Henri Cartan

Suspension et invariant de Hopf

Séminaire Henri Cartan, tome 11, n° 1 (1958-1959), exp. n° 5, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_1_A5_0>

SUSPENSION ET INVARIANT DE HOPF

par Henri CARTAN

1. La suspension.

Tous les espaces considérés sont munis d'un point-base ; toutes les applications continues envoient le point-base au point-base.

Se donner une application continue $f : X \longrightarrow \Omega(Y)$ (d'une façon précise, une application continue de X dans l'espace des lacets $\Omega(Y , y_0)$, qui envoie le point-base x_0 au point-base $\tilde{y}_0$ formé du lacet ponctuel au point y_0) , c'est se donner une application continue $g : I \times X \longrightarrow Y$ (où I désigne le segment $0 \leqslant t \leqslant 1$) telle que

$$g(0 , x) = g(1 , x) = g(t , x_0) = y_0 \quad \text{pour tous} \quad x \in X , \quad t \in I .$$

Soit $S(X , x_0)$ (ou plus brièvement $S(X)$) l'espace quotient de $I \times X$ obtenu par identification en un seul point de l'ensemble

$$(\{0\} \times X) \cup (\{1\} \times X) \cup (I \times \{x_0\}) ;$$

on voit que la donnée de f équivaut à la donnée d'une application continue $h : S(X) \longrightarrow Y$, qui envoie la classe de x_0 dans le point y_0 ; h est déduite de g par passage au quotient.

On définit ainsi une bijection canonique

$$\mathrm{Hom}(S(X) , Y) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}(X , \Omega(Y)) ,$$

où Hom désigne l'ensemble des applications continues respectant les points-base. Et cette bijection jouit des propriétés fonctorielles évidentes ; autrement dit, elle est "naturelle". (Ceci est un exemple de la notion de "foncteurs adjoints", due à D. M. KAN [2] ; les foncteurs S et Ω sont adjoints). A vrai dire, il aurait fallu définir complètement le foncteur S , en indiquant comment une application continue $X \longrightarrow X'$ d'espaces à point-base definit une application continue $S(X) \longrightarrow S(X')$; c'est d'ailleurs si évident qu'on ne l'explicitera pas. L'espace $S(X)$, muni de son point-base, s'appelle la <u>suspension</u> (ou parfois la "suspension réduite") de l'espace X (muni de son point-base).

Pour que deux applications $X \longrightarrow \Omega(Y)$ soient homotopes (dans une homotopie qui envoie constamment le point-base au point-base), il faut et il suffit que les applications associées $S(X) \longrightarrow Y$ soient homotopes (dans une homotopie qui envoie constamment le point-base au point-base) : vérification immédiate. Les classes d'applications $X \longrightarrow \Omega(Y)$ sont donc en correspondance bijective (canonique) avec les classes d'applications $S(X) \longrightarrow Y$.

L'application identique $S(X) \longrightarrow S(X)$ définit canoniquement une application $X \longrightarrow \Omega(S(X))$ (prendre $Y = S(X)$) , qui a un caractère fonctoriel. En fait, $X \longrightarrow \Omega S(X)$ est un <u>plongement</u>, qui identifie X à un sous-espace de $\Omega S(X)$, avec la topologie induite : car à chaque $x \in X$ on associe le lacet qui, à chaque t , associe la classe de (t , x) dans $S(X)$; il est clair que $x \neq x'$ entraîne que les lacets $t \longrightarrow$ classe de (t , x) , et $t \longrightarrow$ classe de (t , x') , sont distincts ; l'assertion relative à la topologie induite se vérifie sans difficulté.

L'injection canonique $X \longrightarrow \Omega S(X)$ définit un homomorphisme

$$\pi_k(X) \longrightarrow \pi_k(\Omega S(X)) = \pi_{k+1}(S(X)) \quad \text{pour chaque entier } k .$$

C'est la <u>suspension des groupes d'homotopie</u>, qu'on note $E : \pi_k(X) \longrightarrow \pi_{k+1}(SX)$. L'homomorphisme de suspension se place dans la suite exacte

$$(1) \quad \cdots \longrightarrow \pi_{k+1}(\Omega SX , X) \longrightarrow \pi_k(X) \xrightarrow{E} \pi_{k+1}(SX) \longrightarrow \pi_k(\Omega SX , X) \longrightarrow \cdots$$

qui n'est autre que la suite exacte d'homotopie relative de l'espace $\Omega S(X)$ et de son sous-espace X .

Soit S_n la sphère de dimension n : ensemble des points $(x_o , x_1 , \ldots , x_n) \in R^{n+1}$ tels que $\sum_{i=0}^{n} (x_i)^2 = 1$; on prend pour point-base le point $x_o = 1$, $x_i = 0$ pour $i \geqslant 1$. La sphère S_o se compose des deux points $x_o = 1$ (point-base) et $x_0 = -1$. La sphère S_1 est connexe, et $\pi_1(S_1) \approx Z$; son revêtement simplement connexe est la droite réelle R, qui est contractile, d'où $\pi_i(S_1) = 0$ pour $i > 1$. Les sphères S_n, pour $n \geqslant 2$, sont connexes et simplement connexes ; on démontre classiquement, par décomposition de la sphère en deux hémisphères fermés dont l'intersection est un "équateur" (cf. par exemple [1]), que les groupes d'homologie à coefficients entiers sont $H_i(S_n) = 0$ pour $i > 0$, sauf pour $i = n$ auquel cas $H_n(S_n) = Z$ (pour $n \geqslant 1$).

On identifie la suspension $S(S_n)$ à la sphère S_{n+1} en envoyant le point $(t, x_0, \dots, x_n)$ (où $0 \leqslant t \leqslant 1$) dans le point de R^{n+2} ayant pour coordonnées

$$\cos^2 \pi t + x_0 \sin^2 \pi t \; , \quad x_1 \sin^2 \pi t \; , \; \dots \; , \; x_n \sin^2 \pi t \; , \; \sqrt{\frac{1-x_0}{2}} \sin 2\pi t \; .$$

Ceci définit bien un homéomorphisme de $S(S_n)$ sur S_{n+1}, qui envoie le point-base au point-base. Par récurrence, on obtient un homéomorphisme de S_n sur la suspension itérée $S^n(S_0)$.

Il est facile d'expliciter l'injection $S_n \longrightarrow \Omega(S_{n+1})$ déduite de l'identification de S_{n+1} avec $S(S_n)$.

Soit X un espace avec point-base. Le groupe d'homotopie $\pi_n(X)$ a été défini, dans l'exposé 1, comme le groupe (ensemble si $n = 0$) des classes d'applications $S_0 \longrightarrow \Omega^n(X)$, respectant les points-base. Ces classes sont en correspondance bijective avec les classes d'applications $S^n(S_0) \longrightarrow X$, c'est-à-dire (compte tenu de l'identification de $S^n(S_0)$ avec S_n), avec les classes d'applications $S_n \longrightarrow X$, respectant les points-base ; on retrouve ainsi la définition classique. Si on explicite la loi de composition de $\pi_n(X)$ pour $n \geqslant 1$, on constate ceci : si une application $h : S_n \longrightarrow X$ est constante sur l'équateur $x_n = 0$, égale à f sur l'hémisphère supérieur $x_n \geqslant 0$, et à g sur l'hémisphère inférieur $x_n \leqslant 0$, alors l'élément de $\pi_n(X)$ défini par h est égal au produit (dans cet ordre) de l'élément de $\pi_n(X)$ défini par f et de celui défini par g (f définit un élément de $\pi_n(X)$, car si on identifie entre eux tous les points de l'équateur, l'espace quotient est homéomorphe à

S_n , au moyen d'un homéomorphisme qu'on peut expliciter grâce à l'identification de S_n avec $S(S_{n-1})$; de même pour g) .

<u>Interprétation de la suspension</u> $\pi_n(X) \longrightarrow \pi_{n+1}(SX)$. - Soit $u \in \pi_n(X)$ defini par une application $f : S_n \longrightarrow X$; appliquons le foncteur "suspension" à f : on obtient $S(f) : S_{n+1} \longrightarrow S(X)$; la classe de $S(f)$ est un élément $v \in \pi_{n+1}(SX)$, qui n'est autre que

$$v = E(u) .$$

En effet, cela résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} S_n & \longrightarrow & \Omega(S_{n+1}) \\ f \big\downarrow & & \big\downarrow \Omega(Sf) \\ X & \longrightarrow & \Omega(SX) \end{array}$$

En particulier, prenons $X = S_n$, f étant l'identité ; alors $S(f)$ est l'application identique $S_{n+1} \longrightarrow S_{n+1}$. Or $\pi_n(S_n)$ est naturellement isomorphe à $H_n(S_n)$ d'après le théorème de Hurewicz (ou directement, pour $n = 1$) , c'est-à-dire est isomorphe à Z ; et il est engendré par l'élément $i_n \in \pi_n(S_n)$, classe de l'application identique $S_n \longrightarrow S_n$. Ce qui précède montre que

$$E(i_n) = i_{n+1} ,$$

et par suite la suspension $E : \pi_n(S_n) \longrightarrow \pi_{n+1}(S_{n+1})$ est un <u>isomorphisme</u>.

Pour interpréter les groupes d'homotopie <u>relatifs</u>, considérons une application $f : X \longrightarrow \Omega(Y , A , y_0)$, où A désigne un sous-espace de Y , y_0 un point de Y , et $\Omega(Y , A , y_0)$ l'espace des chemins de Y d'origine y_0 et d'extrémité dans A ; il est entendu que f envoie le point-base x_0 de X dans le lacet ponctuel $\tilde{y}_0$. La donnée de f équivaut à celle d'une application continue $g : I \times X \longrightarrow Y$ telle que

$$\begin{cases} g(0 , x) = g(t , x_0) = y_0 & \text{pour } x \in X , \quad t \in I , \\ g(1 , x) \in A & \text{pour } x \in X . \end{cases}$$

Introduisons l'espace $C(X)$ (cône de base X), quotient de $I \times X$ par identification en un seul point de $(\{0\} \times X) \cup (I \times \{x_0\})$; identifions X à un sous-espace de $C(X)$ en envoyant chaque point $x \in X$ en $(1, x)$. Alors on voit qu'on a une correspondance bijective, naturelle, entre les applications continues $X \longrightarrow \Omega(Y, A, y_0)$ et les applications continues du couple $(C(X), X)$ dans le couple (Y, A) (qui envoient le point-base de X dans celui de A). Ceci induit aussi une correspondance bijective entre les classes d'applications. L'espace X se plonge canoniquement dans $\Omega(C(X), X, x_0)$.

Lorsque $X = S_n$, on identifie $C(X)$ à l'hémisphère supérieur de S_{n+1} (X étant alors identifié à l'équateur de S_{n+1}) en envoyant le point $(t, x_0, \dots, x_n) \in I \times S_n$ dans le point de R^{n+2} ayant pour coordonnées

$$\cos^2 \frac{\pi t}{2} + x_0 \sin^2 \frac{\pi t}{2}, \; x_1 \sin^2 \frac{\pi t}{2}, \; \dots, \; x_n \sin^2 \frac{\pi t}{2}, \sqrt{\frac{1 - x_0}{2}} \sin \pi t .$$

On notera E^+_{n+1} cet hémisphère supérieur ; on voit que $\pi_{n+1}(Y, A)$ s'identifie à l'ensemble des classes d'applications de S_n dans $\Omega(Y, A, y_0)$, c'est-à-dire, en définitive, à l'ensemble des classes d'applications

$$(E^+_{n+1}, S_n) \longrightarrow (Y, A) .$$

On retrouve ainsi la définition classique des groupes d'homotopie relatifs. Alors l'homomorphisme

$$\partial : \pi_{n+1}(Y, A) \longrightarrow \pi_n(A)$$

de la suite exacte d'homotopie relative s'interprète comme suit (en remontant à la définition de ∂ donnée dans l'exposé 1, page 1-13, laquelle utilisait l'application fibrée $\Omega(Y, A, y_0) \longrightarrow A$) : soit $u \in \pi_{n+1}(Y, A)$ un élément défini par une application $f : S_n \longrightarrow \Omega(Y, A, y_0)$; composons cette application avec la projection $\Omega(Y, A, y_0) \longrightarrow A$; on obtient une application $h : S_n \longrightarrow A$ dont la classe est l'élément cherché ∂u. Or f définit, on vient de le voir, une application $g : (E^+_{n+1}, S_n) \longrightarrow (Y, A)$, et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S_n \longrightarrow \Omega(E^+_{n+1}, S_n, x_0) & \longrightarrow & S_n \\ \downarrow & & \downarrow g' \\ \Omega(Y, A, y_0) & \longrightarrow & A \end{array}$$

(où la composée des applications de la première ligne est l'identité) montre que $h : S_n \longrightarrow A$ n'est autre que la restriction g' de l'application g.

Si on revient à l'identification canonique de S_{n+1} avec $S(S_n)$, quotient de $I \times S_n$, on voit d'abord que S_1 s'identifie à un quotient de I, par la formule suivante : à $t \in I$, on associe le point de coordonnées

$$x_0 = \cos 2\pi t\ , \quad x_1 = \sin 2\pi t\ .$$

Par récurrence, on a une application continue de I^n sur S_n, dans laquelle l'image réciproque du point-base de S_n est la frontière J_{n-1} de I^n. La donnée d'un élément de $\pi_n(X)$ revient donc à celle d'une classe d'applications $I^n \longrightarrow X$ envoyant J_{n-1} au point-base. De la même manière, I^{n+1} s'envoie sur E^+_{n+1}, la frontière J_n s'envoyant sur S_n, et la donnée d'un élément de $\pi_{n+1}(X, A)$ revient à celle d'une classe d'applications $(I^{n+1}, J_n) \longrightarrow (X, A)$. Dans le groupe cyclique $\pi_{n+1}(I^{n+1}, J_n)$ (pour $n \geqslant 1$), on a un élément fondamental, celui dont l'image dans $\pi_{n+1}(E^+_{n+1}, S_n)$ a pour transformé par ∂ le générateur canonique de $\pi_n(S_n)$.

2. Le crochet de Whitehead.

Soient X et Y deux espaces avec points-base x_0 et y_0. La somme $X \vee Y$ est le quotient de la somme topologique $X \cup Y$ par la relation d'équivalence qui identifie x_0 et y_0 (la classe de x_0 et y_0 est alors le point-base de $X \vee Y$). On identifie X et Y à des sous-espaces de $X \vee Y$. La somme $X \vee Y$ se plonge canoniquement dans le produit $X \times Y$: on envoie $x \in X$ en (x, y_0), et $y \in Y$ en (x_0, y).

On va définir un élément fondamental $\star \in \pi_{p+q}(S_p \times S_q, S_p \vee S_q)$ (pour $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$). Pour cela, considérons les applications canoniques de I^p sur

S_p et de I^q sur S_q, ce qui définit (par produit) une application $f : I^{p+q} \longrightarrow S_p \times S_q$. Le bord J_{p+q-1} de I^{p+q} est la réunion de $J_{p-1} \times I^q$ et $I^p \times J_{q-1}$; donc f envoie J_{p+q-1} dans $S_p \vee S_q$, et par suite définit un élément de $\pi_{p+q}(S_p \times S_q, S_p \vee S_q)$: c'est l'élément α cherché. L'image de α par ∂ est l'élément $\beta \in \pi_{p+q-1}(S_p \vee S_q)$ défini par l'application de restriction $J_{p+q-1} \longrightarrow S_p \vee S_q$; on l'appelle aussi l'élément fondamental de $\pi_{p+q-1}(S_p \vee S_q)$.

PROPOSITION 1. - <u>L'homomorphisme naturel</u>

$$\pi_{p+q}(S_p \times S_q , S_p \vee S_q) \longrightarrow H_{p+q}(S_p \times S_q , S_p \vee S_q)$$

<u>envoie l'élément fondamental sur le générateur canonique de</u>

$$H_{p+q}(S_p \times S_q , S_p \vee S_q) \approx H_{p+q}(S_p \times S_q) \approx H_p(S_p) \otimes H_q(S_q) \approx Z .$$

Tout d'abord, les isomorphismes de l'énoncé sont évidents, compte tenu du fait que $H_i(S_p \vee S_q) = 0$ pour $i > \sup(p , q)$, car on voit tout de suite que $H_i(S_p \vee S_q) \approx H_i(S_p) \oplus H_i(S_q)$. D'autre part, l'image de α dans $H_{p+q}(S_p \times S_q , S_p \vee S_q)$ est l'image, par l'application naturelle

$$(I^{p+q} , J_{p+q-1}) \longrightarrow (S_p \times S_q , S_p \vee S_q) ,$$

de la classe fondamentale de

$$H_{p+q}(I^{p+q} , J_{p+q-1}) \approx H_{p+q-1}(J_{p+q-1}) \approx H_{p+q-1}(S_{p+q-1}) .$$

La proposition en résulte aussitôt.

REMARQUE. - Lorsque $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$, l'homomorphisme de la proposition 1 est un isomorphisme, en vertu du théorème de Hurewicz relatif (car alors $S_p \times S_q$ et $S_p \vee S_q$ sont simplement connexes). <u>Il n'en est plus de même</u> dès que l'un des entiers p ou q est égal à 1 . Par exemple, pour $p = q = 1$,

$$\pi_2(S_1 \times S_1 , S_1 \vee S_1)$$

est isomorphe au sous-groupe du <u>groupe libre</u> à deux générateurs, formé des produits dont la somme des exposants est nulle pour chacun des générateurs.

Soient maintenant $u \in \pi_p(X)$ et $v \in \pi_q(X)$ (avec $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$) : choisissons des applications $f : S_p \longrightarrow X$ et $g : S_q \longrightarrow X$ dans les classes de u et v respectivement, et considérons l'application $f \vee g : S_p \vee S_q \longrightarrow X$. Sa classe ne dépend évidemment que des classes u et v ; d'où un homomorphisme bien déterminé

$$\pi_{p+q-1}(S_p \vee S_q) \longrightarrow \pi_{p+q-1}(X).$$

Le crochet de Whitehead $[u , v] \in \pi_{p+q-1}(X)$ est, par définition, l'image de la classe fondamentale β . On vérifie facilement qu'il est additif en u , et additif en v ; et que

$$[v , u] = (-1)^{pq} [u , v]$$

(regarder l'effet d'une permutation sur les facteurs de I^{p+q}) .

PROPOSITION 2. - <u>Pour que l'application</u> $f \vee g : S_p \vee S_q \longrightarrow X$ <u>soit prolongeable en une application</u> $S_p \times S_q \longrightarrow X$, <u>il faut et il suffit que</u> $[u , v] = 0$, u <u>et</u> v <u>désignant les classes des applications</u> f <u>et</u> g .

En effet, $[u , v]$ est défini par l'application composée

$$J_{p+q-1} \longrightarrow S_p \vee S_q \xrightarrow{f \vee g} X ;$$

elle est homotope à une application constante si et seulement si elle peut se prolonger en une application $I^{p+q} \longrightarrow X$, et celle-ci, étant constante sur les fibres de l'application $I^{p+q} \longrightarrow S_p \times S_q$, passe au quotient et donne une application $S_p \times S_q \longrightarrow X$ qui prolonge $f \vee g$.

PROPOSITION 3. - <u>Pour que la sphère</u> S_n <u>puisse être munie d'une structure de H-espace, il faut et il suffit que</u> $[i_n , i_n] = 0$, i_n <u>désignant le générateur</u>

<u>canonique de $\pi_n(S_n)$</u> .

<u>Démonstration</u>. - Rappelons qu'une structure de H-espace, sur un espace X avec point-base x_o , est la donnée d'une application continue $f : X \times X \longrightarrow X$ telle que $f(x_o , x_o) = x_o$, et satisfaisant à la condition suivante : chacune des applications $x \longrightarrow f(x , x_o)$ et $x \longrightarrow f(x_o , x)$ est homotope à l'identité. Notons f_1 et f_2 ces applications $X \longrightarrow X$.

Si la sphère S_n possède une structure de H-espace, f_1 et f_2 sont des applications de degré 1 (c'est-à-dire définissant l'homomorphisme identique de $\pi_n(S_n)$). Puisque l'application $f_1 \vee f_2$ de $S_n \vee S_n$ dans S_n est prolongeable à $S_n \times S_n$, la proposition 2 dit que $[i_n , i_n] = 0$. Réciproquement si cette condition est réalisée, alors l'application $S_n \vee S_n \longrightarrow S_n$, égale à l'identité sur chacun des facteurs S_n , est prolongeable ; autrement dit, il existe une loi de composition $S_n \times S_n \longrightarrow S_n$ pour laquelle x_o <u>est élément neutre</u>.

Dans ce qui suit, on va relier l'existence d'une telle structure à d'autres propriétés de l'entier n. Annonçons tout de suite le résultat récent, dû à ADAMS : <u>il n'y a que pour</u> $n = 1$, 3 <u>ou</u> 7 <u>que</u> S_n <u>peut être munie d'une structure de H-espace</u>.

Revenons au crochet de Whitehead. On aura besoin de deux lemmes de caractère technique.

Soient $u \in \pi_{p+1}(X)$, $v \in \pi_{q+1}(X)$, et soient $u' \in \pi_p(\Omega X)$, $v' \in \pi_q(\Omega X)$ les éléments qui leur correspondent canoniquement. Définissons $\{u' , v'\} \in \pi_{p+q}(\Omega X)$ comme suit : on choisit $f : S_p \longrightarrow \Omega(X)$ et $g : S_q \longrightarrow \Omega(X)$ dans les classes de u' et v' ; on définit $h : S_p \times S_q \longrightarrow \Omega(X)$ en envoyant le point (x , y) dans le produit $f(x)\, g(y)\, \overline{f(x)}\, \overline{g(y)}$, où $\overline{f(x)}$ et $\overline{g(y)}$ désignent les lacets opposés à $f(x)$ et $g(y)$ respectivement ; la multiplication précédente est entendue au sens de la composition des lacets, et présente une certaine indétermination à cause de la non-associativité de cette composition, mais cela n'a pas d'importance puisque la loi de composition est "presque associative" (cf. Exposé 1 , paragraphe 4).

On pourrait par exemple lever l'indétermination en partageant l'intervalle $I = [0 , 1]$ en 4 parties égales, chaque quart correspondant à l'un des quatre lacets dont il s'agit de prendre le produit.

Lorsque le point (x , y) est dans $S_p \vee S_q$ (donc $y = y_0$ ou $x = x_0$), le point $h(x , y)$ est dans le sous-espace $\Omega_0(X)$ formé des lacets de la forme $t\bar{t}$ (t désignant un chemin dont l'origine est au point-base), et ce sous-espace est évidemment contractile. En composant

$$h_* : \pi_{p+q}(S_p \times S_q , S_p \vee S_q) \longrightarrow \pi_{p+q}(\Omega, \Omega_0)$$

avec l'isomorphisme réciproque de l'isomorphisme $\pi_{p+q}(\Omega) \longrightarrow \pi_{p+q}(\Omega, \Omega_0)$, on obtient un homomorphisme

$$\pi_{p+q}(S_p \times S_q , S_p \vee S_q) \longrightarrow \pi_{p+q}(\Omega(X))$$

défini par l'application h ; l'image, par cet homomorphisme, de l'élément fondamental $\alpha \in \pi_{p+q}(S_p \times S_q , S_p \vee S_q)$, est un élément qui ne dépend pas des choix de f et g dans les classes de $u' \in \pi_p(\Omega(X))$ et $v' \in \pi_q(\Omega(X))$. On le note $\{u' , v'\}$.

LEMME 1. - <u>Avec les notations précédentes, soit</u> w <u>l'élément de</u> $\pi_{p+q+1}(X)$ <u>qui correspond canoniquement à</u> $\{u' , v'\} \in \pi_{p+q}(\Omega(X))$. <u>On a</u>

(2) $$w = (-1)^p [u , v] .$$

Nous ne démontrerons pas ce lemme, qui nécessite seulement quelques constructions géométriques un peu fastidieuses (cf. [4]).

D'autre part, la loi de composition de l'espace $\Omega(X)$ définit une multiplication dans l'homologie $H_*(\Omega(X))$ à coefficients entiers ; $H_*(\Omega(X))$ est ainsi une <u>algèbre graduée</u>, le produit d'un élément de degré p et d'un élément de degré q étant un élément de degré $p + q$; c'est une algèbre associative à élément unité (de degré 0). Rappelons que, dans une algèbre graduée, on définit le <u>crochet</u> (gradué) de deux éléments α et β, de degrés p et q, en posant :

$$[\alpha , \beta] = \alpha\beta - (-1)^{pq}\beta\alpha .$$

Notons φ l'homomorphisme de Hurewicz : $\pi_i(Y\,,\,Y') \longrightarrow H_i(Y\,,\,Y')$.

LEMME 2. - u' <u>et</u> v' <u>ayant la même signification que ci-dessus, on a, lorsque</u> p <u>et</u> q <u>sont</u> > 0 ,

(3) $\quad \varphi\{u'\,,\,v'\} = [\,\varphi(u')\,,\,\varphi(v')\,]$ (crochet gradué dans $H_*(\Omega(X))$) .

DÉMONSTRATION. - Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\pi_{p+q}(S_p \times S_q\,,\,S_p \vee S_q) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & H_{p+q}(S_p \times S_q\,,\,S_p \vee S_q) \arrow[d] & \\
\pi_{p+q}(\Omega\,,\,\Omega_o) \arrow[r, "\varphi"] & H_{p+q}(\Omega\,,\,\Omega_o) & H_{p+q}(S_p \times S_q) \arrow[ul, "\approx"'] \arrow[dl, "h_*"] \\
\pi_{p+q}(\Omega) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[u, "\approx"] & H_{p+q}(\Omega) \arrow[u, "\approx"] &
\end{tikzcd}$$

Compte tenu de la proposition 1 , ce diagramme montre que $\varphi\{u'\,,\,v'\}$ est l'image, dans $H_{p+q}(\Omega(X))$, de la classe fondamentale de

$$H_{p+q}(S_p \times S_q) \approx H_p(S_p) \otimes H_q(S_q) \ ,$$

par l'application h_* définie par h . Or l'application h est la composée

$$S_p \times S_q \xrightarrow{\lambda} (\Omega \times \Omega) \times (\Omega \times \Omega) \xrightarrow{\mu} \Omega \times \Omega \times \Omega \times \Omega \xrightarrow{\rho} \Omega \ ,$$

où λ envoie $(x\,,\,y)$ dans $(f(x)\,,\,\overline{f(x)}\,,\,g(y)\,,\,\overline{g(y)})$, et où μ envoie le point $(\omega_1\,,\,\omega_2\,,\,\omega_3\,,\,\omega_4)$ dans $(\omega_1\,,\,\omega_3\,,\,\omega_2\,,\,\omega_4)$; ρ est définie par la composition dans l'espace Ω . De plus, λ est le produit $\lambda_1 \times \lambda_2$ des applications λ_1 et λ_2 , respectivement composées de

$$S_p \xrightarrow{\Delta_p} S_p \times S_p \xrightarrow{f \times f} \Omega \times \Omega \xrightarrow{1 \times \varepsilon} \Omega \times \Omega \ ,$$

$$S_q \xrightarrow{\Delta_q} S_q \times S_q \xrightarrow{g \times g} \Omega \times \Omega \xrightarrow{1 \times \varepsilon} \Omega \times \Omega \ ,$$

où Δ_p et Δ_q désignent les applications diagonales, ε envoyant ω dans $\overline{\omega}$. L'application f_* : $H_p(S_p) \longrightarrow H_p(\Omega)$ envoie le générateur de $H_p(S_p)$ précisément dans $\varphi(u')$, qu'on notera a pour abréger. De même, on écrira b au lieu de $\varphi(v')$. L'application ξ transforme a en $-a$, car $\xi \circ f : S_p \longrightarrow \Omega$ est composée d'un automorphisme de S_p, qui change l'orientation, et de f ; de même, ξ transforme b en $-b$.

L'application composée λ_1 définit un homomorphisme

$$H_p(S_p) \longrightarrow \sum_{i+j=p} H_i(\Omega) \otimes H_j(\Omega) ,$$

qui, d'après ce qui précède, envoie le générateur de $H_p(S_p)$ dans l'élément $a \otimes 1 - 1 \otimes a$. De même, λ_2 définit un homomorphisme qui envoie le générateur de $H_q(S_q)$ dans $b \otimes 1 - 1 \otimes b$. Considérons alors l'homomorphisme

$$H_{p+q}(S_p \times S_q) \longrightarrow \sum_{i+j+k+h=p+q} H_i(\Omega) \otimes H_j(\Omega) \otimes H_k(\Omega) \otimes H_h(\Omega)$$

définie par l'application $\lambda = \lambda_1 \times \lambda_2$; il envoie le générateur de $H_{p+q}(S_p \times S_q)$ dans l'élément

$$a \otimes 1 \otimes b \otimes 1 - a \otimes 1 \otimes 1 \otimes b - 1 \otimes a \otimes b \otimes 1 + 1 \otimes a \otimes 1 \otimes b .$$

Composons avec μ_*, qui échange le deuxième et le troisième facteur (mais on doit tenir compte de la "règle des signes" en homologie) ; on obtient l'élément

$$a \otimes b \otimes 1 \otimes 1 - a \otimes 1 \otimes 1 \otimes b - (-1)^{pq}\, 1 \otimes b \otimes a \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes a \otimes b .$$

Ensuite, ρ_* transforme chacun de ces termes dans le produit de ses facteurs, et on obtient l'élément suivant de $H_{p+q}(\Omega)$:

$$ab - ab - (-1)^{pq}\, ba + ab ,$$

qui est bien égal au "crochet gradué" de a et b. Ceci achève la démonstration.

3. L'invariant de Hopf.

Appliquons la suite exacte (1) (paragraphe 1) dans le cas où X est la sphère S_n ; on obtient la suite exacte que voici :

$$(4) \quad \dots \to \pi_k(S_n) \xrightarrow{E} \pi_{k+1}(S_{n+1}) \xrightarrow{H} \pi_k(\Omega(S_{n+1}), S_n) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(S_n) \xrightarrow{E} \pi_k(S_{n+1}) \to \dots$$

H est l'homomorphisme de Hopf (généralisé). On va calculer les $\pi_k(\Omega(S_{n+1}), S_n)$, au moins pour les petites valeurs de k. Pour cela, supposons d'abord $n \geqslant 2$; alors S_n et $\Omega(S_{n+1})$ sont simplement connexes, ce qui permet d'appliquer le théorème de Hurewicz relatif (Exposé 4). On va calculer d'abord les groupes d'homologie relatifs $H_k(\Omega(S_{n+1}), S_n)$, grâce à la suite exacte d'homologie

$$(5) \longrightarrow H_k(\Omega(S_{n+1})) \longrightarrow H_k(\Omega(S_{n+1}), S_n) \longrightarrow H_{k-1}(S_n) \longrightarrow H_{k-1}(\Omega(S_{n+1})) \longrightarrow$$

Rappelons (Exposé 3) que $H_*(\Omega(S_{n+1}))$ est une algèbre graduée, et que c'est une algèbre de polynômes à un générateur $u \in H_n(\Omega(S_{n+1}))$; on a donc $\pi_i(\Omega(S_{n+1})) = 0$ pour $i < n$, et $\pi_n(\Omega(S_{n+1})) \approx Z$; de plus l'injection canonique $S_n \longrightarrow \Omega(S_{n+1})$, qui induit un isomorphisme $\pi_n(S_n) \longrightarrow \pi_n(\Omega(S_{n+1}))$ (cf. ci-dessus, n° 1), induit donc un isomorphisme $H_n(S_n) \longrightarrow H_n(\Omega(S_{n+1}))$. Alors la suite exacte (5) montre que $H_i(\Omega(S_{n+1}), S_n) = 0$ pour $0 < i < 2n$, tandis que

$$H_{2n}(\Omega(S_{n+1}), S_n) \approx H_{2n}(\Omega(S_{n+1})) \approx Z .$$

Par le théorème de Hurewicz relatif, on a donc

$$(6) \qquad \pi_i(\Omega(S_{n+1}), S_n) = 0 \quad \text{pour} \quad i < 2n, \quad \pi_{2n}(\Omega(S_{n+1}), S_n) \approx Z ,$$

ce dernier isomorphisme étant défini sans ambiguité de signe, car

$$H_{2n}(\Omega(S_{n+1}), S_n) \approx H_{2n}(\Omega(S_{n+1}))$$

a un générateur canonique, à savoir le carré u^2. Pour $k = 2n$, H est donc un homomorphisme $\pi_{2n+1}(S_{n+1}) \longrightarrow Z$; si $\xi \in \pi_{2n+1}(S_{n+1})$, l'entier $H(\xi)$ s'appelle l'invariant de Hopf de ξ, ou de toute application $S_{2n+1} \longrightarrow S_{n+1}$ située dans la classe de ξ. Compte tenu de l'exactitude de la suite (4), on a établi le résultat suivant :

THÉORÈME 1 (FREUDENTHAL). - *Si $n \geqslant 2$, la suspension $E : \pi_k(S_n) \longrightarrow \pi_{k+1}(S_{n+1})$ est un isomorphisme pour $k \leqslant 2n - 2$, et est surjective pour $k = 2n - 1$. L'image de $E : \pi_{2n}(S_n) \longrightarrow \pi_{2n+1}(S_{n+1})$ est égale au noyau de l'homomorphisme de Hopf :*

$$H : \pi_{2n+1}(S_{n+1}) \longrightarrow Z .$$

On s'intéresse particulièrement au diagramme commutatif suivant (dont la première ligne est extraite de la suite exacte (4))

$$(7) \quad \begin{array}{ccccccccc} \pi_{2n}(S_n) & \xrightarrow{E} & \pi_{2n+1}(S_{n+1}) & \xrightarrow{H} & \pi_{2n}(\Omega(S_{n+1}), S_n) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{2n-1}(S_n) & \xrightarrow{E} & \pi_{2n}(S_{n+1}) \\ & & \downarrow & & \downarrow\approx & & & & \\ & & H_{2n}(\Omega(S_{n+1})) & \xrightarrow{\approx} & H_{2n}(\Omega(S_{n+1}), S_n) & & & & \end{array}$$

Les flèches verticales sont les homomorphismes de Hurewicz. On va maintenant montrer que les isomorphismes de ce diagramme sont aussi valables pour $n = 1$: tout d'abord, $H_2(\Omega(S_2)) \longrightarrow H_2(\Omega(S_2), S_1)$ est un isomorphisme à cause de la suite exacte d'homologie de l'espace $\Omega(S_2)$ et de son sous-espace S_1, parce que l'application $H_1(S_1) \longrightarrow H_1(\Omega(S_2))$ est un isomorphisme (en effet, on a vu que $\pi_1(S_1) \longrightarrow \pi_1(\Omega(S_2))$ est un isomorphisme, et d'autre part les homomorphismes de Hurewicz $\pi_1(S_1) \longrightarrow H_1(S_1)$ et $\pi_1(\Omega(S_2)) \longrightarrow H_1(\Omega(S_2))$ sont des isomorphismes, puisque les groupes fondamentaux sont abéliens). D'autre part, ∂ est nul pour $n = 1$, puisque $\pi_1(S_1) \longrightarrow \pi_2(S_2)$ est un isomorphisme ; et H est un isomorphisme, puisque $\pi_2(S_1) = 0$. On va montrer que l'homomorphisme de Hurewicz $\pi_3(S_2) \longrightarrow H_2(\Omega(S_2))$ est un isomorphisme, ce qui fournira un isomorphisme canonique de $\pi_3(S_2)$ sur Z (puisque $H_2(\Omega(S_2))$ possède un générateur canonique, à savoir le carré du générateur de degré 1).

Pour cela, considérons le classique fibré de Hopf : S_3 est fibrée de base S_2, de fibre S_1. Il en resulte (cf. Exposé 1, page 1-07) l'existence d'un fibré X de base S_1, de fibre $\Omega(S_3)$, avec une application $X \longrightarrow \Omega(S_2)$ qui définit un isomorphisme des groupes d'homotopie et d'homologie ; l'application composée de l'injection $\Omega(S_3) \longrightarrow X$ et de $X \longrightarrow \Omega(S_2)$ n'est autre que l'application induite par la fibration de Hopf $S_3 \longrightarrow S_2$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \pi_2(\Omega(S_3)) & \xrightarrow{\approx} & \pi_2(X) & \xrightarrow{\approx} & \pi_2(\Omega(S_2)) \\ f\downarrow & & \downarrow g & & \downarrow h \\ H_2(\Omega(S_3)) & \longrightarrow & H_2(X) & \xrightarrow{\approx} & H_2(\Omega(S_2)) \end{array}$$

où f, g, h désignent les homomorphismes de Hurewicz ; f est un isomorphisme parce que $\Omega(S_3)$ est simplement connexe. On veut montrer que h est un isomorphisme ; il suffit pour cela de montrer que g est un isomorphisme, et pour cela de montrer que $H_2(\Omega(S_3)) \longrightarrow H_2(X)$ est un isomorphisme (l'isomorphisme $\pi_2(\Omega(S_3)) \approx \pi_2(X)$ résulte de la suite exacte d'homotopie du fibré). Considérons la suite spectrale du fibré, dont le terme $E^2_{p,q}$ est $H_p(S_1, H_q(\Omega(S_3)))$, l'homologie étant prise sur S_1 avec coefficients dans le système local de l'homologie de la fibre. On a $E^2_{p,q} = 0$ sauf si $p = 0$ ou $p = 1$, donc toutes les différentielles de la suite spectrale sont nulles, et on trouve donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow H_0(S_1, H_2(\Omega(S_3)) \longrightarrow H_2(X) \longrightarrow H_1(S_1, H_1(\Omega(S_3)) \longrightarrow 0 .$$

Or $H_1(\Omega(S_3)) = 0$, d'où l'isomorphisme $H_2(\Omega(S_3)) \approx H_2(X)$ défini par l'injection de la fibre dans le fibré X. Ceci achève la démonstration.

Ainsi nous avons prouvé que tous les isomorphismes du diagramme (7) sont valables même pour $n = 1$.

THÉORÈME 2. - Pour n impair, on a

$H[i_{n+1}, i_{n+1}] = -2$ (c'est-à-dire -2 fois le générateur canonique de Z).

DÉMONSTRATION. - On cherche l'image de $[i_{n+1}, i_{n+1}] \in \pi_{2n+1}(S_{n+1})$ dans $H_{2n}(\Omega(S_{n+1}))$ par l'homomorphisme de Hurewicz. D'après les lemmes 1 et 2, cette image est opposée au "crochet gradué" de α par lui-même, α désignant l'élément de $H_n(\Omega(S_{n+1}))$, image du générateur de $H_n(S_n)$ par l'injection $S_n \longrightarrow \Omega(S_{n+1}))$. Donc α est un générateur du groupe $H_n(\Omega(S_{n+1})) \approx \mathbf{Z}$, et comme n est impair, le crochet gradué de α avec α est $2\alpha^2$; or α^2 est le générateur de $H_{2n}(\Omega(S_{n+1}))$.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 3. - Dans le diagramme (7), l'image de ∂, qui est aussi le noyau de la suspension $E : \pi_{2n-1}(S_n) \longrightarrow \pi_{2n}(S_{n+1})$, est le sous-groupe engendré par $[i_n, i_n]$.

DÉMONSTRATION. - C'est vrai pour $n = 1$, car on sait que $[i_1, i_1] = 0$, puisque la sphère S_1 est un H-espace (cf. proposition 3). Supposons donc

$n \geq 2$. Considérons l'injection $j : S_n \longrightarrow \Omega(S_{n+1})$, et l'application

$$f : S_n \times S_n \longrightarrow \Omega(S_{n+1})$$

qui envoie un point (x , y) dans le produit $j(x).j(y)$ (au sens de la composition des lacets). Soit x_o le point-base de S_n ; $j(x_o)$ est l'élément neutre e de $\Omega(S_{n+1})$; donc les applications $x \longrightarrow f(x_o , x)$ et $x \longrightarrow f(x , x_o)$ de S_n dans $\Omega(S_{n+1})$ sont homotopes à j ; on peut donc déformer la restriction de f à $S_n \times S_n$ en une application g telle que $g(x_o , x) = g(x , x_o) = j(x)$ pour tout $x \in S_n$; cette déformation, d'après un théorème classique, est prolongeable en une déformation de f en une application $S_n \times S_n \longrightarrow \Omega(S_{n+1})$, qui prolonge g , et qu'on notera encore g . Dans $S_n \times S_n$, identifions le point (x_o , x) et le point (x , x_o) ; soit X l'espace quotient ; l'image de $S_n \vee S_n$ dans X est une sphère S_n , dont le complémentaire, homéomorphe à $S_n \times S_n - S_n \vee S_n$, est une boule ouverte de dimension $2n$. L'application g passe au quotient et définit une application $h : X \longrightarrow \Omega(S_{n+1})$.

Il est clair que X s'obtient en attachant une boule fermée B_{2n} à la sphère S_n au moyen d'une application de la frontière S_{2n-1} dans S_n ; l'élément de $\pi_{2n-1}(S_n)$ défini par cette application est $[i_n , i_n]$, d'après la définition même du crochet de Whitehead.

Or l'homologie de X se calcule facilement (il en est ainsi chaque fois qu'on attache une boule fermée à une sphère) : $H_i(X) = 0$, sauf pour $i = 0 , n$ et $2n$, ces trois groupes étant isomorphes à Z . D'une façon precise, $H_n(S_n) \longrightarrow H_n(X)$ defini par l'injection est un isomorphisme, et

$$H_{2n}(B_{2n} , S_{2n-1}) \longrightarrow H_{2n}(X , S_n) \longleftarrow H_{2n}(X)$$

sont des isomorphismes.

Montrons que $h : X \longrightarrow \Omega(S_{n+1})$ définit des isomorphismes $H_n(X) \longrightarrow H_n(\Omega(S_{n+1}))$ et $H_{2n}(X) \longrightarrow H_{2n}(\Omega(S_{n+1}))$, d'où il résultera que $h_* : H_i(X) \longrightarrow H_i(\Omega(S_{n+1}))$ est un isomorphisme pour $i \leq 3n - 1$, donc que h induit des isomorphismes

$\pi_i(X) \approx \pi_i(\Omega(S_{n+1}))$ pour $i \leq 3n-1$. Que $h_n : H_n(X) \longrightarrow H_n(\Omega(S_{n+1}))$ soit un isomorphisme résulte du fait que la restriction de h au sous-espace S_n de X n'est autre que l'injection canonique $j : S_n \longrightarrow \Omega(S_{n+1}))$. D'autre part, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H_{2n}(S_n \times S_n) \approx H_{2n}(S_n \times S_n , S_n \vee S_n) \arrow[d, "f_{2n}"] & & H_{2n}(S_n \times S_n , S_n \vee S_n) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "g_{2n}"] & H_{2n}(X , S_n) \approx H_{2n}(X) \arrow[dl, "h_{2n}"] \arrow[d, "h_{2n}"] \\
H_{2n}(\Omega(S_{n+1})) \approx H_{2n}(\Omega(S_{n+1}) , S_n) & & H_{2n}(\Omega(S_{n+1}) , S_n) & H_{2n}(\Omega(S_{n+1})) \arrow[l, "\approx"']
\end{tikzcd}$$

montre que h_{2n} est un isomorphisme si f_{2n} en est un ; or c'est bien le cas puisque l'élément $\alpha \otimes \alpha \in H_{2n}(S_n \times S_n)$, où α désigne le générateur de $H_n(S_n)$, est envoyé par f_{2n} dans le carré du générateur de $H_{2n}(\Omega(S_{n+1})) \approx Z$, à cause de la définition même de l'application f.

La suite exacte d'homotopie du couple (X , S_n) et celle du couple $(\Omega(S_{n+1}) , S_n)$ sont donc isomorphes par l'application h, pour les dimensions $\leq 3n-1$; il en résulte notamment que l'image de $\partial : \pi_{2n}(\Omega(S_{n+1}) , S_n) \longrightarrow \pi_{2n-1}(S_n)$, est la même que l'image de $\partial : \pi_{2n}(X , S_n) \longrightarrow \pi_{2n-1}(S_n)$, c'est-à-dire est engendrée par $[i_n , i_n]$, d'après la construction même de l'espace X. Ceci achève la démonstration du théorème 3.

On aura besoin plus tard de connaître le cup-produit dans la cohomologie (à coefficients entiers) de l'espace X, obtenu en attachant une boule B_{2n} à S_n au moyen de l'élément $[i_n , i_n] \in \pi_{2n-1}(S_n)$:

PROPOSITION 4. - <u>Le cup-carré du générateur de</u> $H^n(X) \approx Z$ <u>est égal à 2 fois le générateur canonique de</u> $H^{2n}(X)$ <u>si</u> n <u>est pair, et à</u> 0 <u>si</u> n <u>est impair.</u>

DÉMONSTRATION. - Puisque $h_i : H_i(X) \longrightarrow H_i(\Omega(S_{n+1}))$ est un isomorphisme $i \leq 3n-1$, $h^i : H^i(\Omega(S_{n+1})) \longrightarrow H^i(X)$ est aussi un isomorphisme pour $i \leq 3n-1$. Il suffit donc de montrer que le cup-carré du générateur de

$H^n(\Omega(S_{n+1}))$ est égal à 2 fois le générateur de $H^{2n}(\Omega(S_{n+1}))$, si n est pair, et est nul si n est impair. Ce cup-carré se calcule à l'aide de l'application diagonale $\Omega(S_{n+1}) \longrightarrow \Omega(S_{n+1}) \times \Omega(S_{n+1})$, qui définit un homomorphisme des <u>algèbres</u> d'homologie

$$H_*(\Omega(S_{n+1})) \longrightarrow H_*(\Omega(S_{n+1})) \otimes H_*(\Omega(S_{n+1})) ,$$

le second membre étant le produit tensoriel "gauche" de deux algèbres graduées. On sait que $H_*(\Omega(S_{n+1}))$ est une algèbre de polynômes à un générateur u de degré n ; l'application diagonale envoie u dans $u \otimes 1 + 1 \otimes u$, donc envoie u^2 dans

$$(u \otimes 1 + 1 \otimes u)(u \otimes 1 + 1 \otimes u) ,$$

qui est égal à $u^2 \otimes 1 + 1 \otimes u^2$ si n est impair, et à

$$u^2 \otimes 1 + 2\, u \otimes u + 1 \otimes u^2$$

si n est pair. Par dualité, on obtient la multiplication en cohomologie, d'où le résultat annoncé ; ce résultat est d'ailleurs classique (algèbre de cohomologie de l'espace des lacets d'une sphère).

4. <u>Conséquences des théorèmes 2 et 3</u> .

<u>Premier cas</u> : n <u>impair</u>. - Alors $[i_{n+1} , i_{n+1}]$ est un élément d'ordre infini de $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$, d'après le théorème 2 ; donc $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$ contient un sous-groupe isomorphe à Z . Le théorème 2 implique aussi que l'image de H est soit Z tout entier, soit $2Z$ (sous-groupe des entiers pairs). D'après la suite exacte (7) , il s'ensuit que l'image de ∂ est 0 ou isomorphe à Z_2 (groupe des entiers modulo 2). Donc (théorème 3) , $[i_n , i_n]$ est nul ou est un élément d'ordre 2 de $\pi_{2n-1}(S_n)$.

<u>Deuxième cas</u> : n <u>pair</u>. - Puisque $[i_n , i_n]$ est un élément d'ordre infini de $\pi_{2n-1}(S_n)$ (cf. ci-dessus), l'image de ∂ , dans le diagramme (7), est isomorphe à Z ; c'est le noyau de la suspension $E : \pi_{2n-1}(S_n) \longrightarrow \pi_{2n}(S_{n+1})$. Le noyau de ∂ est nul, et par suite $H : \pi_{2n+1}(S_{n+1}) \longrightarrow Z$ est nul. Donc la suspension $E : \pi_{2n}(S_n) \longrightarrow \pi_{2n+1}(S_{n+1})$ est surjective (cf. théorème 1).

De là, et de la proposition 3, résulte le :

THÉORÈME 4. - Les conditions suivantes, pour un entier n, sont équivalentes :

(i) $[i_n , i_n] = 0$;

(ii) la sphère S_n peut être munie d'une structure de H-espace ;

(iii) l'homomorphisme $H : \pi_{2n+1}(S_{n+1}) \longrightarrow Z$ est surjectif ;

(iv) la suspension $E : \pi_{2n-1}(S_n) \longrightarrow \pi_{2n}(S_{n+1})$ est injective (donc bijective, cf. théorème 1).

De tels entiers n sont nécessairement impairs.

DÉFINITION. - Un entier n qui satisfait aux conditions du théorème 4 sera dit exceptionnel. Les entiers 1, 3 et 7 sont exceptionnels, comme le montrent respectivement la multiplication des nombres complexes de norme 1, des quaternions de norme 1, des octaves de norme 1. On démontrera plus tard qu'il n'y en a pas d'autre (J. F. ADAMS).

BIBLIOGRAPHIE

[1] EILENBERG (S.) and STEENROD (N. E.). - Foundations of algebraic topology. - Princeton, Princeton University Press, 1952 (Princeton mathematical Series, 15).

[2] KAN (D. M.). - Adjoint functors, Trans. Amer. math. Soc., t. 87, 1958, p. 294-329.

[3] MOORE (J. C.). - Le théorème de Freudenthal, la suite exacte de James et l'invariant de Hopf généralisé, Séminaire Cartan, t. 7, 1954/55 : Algèbres d'Eilenberg-Maclane et homotopie, exposé 22.

[4] SAMELSON (Hans). - A connection between the Whitehead and the Pontryagin product, Amer. J. Math., t. 75, 1953, p. 744-752.

[5] WHITEHEAD (George W.). - Generalization of the Hopf invariant, Annals of Math., Series 2, t. 51, 1950, p. 192-237.