2n+1}) \approx \pi_{k+1}(X)$. En particulier, au générateur canonique de $\pi_{2n+1}(S_{2n+1})$ correspond un élément de $\pi_{2n+1}(X)$. Soit $f : S_{2n+1} \longrightarrow X$ une application appartenant à la classe de cet élément. L'application composée $S_{2n+1} \xrightarrow{f} X \longrightarrow S_{n+1}$ envoie le générateur de $\pi_{2n+1}(S_{2n+1})$ sur un générateur d'un supplémentaire du sous-groupe de torsion de $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$, donc sur un élément de $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$ dont l'invariant de Hopf est ± 1 . La proposition 5 montre que cette application composée envoie $\pi_{k+1}(S_{2n+1})$ sur un supplémentaire de l'image de la suspension $\pi_k(S_n) \longrightarrow \pi_{k+1}(S_{n+1})$; donc l'application f induit un isomorphisme $\pi_{k+1}(S_{2n+1}) \approx \pi_{k+1}(X)$. La proposition 6 est entièrement démontrée.

Elle implique que si un espace X admet une fibration sur S_{n+1} , de fibre S_n , et si $H_n(X) = 0$, alors X a le type d'homotopie de la sphère S_{2n+1} .

9. Compléments.

On indique ici quelques résultats sans démonstrations.

Rappelons d'abord la construction de Hopf [2] qui à toute application d'espaces avec points-base

$$f : S_p \times S_q \longrightarrow X$$

associe une application $g : S_{p+q+1} \longrightarrow S(X)$ dans la suspension de X . Considérons S_{p+q+1} comme le "joint réduit" de S_p et de S_q , c'est-à-dire comme le quotient de $I \times S_p \times S_q$ par la relation d'équivalence suivante :

$$(0, x, y) \sim (0, x, y') \text{ pour } x \in S_p, y \in S_q, y' \in S_q,$$

$$(1, x, y) \sim (1, x', y) \text{ pour } x \in S_p, x' \in S_p, y \in S_q,$$

$$(t, x_0, y_0) \sim (t', x_0, y_0) \text{ pour } t \in I, x_0 \text{ et } y_0 \text{ étant}$$

les points-base de S_p et S_q . D'autre part $S(X)$ est un quotient de $I \times X$ (Exposé 5, n°1). L'application produit

$$I \times f : I \times S_p \times S_q \longrightarrow I \times X$$

passé aux quotients, et induit l'application cherchée g .

Deux applications homotopes f_1 et f_2 induisent des applications g_1 et g_2 homotopes. Dans le cas où $X = S_n$, la construction de Hopf associée à chaque classe d'applications $S_p \times S_q \longrightarrow S_n$ une classe d'applications $S_{p+q+1} \longrightarrow S_{n+1}$.

En particulier, soit une application $f : S_n \times S_n \longrightarrow S_n$ admettant le point-base de S_n comme élément neutre (ce qui suppose l'entier n exceptionnel). f définit, par la construction de Hopf, un élément de $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$, dont on montre qu'il a un invariant de Hopf égal à 1. On le notera $c(f)$.

Considérons maintenant deux structures de H-espace sur S_n :

$$f_1 : S_n \times S_n \longrightarrow S_n, \quad f_2 : S_n \times S_n \longrightarrow S_n,$$

le point-base étant élément neutre. Alors f_1 et f_2 coïncident sur $S_n \vee S_n$; si on concentre $S_n \vee S_n$ en un point, on obtient une application $S_{2n} \longrightarrow S_n$, dont la classe $\alpha \in \pi_{2n}(S_n)$ ne dépend que des classes de f_1 et f_2 ; notons la $\alpha(f_1, f_2)$. Pour que f_1 et f_2 soient homotopes, il faut et il suffit que $\alpha(f_1, f_2) = 0$. On montre que, f_1 et α étant arbitrairement donnés, il existe une loi f_2 telle que $\alpha(f_1, f_2) = \alpha$. (cf. [5]). On peut interpréter $\alpha(f_1, f_2)$ comme suit : considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi_{2n}(S_n) \xrightarrow{E} \pi_{2n+1}(S_{n+1}) \xrightarrow{H} \mathbb{Z} \longrightarrow 0;$$

la différence $c(f_1) - c(f_2)$ est dans l'image de $\alpha(f_1, f_2)$ par E .

On voit qu'il existe 12 classes de lois de H-espace sur S_3 , et 120 classes de lois de H-espace sur S_7 (car $\pi_6(S_3) = \mathbb{Z}_{12}$ et $\pi_{14}(S_7) = \mathbb{Z}_{120}$).

Considérons en particulier le cas $n = 3$. Le crochet des quaternions de norme 1 :

$$(x, y) \longrightarrow xyx^{-1}y^{-1}$$

est une application $S_3 \times S_3 \longrightarrow S_3$ qui envoie $S_3 \vee S_3$ dans le quaternion unité, donc définit par passage au quotient une application $S_6 \longrightarrow S_3$. Il est connu que l'élément correspondant de $\pi_6(S_3)$ est un générateur de $\pi_6(S_3)$,

groupe cyclique d'ordre 12. De là on déduit toutes les classes de lois de H-espace sur S_3 : on obtient des représentants de ces classes en prenant les lois de composition

$$(x, y) \longrightarrow xy(xy x^{-1} y^{-1})^k, \text{ pour } k = 0, 1, \dots, 11.$$

D'après ce qui précède, tout élément $\alpha \in \pi_{2n+1}^{\mathbb{Z}}(S_{n+1})$ tel que $H(\alpha) = 1$ est de la forme $c(f)$ pour une loi convenable $f : S_n \times S_n \longrightarrow S_n$ admettant le point-base comme élément neutre. Il serait intéressant de donner un procédé de construction d'une telle f à partir d'une application $S_{2n+1} \longrightarrow S_{n+1}$ appartenant à la classe de α .

Signalons encore ce résultat de James ([3] et [4]) : si $\bar{f} : S_n \times S_n \longrightarrow S_n$ est l'application déduite de f par $\bar{f}(x, y) = f(y, x)$,

on a

$$c(f) + c(\bar{f}) = -[i_{n+1}, i_{n+1}].$$

Dire que f est homotopiquement commutative revient à dire que f et \bar{f} sont homotopes, ce qui équivaut à $c(f) = c(\bar{f})$, ou encore à $2c(f) = -[i_{n+1}, i_{n+1}]$. Comme on l'a dit plus haut, ceci est impossible si n est exceptionnel et $\neq 1$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ADAMS (J. F.). - Non-existence of elements of Hopf-invariant one. Princeton, 1958, 111 p. multigraphiées.
- [2] HOPF (Heinz). - Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension, Fund. Math., t. 25, 1935, p. 427-440.
- [3] JAMES (I. M.). - On spaces with a multiplication, Pacific J. of Math., t. 7, 1957, p. 1083-1100.
- [4] JAMES (I. M.). - Multiplication on spheres, I., Proc. Amer. math. Soc., t. 8, 1957, p. 192-196.
- [5] JAMES (I. M.). - Multiplication on spheres, II., Trans. Amer. math. Soc., t. 84, 1957, p. 545-558.
- [6] SERRE (Jean-Pierre). - Homologie singulière des espaces fibrés. Applications, Annals of Math., Series 2, t. 54, 1951, p. 425-505.