SÉMINAIRE HENRI CARTAN

ADRIEN DOUADY

La suite spectrale des espaces fibrés

Séminaire Henri Cartan, tome 11, nº 1 (1958-1959), exp. nº 2, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_1_A2_0>

LA SUITE SPECTRALE DES ESPACES FIBRÉS

par Adrien DOUADY

[Cet exposé se borne à rappeler des résultats].

Dans tout l'exposé, (X, P, B) sera un fibré au sens de SERRE. On posera $F_b = P^{-1}(b)$ pour $b \in B$, et on l'appellera <u>fibre</u> en b. On notera $\mathfrak{F}$ la famille $(F_b)_{b \in B}$, et on en parlera comme de "la fibre". Si on prend dans B un point de base b_0, on écrira F_0 au lieu de F_{b_0}. On désigne par A un anneau commutatif à élément unité, et par M un A-module unitaire.

1. <u>Système local de A-modules sur un espace</u> E.

DÉFINITION. - On appelle ainsi un foncteur covariant $\mathcal{G}$ de la catégorie des points et classes de chemins de E dans une catégorie de A-modules et homomorphismes. Comme toute classe de chemins admet un inverse, les homomorphismes qui leur correspondent sont des isomorphismes.

Le système sera dit constant si le foncteur se factorise par la catégorie des points et paires de points de E.

Si E est connexe par arcs, et muni d'un point de base e_0, la donnée d'un système local $\mathcal{G}$ est équivalente à celle d'un A-module G_0 et d'une représentation de $\pi_1(E, e_0)$ dans le groupe des automorphismes de G_0. Le système est alors constant si π_1 opère trivialement. C'est toujours le cas si E est simplement connexe.

EXEMPLE. - Soit M un A-module, et soit $P : X \to B$ un fibré au sens de SERRE. On peut associer à tout chemin c de B un homomorphisme

$$c_* : H_*(F_{c(0)}, M) \to H_*(F_{c(1)}, M)$$

en procédant en gros de la façon suivante : On construit une fonction h, qui, à tout n-simplexe singulier $s : \Delta_n \to F_{c(0)}$, fasse correspondre une application continue $h(s) : I \times \Delta_n \to X$ telle que :

1° $h(s)(0, d) = s(d)$

2° $P \circ h(s)(t, d) = c(t)$

3° $h(s) \circ (1 \times f_i) = h(s \circ f_i)$

si f_i est l'injection de Δ_{n-1} dans Δ_n comme i-ième face.

On définit h d'abord sur tous les 0-simplexes, puis sur tous les 1-simplexes, etc.; quand on l'a définie pour tous les $(n-1)$-simplexes, la définir pour un n-simplexe n'est qu'une question de relever une homotopie de $P \circ s$ déjà relevée sur le bord de s, ce qui est possible dans un fibré de Serre. En posant $h_1(s)(d) = h(s)(1, d)$, h_1 est une application de l'ensemble $S F_{c(0)}$ des simplexes singuliers de $F_{c(0)}$ dans $S F_{c(1)}$, qui commute avec les faces et définit un homomorphisme de chaînes : $C_*(F_{c(0)}, M) \longrightarrow C_*(F_{c(1)}, M)$, qui commute avec d, et que nous noterons aussi h_s. Si h' est une autre fonction satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3° relativement à un chemin c' homotope à c, on peut montrer que h_1 et h'_1 sont homotopes.

On en déduit que l'homomorphisme induit sur l'homologie ne dépend que de la classe du chemin c. La fonctorialité va de soi. Le système local ainsi défini sera appelé "système local de l'homologie de la fibre" et noté $\mathcal{H}_*(\mathcal{F}, M)$.

2. <u>Homologie singulière à coefficients dans un système local</u>. - Choisissons dans chaque simplexe canonique Δ_n un point 0_n. Pour tout n-simplexe singulier $s : \Delta_n \longrightarrow E$, posons $G_s = G_{s(0_n)}$, et $C_n(E, \mathcal{G}) = \bigoplus_{s \in S_n(E)} G_s$. Définissons $d : C_n(E, \mathcal{G}) \to C_{n-1}(E, \mathcal{G})$ par

$$d(s, g) = \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i (s \circ f_i, c_{i*}(g))$$

où c_i est l'image dans E d'un chemin de Δ_n qui va de 0_n à $f_i(0_{n-1})$, ces chemins étant homotopes entre eux puisque Δ_n est connexe, donc simplement connexe. L'opérateur d vérifie $d \circ d = 0$, et munit $C_*(E, \mathcal{G}) = \bigoplus C_n(E, \mathcal{G})$ d'un structure de complexe. Son homologie est par définition l'homologie singulière de E à coefficients dans $\mathcal{G}$ et se note $H_*(E, \mathcal{G}) = \bigoplus_n H_n(E, \mathcal{G})$.

EXERCICE. - Définir pour tout $e \in E$ un homomorphisme $G_e \longrightarrow H_0(E, \mathcal{G})$. Si E est connexe par arc et muni d'un point de base e_0, montrer que $H_0(E, \mathcal{G})$ est isomorphe au quotient de G_0 par le sous-module engendré par les éléments de la forme $g - cg$, avec $g \in G_o$, $c \in \pi_1(E, e_o)$. Si E a pour composantes connexes les E_i, $H_o(E, \mathcal{G}) = \bigoplus_i H_o(E_i, \mathcal{G}|E_i)$.

3. Filtration de $C_*(X, M)$. – Soit S_n^p l'ensemble des n-simplexes s de X tels que $P \circ s : \Delta_n \longrightarrow B$ se factorise sous la forme $P \circ s = u \circ a$, où $a : \Delta_n \to \Delta_p$ est affine, et induit une application croissante au sens large de l'ensemble des sommets de Δ_n dans celui des sommets de Δ_p, et où u est un p-simplexe singulier de B.

On notera C_n^p le A-module $M^{(S_n^p)}$. On a :

1° $C_n^p \subset C_n^{p+1}$, et, pour $p \geqslant n$, $C_n^p = C_n(X, M)$

2° $d\, C_n^p \subset C_{n-1}^p$.

Les $C_*^p = \bigoplus_n C_n^p$ définissent une filtration de $C_*(X, M)$ compatible avec d, qui induit une filtration de $H_*(X, M)$. Si $X = B$ et $P = I$, $H_n^{n-1} = 0$ (homologie engendrée par des simplexes dégénérés), et $H_n^n = H_n(X, M)$. Si B est réduit à un point, $H_n^o = H_n(X, M)$. Dans les deux cas, dits dégénérés, le gradué $G\,H_n$ associé à H_n filtré a un seul terme non nul et s'identifie à $H_n(X, M)$.

4. Fonctorialité. – Un morphisme f d'un système local $\mathcal{G}$ de A-modules sur E dans un système local $\mathcal{G}'$ sur E' se compose de :

1° Une application $\hat{f}$ continue de E dans E' ; si c est un chemin de E, on notera $\hat{f}\, c$ le chemin $\hat{f} \circ c$ de E' ;

2° Pour tout e de E, un homomorphisme f_e de G_e dans $G'_{\hat{f}(e)}$; et on suppose que le diagramme suivant est commutatif pour tout chemin c de E :

$$\begin{tikzcd} G_{c(0)} \arrow[r, "f_{c(0)}"'] \arrow[d, "c_*"'] & G'_{\hat{f}\, c(0)} \arrow[d, "\hat{f}\, c_*"'] \\ G_{c(1)} \arrow[r, "f_{c(1)}"'] & G'_{\hat{f}\, c(1)} \end{tikzcd}$$

A un tel morphisme est associé un homomorphisme de A-modules gradués :

$$f_* : H_*(E, \mathcal{G}) \longrightarrow H_*(E', \mathcal{G}') .$$

La condition de fonctorialité $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ est satisfaite. Un morphisme f d'un fibré (X , P , B) dans un fibré (X' , P' , B') se compose de deux applications continues $f : X \to X'$ et $\hat{f} : B \to B'$ telles que $\hat{f} \circ P = P' \circ f$. A un tel morphisme est associé un morphisme de systènes locaux gradués, que nous noterons encore $f : \mathcal{H}_*(\mathfrak{F} , M) \to \mathcal{H}_*(\mathfrak{F}' , M)$.

A f est aussi associé un homomorphisme $f_* : C_*(X , M) \to C_*(X' , M)$ qui respecte la filtration, c'est-à-dire $f_*(C^p_*(X , M)) \subset C^p_*(X' , M)$. Il en est de même de l'homomorphisme induit sur l'homologie $f_* : H_*(X , M) \to H_*(X' , M)$, et on a donc aussi un homomorphisme, encore noté f_*, du gradué associé au premier module filtré dans le gradué associé au second.

5. Par un procédé essentiellement algébrique, qui s'applique d'ailleurs chaque fois qu'on a un module différentiel gradué filtré, on obtient le résultat suivant :

SCHOLIE. - Soit M un A-module. A tout espace fibré au sens de SERRE (X , P , B), on peut associer une suite $(E^r)_{2 \leq r \leq \infty}$ de A-modules bigradués munis chacun d'une différentielle d^r de bidegré $(- r , r - 1)$, soit

$$E^r = \bigoplus_{p,q} E^r_{p,q} \ ; \ d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \longrightarrow E^r_{p-r,q+r-1} \ ; \ d^r \circ d^r = 0 \ ;$$

et un isomorphisme i de $\bigoplus_p E^\infty_{p,n-p}$ sur le A-module $GH_n(X , M)$ gradué associé à $H_n(X , M)$ filtré ; de telle façon que les conditions (A), (B), (C), (D), (E) suivantes soient vérifiées :

A. $$E^r_{p,q} = \begin{cases} H_p(B , \mathcal{H}_q(\mathfrak{F} , M)) & \text{pour } p , q \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

B. E^{r+1} est l'homologie de (E^r , d^r), soit

$$E^{r+1}_{p,q} = \operatorname{Ker} d^r_{p,q} / \operatorname{Im} d^r_{p+r,q-r+1}$$

(A) et (B) entraînent que tous les $E^r_{p,q}$ pour p , q, donnés et $r > \sup (p,q+1)$ sont égaux avec $d^r_{p,q} = 0$. On peut donc énoncer la troisième condition

C. $E^\infty_{p,q} = E^r_{p,q}$ pour r assez grand, $d^\infty = 0$.

D. Fonctorialité : à un morphisme f d'espaces fibrés

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "P"'] & X' \arrow[d, "P'"] \\ B \arrow[r, "\hat{f}"] & B' \end{tikzcd}$$

on associe des homomorphismes $f^r_{p,q} : E^r_{p,q} \longrightarrow E'^r_{p,q}$ tels que :

a. $f^2_{p,q}$ coïncide avec l'homomorphisme

$$f_* : H_p(B , \mathcal{H}_q(\mathcal{F} , M)) \rightarrow H_q(B' , \mathcal{H}_q(\mathcal{F}', M))$$

induit par le morphisme de systèmes locaux

$$f : \mathcal{H}_q(\mathcal{F} , M) \rightarrow \mathcal{H}_q(\mathcal{F}' , M) \quad \text{associé à } f .$$

b. f^r_* commute avec les d^r et induit f^{r+1}_* sur les homologies E^{r+1} et E'^{r+1} de E^r et E'^r.

c. $f^\infty_{p,q} = f^r_{p,q}$ pour r assez grand.

d. le diagramme

$$\begin{tikzcd} E^\infty \arrow[r, "f^\infty_*"] \arrow[d, "i"'] & E'^\infty \arrow[d, "i'"] \\ GH_*(X , M) \arrow[r, "f_*"] & GH_*(X' , M) \end{tikzcd} ,$$

est commutatif.

Remarquons que les conditions (a), (b), (c) entraînent

$$(f \circ g)^r_{p,q} = f^r_{p,q} \circ g^r_{p,q}$$

Si $X = B$, et P est l'identité, la fibre est réduite à un point, le système local $\mathcal{H}_q(\mathcal{F} , M)$ est constant, et s'identifie au module M pour $q = 0$, à 0 pour $q \neq 0$; (A) donne $E^2_{p,0} = H_p(X , M)$; $E^2_{p,q} = 0$ pour $q \neq 0$. Si $B = \{b\}$, $X = F_b$, le système local $\mathcal{H}_q(\mathcal{F} , M)$ s'identifie au module $H_q(X , M)$; (A) donne $E^2_{0,q} = H_q(X , M)$; $E^2_{p,q} = 0$ pour $p \neq 0$. Dans les deux cas dégénérés, tous les d^r sont nuls, et $E^\infty = E^2$; i devient un automorphisme de $H_*(X , M)$. Nous pouvons maintenant énoncer la dernière condition :

E. Dans les deux cas dégénérés, i est l'identité de $H_*(X , M)$

DÉFINITION. - La suite (E^r) s'appelle suite spectrale du fibré (X , P , B).

Nous supposerons dans les applications que A est un anneau principal, et $M = A$. Si le système local $\mathcal{H}_q(\mathcal{F} , A)$ est constant, on peut alors appliquer le théorème des coefficients universels :

On a une suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow H_p(B , A) \otimes_A H_q(F , A) \longrightarrow E^r_{p,q} \longrightarrow \mathrm{Tor}_A(H_{p-1}(B , A) , H_q(F , A)) \longrightarrow 0$$

Cette suite exacte se fend en somme directe, mais non canoniquement.

6. Compléments et variantes.

A. Compatibilité avec J_* et P_*. - Soit $b \in B$, et soit J l'injection de F_b dans X. On a $J_* : H_q(F_b , M) \longrightarrow H_q(X , M)$.

D'autre part on a un homomorphisme

$$H_q(F_b , M) \longrightarrow H_o(B ; \mathcal{H}_q(\mathcal{F} , M)) = E^r_{0,q} \quad \text{(exercice du n° 2)} .$$

Comme tout élément de $E^r_{0,q}$ est un cycle, $E^{r+1}_{0,q}$ est un quotient de $E^r_{0,q}$, et il en sera de même de $E^\infty_{0,q}$. Enfin, $E^\infty_{0,q}$, premier terme du gradué associé à $H_q(X , M)$, en est un sous-module. Finalement on a :

$$H_q(F_b , M) \underset{\left(\substack{\text{si } B \\ \text{connexe}}\right)}{\xrightarrow{\text{sur}}} E^2_{0,q} \xrightarrow{\text{sur}} \cdots \longrightarrow E^r_{0,q} \longrightarrow \overset{\text{sur}}{\cdots} \longrightarrow E^\infty_{0,q} \xrightarrow{\text{inj}} H_q(X)$$

On voit facilement, en appliquant 5 (D) au cas

$$J : (F_b , P|F_b , \{b\}) \to (X , P , B)$$

et en tenant compte de 5 (E), que le composé de tous ces homomorphismes n'est autre que J_*.

De même $E^\infty_{p,0}$, dernier terme de $GH_p(X)$, en est un quotient, et c'est un sous-module de $E^2_{p,0}$ puisqu'il n'y a pas de bords non nuls dans les $E^r_{p,0}$. Enfin $E^2_{p,0} = H_p(B , \mathcal{H}_o(\mathcal{F} , M))$ s'envoie dans (et même sur, si la fibre est connexe) $H_p(B , M)$ par l'homomorphisme associé à l'augmentation $H_o(F , M) \longrightarrow M$. On voit de même en appliquant 5 (D) à $\mathcal{P} : (X , P , B) \to (B , I , B)$, que le composé des homomorphismes :

$$H_p(X\ ,\ M) \xrightarrow{\text{sur}} E^{\infty}_{p,0} \longrightarrow \overset{\text{inj}}{\cdots} \longrightarrow E^2_{p,0} \longrightarrow H_p(B\ ,\ M)$$

n'est autre que P_* .

B. Homologie relative. - Soit $B' \subset B$, $X' = P^{-1}(B')$. On a un énoncé analogue à celui du scholie , en remplaçant (A) par

A'. $H^2_{p,q} = H_p(B \bmod B'\ ,\ \mathcal{H}_q(\mathfrak{F}\ ,\ M))$;

et i par un isomorphisme de E^{∞} sur $GH_*(X \bmod X'\ ,\ M)$.

C. Cohomologie. - On a un énoncé analogue, mais les d_r sont de bidegré $(r\ ,\ 1-r)$ et la fonctorialité va dans l'autre sens.

De plus, si $M = \Lambda$ on a la compatibilité suivante avec la structure multiplicative :

a. Les E_r sont munis d'une multiplication associative

b. les d_r sont des antidérivations :

$$d_r(a.b) = (d_r\ a).b + (-1)^{p+q}\ a.(d_r\ b)$$

si a est de bidegré $(p\ ,\ q)$.

c. La multiplication sur E_{r+1} est induite par celle de E_r (la formule précédente montre que les cycles forment une sous-algèbre, et que les bords forment un idéal de celle-ci).

d. La multiplication sur E_{∞} coïncide avec celle de E_r pour p et q donnés, lorsque r est assez grand.

e. La multiplication sur E_2 est donnée par

$$a.b = (-1)^{qp'}\ a \cup b\ ,$$

si a et b sont de bidegrés $(p.q)$ et $(p'.q')$, $\cup$ désignant le cup-produit dans $H^*(B\ ,\ \mathcal{H}^*(\mathfrak{F}\ ,\ \Lambda))$.

f. L'isomorphisme i est multiplicatif.

REMARQUE. - Le système local $\mathcal{H}^*(\mathcal{F}, A)$ est un système d'A-algèbres graduées anticommutatives : $ab = (-1)^{qq'} b.a$. On a donc, dans

$$H^*(B , \mathcal{H}^*(\mathcal{F} , A)) : a \cup b = (-1)^{pp'+qq'} b \cup a ,$$

d'où, dans E_2 : $a.b = (-1)^{pp'+qq'+qp-q'p} b.a = (-1)^{(p+q)(p'+q')} b.a$.

Enfin on a une dualité entre $E^r_{p,q}$ et $E_r^{p,q}$, et d_r et d^r sont transposés.

D. Cas où un H-espace opère sur la fibre. - Soit G un espace muni d'une loi de composition $m : G \times G \to G$ "presque associative" (Exposé 1, n° 4) et d'un élément g_0 "presque neutre". $H_*(G , A)$ est alors munie d'un produit

$$m_* : H_p(G , A) \otimes H_q(G , A) \to H_{p+q}(G \times G , A) \to H_{p+q}(G , A)$$

qui en fait une A-algèbre graduée $L = \bigoplus_n L_n$ à élément unité de degré 0 .

On dira que G opère à gauche dans un espace E si on a une application continue $r : G \times E \to E$ telle que :

1° $x \to r(g_0 , x)$ est homotope à l'identité de E

2° Les applications de $G \times G \times E$ dans E définies par :

$$R_0(g_1 , g_2 , x) = r(g_1 , r(g_2 , x))$$

et

$$R_1(g_1 , g_2 , x) = r(m(g_1 , g_2) , x)$$

sont homotopes.

$H_*(E)$ est alors muni d'une structure de L-module à gauche par

$$r_* : L_p \otimes H_n(E) \to H_{n+p}(E)$$

On dira que G opère à gauche dans $\mathcal{F}$ si G opère à gauche dans X , de telle sorte que soient satisfaites les conditions supplémentaires :

3° $P(r(g , x)) = P(x)$

4° L'homotopie R entre R_0 et R_1 peut être choisie de façon que $P(R(t , g , x)) = P(x)$ pour tout $t \in [0 , 1]$.

En ce cas, le système local $\mathcal{H}_*(\mathcal{F} , A)$ devient un système local de L-modules à gauche.

D'autre part $H_*(X , A)$ est un L-module à gauche et la filtration est compatible avec cette structure, c'est-à-dire que les H_*^p sont des sous-L-modules, et

$G\,H_*(X\,,\,A)$ sera aussi un L-module à gauche.

On peut maintenant énoncer un complément au scholie. Dans ce cas, les E^r sont munis d'une structure de L-module à gauche, telle que :

a. les d^r sont L-linéaires au sens gradué ;

b. la structure de L-module de E^{r+1} est induite par celle de E^r ;

c. la structure de L-module de E^2 est définie par $\ell . a = (-1)^{kp}\ \ell a$, où le deuxième produit est pris dans le L-module $H_p(B\,,\,\mathcal{H}_*(\mathcal{F}\,,\,A))$, si $\ell \in L_k$;

d. la structure de L-module de E^∞ coïncide avec celle de E^r pour $p\,,\,q\,,\,k$ fixes, lorsque r est assez grand ;

e. i est L-linéaire.

Nous appliquerons ce résultat au cas où X est l'espace des chemins d'origine b_o d'un espace B connexe, et où $G = F_o$ est l'espace des lacets $\Omega(B\,,\,b_o)$; $\mathcal{H}_*(\mathcal{F}\,,\,A)$ est alors un système local de L-modules libres à un générateur. Ce système est constant si (et seulement si) B est connexe et simplement connexe. Il s'identifie alors à L et on a $E^r = H_*(B\,,\,L)$ (mais sa structure de L-module en diffère par un facteur $(-1)^{pk}$) .

Une situation analogue se présente dans le cas d'un espace fibré principal, mais le groupe opère à droite, ce qui d'ailleurs supprime le facteur $(-1)^{pk}$.

7. Isomorphismes de suites spectrales.

PROPOSITION. - Soit $f : (X\,,\,P\,,\,B) \to (X'\,,\,P'\,,\,B')$ un morphisme de fibrés. Alors, si $f_*^r : E^r \to E'^r$ est un isomorphisme, $f_* : H_*(X\,,\,M) \to H_*(X'\,,\,M)$ est un isomorphisme.

Si f_*^r est un isomorphisme de E^r sur E'^r , comme il commute avec les différentielles d^r et d'^r , il induit un isomorphisme de l'homologie E^{r+1} de $(E^r\,,\,d^r)$ sur l'homologie E'^{r+1} de $(E'^r\,,\,d'^r)$; f_*^r est donc un isomorphisme pour tout r par récurrence, et f_*^∞ le sera aussi ; $f_* : H_*(X) \to H_*(X')$ est un homomorphisme compatible avec la filtration qui induit sur les gradués associés un isomorphisme : c'est donc un isomorphisme sur (regarder pour chaque degré).

EXEMPLES. - C'est le cas si B est connexe, muni d'un point de base b_o , si $\hat{f}$ est un homéomorphisme, et si $f_o : F_o \to F'_o$ induit sur l'homologie un isomorphisme f_{o*} de $H_*(F_o\,,\,M)$ sur $H_*(F'_o\,,\,M)$. Alors en effet le morphisme de systèmes locaux

$$f : \mathcal{H}_*(\mathcal{F} , M) \to \mathcal{H}_*(\mathcal{F}' , M)$$

est un isomorphisme (comme on le voit en considérant un système local sur B comme un module dans lequel $\pi_1(B , b_0)$ opère) et l'homomorphisme f^2_* aussi.

C'est aussi le cas si le système local $\mathcal{H}_*(\mathcal{F}' , A)$ est constant, et si $\hat{f}_* : H_*(B , A) \to H_*(B' , A)$ et $f_{0*} : H_*(F , A) \to H_*(F' , A)$ sont des isomorphismes. A étant un anneau principal. En effet $\mathcal{H}_*(\mathcal{F} , A)$, image réciproque d'un système local constant, est constant, et le théorème des coefficients universels montre que f^2_* est un isomorphisme.

EXERCICE. - Si $f^2_{p,q}$ est bijectif pour $p + q < n$, surjectif pour $p + q = n$ (resp. bijectif pour $p + q > n$, injectif pour $p + q = n$)

$$f_i : H_i(X , M) \to H_i(X' , M)$$

est bijectif pour $i < n$, surjectif pour $i = n$ (resp. bijectif pour $i > n$, injectif pour $i = n$).