MICHEL ZISMAN

Espaces fibrés et groupes d'homotopie

Séminaire Henri Cartan, tome 11, nº 1 (1958-1959), exp. nº 1, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1958-1959__11_1_A1_0>

17 et 24 novembre 1958

ESPACES FIBRÉS ET GROUPES D'HOMOTOPIE

[d'après deux exposés de Michel ZISMAN]

1. Espaces fibrés.

NOTATION. - I désigne le segment $[0, 1]$ de la droite numérique.

DÉFINITION. - On dit qu'un triple (X, B, p), où X et B sont des espaces topologiques (non nécessairement séparés) et p une application continue $X \to B$, est fibré au sens de Serre s'il satisfait à la condition suivante, pour tout entier $n \geqslant 1$:

(F) pour tout couple d'applications continues

$$f : I^n \to B , \qquad g : I^{n-1} \to X$$

telles que $p \circ g$ coïncide avec la restriction de f à I^{n-1} (on identifie I^{n-1} à la face $I^{n-1} \times \{0\}$ du cube $I^n = I^{n-1} \times I$), il existe une application continue $h : I^n \to X$ qui prolonge g et satisfait à $p \circ h = f$.

Sous les hypothèses précédentes, on dit aussi que p définit X comme fibré de base B ; si $b_0 \in B$, l'image réciproque $p^{-1}(b_0)$ s'appelle la fibre au-dessus de b_0 (on notera que cette fibre peut être vide, même si X n'est pas vide).

La notion de fibré a un caractère local vis-à-vis de la base ; d'une façon précise :

PROPOSITION 1. - Soit $p : X \to B$ une application continue ; supposons que tout point de B possède un voisinage ouvert U tel que le triple $(p^{-1}(U), U, p|U)$ soit fibré ; alors p définit X comme fibré de base B.

Indications sur la démonstration : f et g étant des applications données comme dans la condition (F), on fait un quadrillage du cube I^n, assez fin, de manière que g applique chaque cube du quadrillage dans un ouvert U de B assez petit pour que $p^{-1}(U)$ soit fibré sur U. On montre alors la possibilité de définir un prolongement h, de proche en proche sur les cubes du quadrillage.

EXEMPLE. - Un fibré <u>localement trivial</u> est fibré au sens de Serre (en effet, un fibré trivial, c'est-à-dire isomorphe à un fibré $X = B \times F$, p étant l'application de projection $B \times F \to B$, est évidemment fibré au sens de Serre).

EXERCICE. - Soit P un polyèdre fini ; montrer que tout fibré (X, B, p) au sens de Serre satisfait à la condition :

(F') pour tout couple d'applications continues

$$f : P \times I \to B, \quad g : P \to X$$

telles que $p \circ g$ coïncide avec la restriction de f à P (identifié à $P \times \{0\}$), il existe une application continue $h : P \times I \to X$ qui prolonge g et satisfait à $p \circ h = f$.

(On considère une subdivision simpliciale, et on définit le prolongement h de proche en proche, sur les squelettes de dimension $0, 1, 2, \ldots$ de P).

Comme la condition (F') implique trivialement (F), ceci montre que (F') équivaut à (F).

<u>Image réciproque d'un fibré.</u> - Pour tout couple d'applications continues $f : A \to B$, $p : X \to B$, soit Y le sous-espace de $A \times X$ formé des points (a, x) tels que $f(a) = p(x)$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

où q envoie (a, x) en a, et g envoie (a, x) en x ; pour tout espace Y' muni de deux applications continues $q' : Y' \to A$, $g' : Y' \to X$ telles que $f \circ q' = p \circ g'$, il existe une application continue et une seule $k : Y' \to Y$ telle que $q' = q \circ k$, $g' = g \circ k$. Cela étant, on voit facilement que si $p : X \to B$ est fibré au sens de Serre, alors $q : Y \to A$ est aussi fibré au sens de Serre. On l'appelle l'<u>image réciproque</u> du fibré (X, B, p) par l'application $f : A \to B$.

<u>Sections d'un fibré.</u> - Une "section" du triple (X, B, p) est une application continue $s : B \to X$ telle que $p \circ s$ soit l'identité. La condition (F) exprime que si f est une application continue $I^n \to B$, le fibré de base I^n,

image réciproque de (X, B, p) par l'application f, possède une section qui prolonge une section arbitrairement donnée au-dessus de I^{n-1}.

Composition des applications fibrées. - Il est immédiat que si $q : Y \to X$ et $p : X \to B$ sont des applications fibrées au sens de Serre, il en est de même de l'application composée $p \circ q : Y \to B$.

2. Espaces de chemins, espaces de lacets.

Un chemin d'un espace X est une application continue f de I dans X ; $f(0)$ s'appelle l'origine, $f(1)$ s'appelle l'extrémité du chemin. On notera $E(X)$ l'ensemble de tous les chemins de X, muni de la topologie de la "convergence compacte" : c'est la topologie engendrée par les $W(K, U)$, où K est un compact quelconque contenu dans I, U un ouvert quelconque de X, et où $W(K, U)$ désigne l'ensemble des chemins $f : I \to X$ tels que $f(K) \subset U$. On sait ([1]) que pour qu'une application d'un espace Y dans $E(X)$ soit continue, il faut et il suffit que l'application $Y \times I \to X$ canoniquement associée soit continue.

A et B désignant deux sous-espaces de X, on notera $E(X ; A, B)$ le sous-espace de $E(X)$ formé des chemins dont l'origine est dans A et l'extrémité dans B.

PROPOSITION 2. - L'application $p : E(X ; A, B) \to A \times B$ qui, à chaque chemin, associe le couple formé de son origine et de son extrémité, est fibrée au sens de Serre.

DÉMONSTRATION. - On va montrer que l'application p satisfait à la condition (F') dans laquelle on ne suppose même pas que P soit un polyèdre (P peut être ici un espace quelconque). Soit f une application continue $P \times I \to A \times B$, définie par un couple d'applications continues

$$f_0 : P \times I \to A, \quad f_1 : P \times I \to B .$$

Soit g une application continue $P \to E(X ; A, B)$ telle que $p \circ g$ coïncide avec la restriction de f à P (identifié à $P \times \{0\}$). Soit $G : P \times I \to X$

([1]) BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale, Chapitre 10 : Espaces fonctionnels, Dictionnaire. - Paris, Hermann, 1949 (Act. scient. et ind., 1084 ; Eléments de Mathématique, 10) ; paragraphe 2.

l'application associée à g ; c'est une application continue $G(p, t)$ telle que

$$G(p, 0) = f_0(p, 0), \qquad G(p, 1) = f_1(p, 0).$$

Ce que l'on cherche, c'est une application continue $H : P \times I \times I \rightarrow X$ telle que

$$(*) \begin{cases} H(p, 0, t) = G(p, t) & \text{pour } t \in I, \\ H(p, u, 0) = f_0(p, u), \quad H(p, u, 1) = f_1(p, u) & \text{pour } u \in I. \end{cases}$$

Ces conditions expriment que la restriction de H au sous-espace $P \times J$ (où J désigne la partie du carré $I \times I$ formée de la réunion de $\{0\} \times I$, de $I \times \{0\}$ et de $I \times \{1\}$) est une fonction continue donnée H_0 ; comme J est un <u>rétracte</u> de $I \times I$, $P \times J$ est un rétracte de $P \times I \times I$, et par suite H_0 peut bien se prolonger en une fonction continue H, ce qui démontre la proposition. (Remarque : on pourrait écrire une formule explicite pour H).

COROLLAIRE. - <u>L'application</u> $E(X ; A, B) \rightarrow A$ <u>qui, à chaque chemin, associe son origine, est fibrée au sens de Serre</u>.

(En effet, elle est composée de l'application p de la proposition 2, et de la projection $A \times B \rightarrow A$).

Enoncé analogue pour l'application $E(X ; A, B) \rightarrow B$ qui, à chaque chemin, associe son extrémité.

NOTATIONS. - On écrira désormais

$E(X, A)$ au lieu de $E(X ; X, A)$ (espace des chemins de X dont l'extrémité appartient à $A \subset X$;

$E(X, x_0)$ au lieu de $E(X, \{x_0\})$, x_0 étant un point de X ;

$\Omega(X, A, x_0)$ au lieu de $E(X ; \{x_0\}, A)$ (espace des chemins de X dont l'origine est x_0 et l'extrémité appartient à $A \subset X$; on supposera toujours que $x_0 \in A$) ;

$\Omega(X, x_0)$ au lieu de $E(X ; \{x_0\}, \{x_0\})$ (espace des <u>lacets</u> de X, d'origine et d'extrémité x_0).

Dans tous ces espaces, on prendra toujours comme point-base le chemin constant $I \rightarrow \{x_0\}$, qu'on notera parfois $\tilde{x}_0$.

L'application $E(X , A) \to A$ qui, à chaque chemin, associe son extrémité, est fibrée ; de plus :

PROPOSITION 3. - *L'application* $A \to E(X , A)$ *qui, à chaque point* $a \in A$, *associe le chemin constant* $I \to \{a\}$, *est une section du fibré* $E(X , A) \to A$; *l'image de cette section* (*homéomorphe à* A) *est un rétracte par déformation de l'espace* $E(X , A)$.

DÉMONSTRATION. - L'idée consiste à rétracter progressivement chaque chemin sur son extrémité. D'une façon précise, on définit une application de déformation

$$E(X , A) \times I \to E(X , A)$$

en définissant une application $F : E(X , A) \times I \times I \to X$ qui, à chaque chemin $f : I \to X$ d'extrémité dans A , et à chaque couple $(u , t) \in I \times I$, associe

$$F(f , u , t) = f(1 + t(u - 1)) \in X \quad .$$

COROLLAIRE. - *L'espace* $E(X , x_0)$ *est contractile.*

3. Quelques fibrations.

La notation $F \to X \xrightarrow{p} B$ signifiera que l'application $p : X \to B$ est fibrée au sens de Serre, et que F est une fibre de cette application. On choisit pour cela un point-base $x_0 \in X$; $b_0 = p(x_0)$ est pris comme point-base de B , et $F = p^{-1}(b_0)$ est la fibre de x_0 .

PROPOSITION 4. - *Soient* X *un espace,* A *un sous-espace,* x_0 *un point-base* ($x_0 \in A$) . *On a le diagramme commutatif* (*où les lignes horizontales désignent des fibrés de Serre*)

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[d, "s"] \arrow[dr, "i"] & \\
 & \Omega(X , A , x_0) \arrow[r] \arrow[d, "id."] & E(X , A) \arrow[r, "p_0"'] \arrow[d, "p_1"] & X \\
\Omega(X , x_0) \arrow[r] & \Omega(X , A , x_0) \arrow[r, "q"] & A &
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, i *désigne l'injection de* A *dans* X ; s *désigne la section définie dans la proposition* 3 ; p_0 (resp. p_1) *désigne l'application qui, à chaque chemin de* X, *associe son origine* (*resp. son extrémité*) ; q *désigne l'application qui, à chaque chemin, associe son extrémité. L'application composée* $p_1 \circ s$ *est l'identité.*

Cette proposition résulte aussitôt des propositions 2 et 3.

PROPOSITION 5. - *Si* $F \to X \to B$ *est un fibré de Serre, alors*

$$\Omega(F , x_0) \to \Omega(X , x_0) \to \Omega(B , b_0)$$

est aussi un fibré de Serre.

La démonstration est semblable à celle de la proposition 2 ; on pose $P = I^{n-1}$, on désigne par J la sous-espace de I^2 défini dans la démonstration citée, et on est alors ramené au problème suivant : on connaît deux applications continues

$$f : Q \times I^2 \to B \quad \text{et} \quad g : Q \times J \to X$$

telles que $p \circ g$ soit la restriction de f à $Q \times J$; il s'agit de trouver une application continue $h : Q \times I^2 \to X$ qui prolonge g et satisfasse à $p \circ h = f$. Ceci est possible, car le couple (I^2 , J) est homéomorphe au couple (I^2 , I), et parce que l'application $p : X \to B$ est fibrée.

PROPOSITION 6. - *Si* $F \to X \to B$ *est un fibré de Serre, on a le diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\Omega(F , x_0) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega(X , x_0) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega(B , b_0) \arrow[d, "\mathrm{id.}"] \\
E'(F , x_0) \arrow[r] \arrow[d, "q'"] & \Omega(X , F , x_0) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "q"] & \Omega(B , b_0) \\
F \arrow[r, "\mathrm{id.}"] & F &
\end{tikzcd}$$

où les deux premières lignes horizontales désignent des fibrés de Serre. Les trois flèches verticales partant de la première ligne désignent les injections canoniques ; l'application r *associe à chaque chemin* $I \to X$ *le chemin* $I \to B$ *obtenu par composition de* $I \to X$ *avec* $p : X \to B$; *les applications* q' *et* q *associent à chaque chemin son extrémité* ; $E'(F , x_0)$ *désigne l'espace des chemins de* F *dont l'origine est* x_0 .

Démonstration : on a vu (proposition 5) que la première ligne désigne un fibré. Le fait que la deuxième ligne désigne un fibré se prouve de la même manière. Le reste de l'énoncé est évident.

En combinant les propositions 4, 5 et 6, on voit que si on a un fibré de Serre $F \to X \to B$, on a le diagramme commutatif suivant (où les lignes horizontales désignent des fibrés)

$$(\Delta) \qquad \begin{tikzcd}
 & & & F \arrow[r] \arrow[d, "s"] & X \arrow[r] \arrow[d, "id."] & B \\
 & & \Omega(X,F,x_0) \arrow[r] \arrow[d, "id."] & E(X,F) \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "p_1"] & X & \\
 & \Omega(X,x_0) \arrow[r] \arrow[d, "id."] & \Omega(X,F,x_0) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "r"] & F & & \\
\Omega(F,x_0) \arrow[r] & \Omega(X,x_0) \arrow[r] & \Omega(B,b_0) & & &
\end{tikzcd}$$

L'application r définit $\Omega(X, F, x_0)$ comme fibré de base $\Omega(B, b_0)$, la fibre $E'(F, x_0)$ étant contractile.

4. Loi de composition dans l'espace des lacets.

Etant donnés deux lacets $f : I \to X$ et $g : I \to X$ d'origine x_0, on définit le produit $f.g$ comme le lacet $h : I \to X$ défini par

$$h(t) = f(2t) \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 1/2 \,, \quad h(t) = g(2t-1) \quad \text{pour} \quad 1/2 \leq t \leq 1 \,.$$

L'application $(f, g) \to f.g$ est une application continue

$$\Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \to \Omega(X, x_0) \,.$$

Le lacet constant $\tilde{x}_0$ n'est pas élément neutre pour cette loi de composition ; il l'est "presque", dans le sens suivant : chacune des applications $f \to \tilde{x}_0.f$ et $f \to f.\tilde{x}_0$ est homotope à l'application identique. En effet, la première de ces applications (par exemple) se déforme en l'identité au moyen de la fonction

$$H(t, u) = x_0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq u/2 \,, \quad H(t, u) = f\left(\frac{2t-u}{2-u}\right) \quad \text{pour} \quad u/2 \leq t \leq 1$$

$$(0 \leq t \leq 1 \,, \quad 0 \leq u \leq 1) \,.$$

On notera que $\tilde{x}_o . \tilde{x}_o = \tilde{x}_o$. Nous exprimerons tous ces faits en disant que $\tilde{x}_o$ est presque élément neutre pour la loi de composition $(f , g) \to f.g$.

On démontre d'une manière analogue que la loi de composition est presque associative, dans le sens suivant : Les deux applications

$$(f , g , h) \to (f.g).h \quad \text{et} \quad (f , g , h) \to f.(g.h)$$

de $\Omega \times \Omega \times \Omega$ dans Ω sont homotopes.

Enfin, chaque élément $f \in \Omega(X , x_o)$ admet un presque inverse, à savoir l'élément f' défini par

$$f'(t) = f(1 - t) \quad \text{(on dit que } f' \text{ est le lacet "opposé" à } f) \ .$$

D'une façon précise, l'application $f \to f'$ est un homéomorphisme de $\Omega(X , x_o)$ sur lui-même, qui jouit de la propriété suivante : L'application $f \to f.f'$ et l'application $f \to f'.f$ de $\Omega(X , x_o)$ dans lui-même sont homotopes à l'application constante (qui envoie tout lacet de X sur le lacet $\tilde{x}_o$) .

Nous exprimerons toutes les propriétés précédentes en disant que la loi de composition de l'espace $\Omega(X , x_o)$ fait de cet espace un presque-groupe dont l'élément presque neutre est $\tilde{x}_o$.

Il est clair qu'une application continue $X \to Y$ qui envoie le point-base x_o dans le point-base y_o définit une application $\Omega(X , x_o) \to \Omega(Y , y_o)$ qui est compatible avec les lois de composition de ces deux presque-groupes.

Plus généralement, on peut définir le produit $f.g$ d'un lacet $f \in \Omega(X , x_o)$ et d'un chemin $g \in E'(X , x_o)$; c'est un élément de $E'(X , x_o)$. Il s'ensuit que l'espace $\Omega(X , x_o)$ opère (à gauche) dans l'espace $E'(X , x_o)$, d'une manière presque associative.

5. Groupes d'homotopie.

Dans tout ce qui suit, chaque espace topologique X est affecté d'un point-base x_o ; chaque application continue $X \to Y$ transforme le point-base $x_o \in X$ dans le point-base $y_o \in Y$.

DEFINITION. - On note $\pi_o(X , x_o)$ l'ensemble des composantes connexes (par arcs) de X , cet ensemble étant muni du point-base qui n'est autre que la composante connexe de x_o (qu'on notera encore x_o par abus de langage).

Il est clair que $\pi_0(X , x_0)$ est un <u>foncteur covariant</u> de l'espace pointé (X , x_0) : toute application continue $(X , x_0) \to (Y , y_0)$ définit une application de l'ensemble $\pi_0(X , x_0)$ dans l'ensemble $\pi_0(Y , y_0)$; cette application notée $\pi_0(f)$ envoie le point-base de $\pi_0(X , x_0)$ dans celui de $\pi_0(Y , y_0)$. Si $Y = X$, $y_0 = x_0$, l'application identique de X définit l'application identique de $\pi_0(X , x_0)$. Si une application $(X , x_0) \to (Z , z_0)$ est composée de deux applications g et h , on a $\pi_0(h \circ g) = \pi_0(h) \circ \pi_0(g)$.

PROPOSITION 7. - <u>Deux applications homotopes</u> $(X , x_0) \to (Y , y_0)$ <u>définissent la même application</u> $\pi_0(X , x_0) \to \pi_0(Y , y_0)$.

C'est évident.

Considérons deux espaces pointés (X , x_0) et (Y , y_0) ; leur produit est un espace pointé $(X \times Y , (x_0 , y_0))$.

PROPOSITION 8. - <u>Les applications d'injection</u> $x \to (x , y_0)$ <u>et</u> $y \to (x_0 , y)$ <u>de</u> X <u>et de</u> Y <u>dans</u> $X \times Y$, <u>et les applications de projection</u> $(x , y) \to x$ <u>et</u> $(x , y) \to y$, <u>définissent des applications</u>

$$\pi_0(X , x_0) \to \pi_0(X \times Y , (x_0 , y_0)) , \quad \pi_0(Y , y_0) \to \pi_0(X , Y , (x_0, y_0))$$

et

$$\pi_0(X \times Y , (x_0 , y_0)) \to \pi_0(X , x_0) , \quad \pi_0(X \times Y , (x_0 , y_0)) \to \pi_0(Y , y_0)$$

qui définissent une bijection de $\pi_0(X \times Y , (x_0 , y_0))$ sur le produit des ensembles pointés $\pi_0(X , x_0)$ et $\pi_0(Y , y_0)$.

C'est aussi évident. Nous écrirons simplement, en abrégé,

$$\pi_0(X \times Y) = \pi_0(X) \times \pi_0(Y) \quad .$$

PROPOSITION 9. - <u>Supposons l'espace</u> X <u>muni d'une loi de composition continue</u> $X \times X \to X$, <u>telle que</u> x_0 <u>soit presque un élément neutre. Alors</u> $\pi_0(X)$ <u>est muni d'une loi de composition admettant comme élément neutre (véritable) le point-base de</u> $\pi_0(X , x_0)$. <u>Si la loi de composition de</u> X <u>est presque associative, la loi de</u> $\pi_0(X , x_0)$ <u>est associative. Enfin, si la loi de</u> X <u>est une loi de presque-groupe</u>, $\pi_0(X , x_0)$ <u>est un (vrai) groupe</u>.

Démonstration : la loi de composition de $\pi_0(X)$ est définie par

$$\pi_0(X) \times \pi_0(X) = \pi_0(X \times X) \rightarrow \pi_0(X) \quad .$$

Les assertions de l'énoncé résultent aussitôt de la proposition 7 et du caractère fonctoriel de $\pi_0(X)$.

<u>Définition de</u> $\pi_n(X , x_0)$ <u>et de</u> $\pi_n(X , A , x_0)$. - Soit A un sous-espace de l'espace X , tel que $x_0 \in A$. On a déjà défini les espaces $\Omega(X , x_0)$ et $\Omega(X , A , x_0)$. Définissons, pour chaque entier $n \geqslant 1$, les espaces $\Omega^n(X , x_0)$ et $\Omega^n(X , A , x_0)$, ainsi que leur point-base $\tilde{x}_0^n$, comme suit :

$$\Omega^1(X , x_0) = \Omega(X , x_0) , \quad \Omega^1(X , A , x_0) = \Omega(X , A , x_0) , \quad \tilde{x}_0^1 = \tilde{x}_0 \quad ;$$

et, par récurrence, pour $n \geqslant 1$,

$$\Omega^{n+1}(X , x_0) = \Omega(\Omega^n(X , x_0) , \tilde{x}_0^n) , \quad \Omega^{n+1}(X , A , x_0) = \Omega(\Omega^n(X , A , x_0) , \tilde{x}_0^n)$$

$\tilde{x}_0^{n+1}$ désignant le lacet ponctuel $I \rightarrow \{\tilde{x}_0^n\}$. On peut convenir que $\Omega^0(X , x_0)$ est l'espace X lui-même ; par contre, $\Omega^0(X , A , x_0)$ <u>n'est pas défini si</u> $A \neq \{x_0\}$.

Les espaces $\Omega^n(X , x_0)$ sont des presque-groupes pour $n \geqslant 1$, et les espaces $\Omega^n(X , A , x_0)$ sont des presque-groupes pour $n \geqslant 2$; par contre, $\Omega(X , A , x_0)$ n'a pas de loi de composition interne si $A \neq \{x_0\}$.

DÉFINITION. - On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\pi_n(X , x_0) = \pi_0(\Omega^n(X , x_0) , \tilde{x}_0^n) \quad ,$$

$$\pi_n(X , A , x_0) = \pi_0(\Omega^n(X , A , x_0) , \tilde{x}_0^n) \quad .$$

Il est clair que, pour tout couple d'entiers $p , q > 0$ tels que $p + q = n$, $\pi_n(X , x_0)$ s'identifie à $\pi_p(\Omega^q(X , x_0) , \tilde{x}_0^q)$, et de même pour $\pi_n(X , A , x_0)$.

Il est évident que $\pi_n(X , x_0)$ et $\pi_n(X , A , x_0)$ sont des <u>foncteurs covariants</u> du couple (X , A) (muni du point-base x_0). De plus toute homotopie entre deux applications $(X , A , x_0) \rightarrow (Y , B , y_0)$ définit une homotopie entre les applications correspondantes $\Omega^n(X , A , x_0) \rightarrow \Omega^n(Y , B , y_0)$; la proposition 7 donne alors :

PROPOSITION 7'. - Si deux applications f et $g : (X , A , x_o) \to (Y , B , y_o)$ sont homotopes, les applications correspondantes $\pi_n(f)$ et $\pi_n(g)$: $\pi_n(X , A , x_o) \to \pi_n(Y , B , y_o)$ sont égales.

En particulier, si X est un espace contractile, $\pi_n(X , x_o)$ est réduit à un seul élément.

Il est clair que $\pi_n(X \times Y , (x_o , y_o))$ s'identifie naturellement au produit $\pi_n(X , x_o) \times \pi_n(Y , y_o)$. De même, pour $n \geq 1$,

$$\pi_n(X \times Y , A \times B , (x_o , y_o)) \approx \pi_n(X , A , x_o) \times \pi_n(Y , B , y_o) .$$

La proposition 9 a pour conséquence immédiate :

PROPOSITION 10. - Pour $n \geq 1$, $\pi_n(X , x_o)$ est naturellement muni d'une loi de groupe ayant $\tilde{x}_o^n$ comme élément neutre. Pour $n \geq 2$, $\pi_n(X , A , x_o)$ est naturellement muni d'une loi de groupe ayant $\tilde{x}_o^n$ comme élément neutre. Pour toute application continue $f : (X , x_o) \to (Y , y_o)$, l'application $\pi_n(f)$ est un homomorphisme de groupes si $n \geq 1$; si en outre $f(A) \subset B$ et $n \geq 2$, $\pi_n(f)$ est un homomorphisme du groupe $\pi_n(X , A , x_o)$ dans le groupe $\pi_n(Y , B , y_o)$. Enfin, la bijection naturelle

$$\pi_n(X , x_o) \times \pi_n(Y , y_o) \to \pi_n(X \times Y , (x_o , y_o))$$

est un isomorphisme du groupe-produit $\pi_n(X) \times \pi_n(Y)$ sur le groupe $\pi_n(X \times Y)$, pour tout $n \geq 1$.

Les groupes $\pi_n(X , x_o)$ s'appellent les groupes d'homotopie de l'espace X (au point x_o) ; les groupes $\pi_n(X , A , x_o)$ s'appellent les groupes d'homotopie relatifs.

PROPOSITION 11. - Soit X un espace muni d'une loi de composition continue pour laquelle x_o soit presque élément neutre. Considérons l'application

$$(1) \qquad \pi_n(X , x_o) \times \pi_n(X , x_o) = \pi_n(X \times X , (x_o , x_o)) \to \pi_n(X , x_o)$$

définie par cette loi. C'est précisément la loi de composition du groupe $\pi_n(X , x_o)$ si $n \geq 1$, et ce groupe est abélien.

DÉMONSTRATION. – Notons G le groupe $\pi_n(X, x_o)$, et e son élément neutre. Puisque (1) est un homomorphisme du groupe-produit $G \times G$ dans G, il transforme un couple $(a, b) = (a, e).(e, b)$ dans le produit des transformés de (a, e) et de (e, b), qui n'est autre que le produit ab. De plus, puisque (a, e) et (e, b) commutent dans $G \times G$, on a bien $ab = ba$ dans G.

Appliquant cette proposition à l'espace $\Omega(X, x_o)$ et à l'espace $\Omega^2(X, A, x_o)$, on trouve :

COROLLAIRE. – <u>Les groupes d'homotopie</u> $\pi_n(X, x_o)$ <u>sont abéliens pour</u> $n \geqslant 2$; <u>les groupes d'homotopie relatifs</u> $\pi_n(X, A, x_o)$ <u>sont abéliens pour</u> $n \geqslant 3$.

6. <u>La suite exacte d'homotopie d'un espace et d'un sous-espace.</u>

On dit qu'une suite d'applications $E' \to E \to E''$ d'ensembles pointés est <u>exacte</u> si l'image de la première application est précisément l'ensemble des points de E que la deuxième application envoie au point-base de E''. Dans le cas de groupes et d'homomorphismes de groupes, on retrouve la notion usuelle de suite exacte.

LEMME 1. – <u>Soit</u> $F \to X \to B$ <u>un fibré de Serre</u> ; <u>la suite</u>

$$\pi_o(F, x_o) \to \pi_o(X, x_o) \to \pi_o(B, b_o)$$

<u>est une suite exacte</u>.

C'est évident ; cela exprime en effet que les points $x \in X$ dont l'image dans B peut être jointe à b_o par un chemin de B, sont exactement ceux que l'on peut joindre par un chemin de X à un point de la fibre F (au-dessus de b_o).

LEMME 2. – <u>Sous les mêmes hypothèses, supposons que l'application</u> $X \to B$ <u>soit surjective</u> ; alors l'application $\pi_o(X) \to \pi_o(B)$ est surjective.

C'est évident.

LEMME 3. – <u>Soit</u> $F \to X \xrightarrow{p} B$ <u>un fibré de Serre</u>. <u>Pour tout</u> $n \geqslant 0$, <u>la suite</u> $\pi_n(F) \to \pi_n(X) \to \pi_n(B)$ <u>est une suite exacte</u> ; <u>si de plus la fibre</u> F <u>est contractile, l'application</u> $\pi_n(p) : \pi_n(X) \to \pi_n(B)$ <u>est un isomorphisme pour tout entier</u> $n \geqslant 1$.

En effet, considérons le fibré

$$\Omega^n(F\ ,\ x_0) \to \Omega^n(X\ ,\ x_0) \to \Omega^n(B\ ,\ b_0)$$

(cf. proposition 5). On lui applique le lemme 1. De plus, on voit, par récurrence sur $n \geqslant 1$, que l'application $\Omega^n(X\ ,\ x_0) \to \Omega^n(B\ ,\ b_0)$ est surjective. Si on suppose que la fibre F est contractile, l'espace $\Omega^n(F\ ,\ x_0)$ est contractile, donc connexe, pour tout $n \geqslant 1$; la dernière assertion du lemme 3 résulte alors du lemme 2.

Considérons maintenant un espace X , un sous-espace A , et prenons un point-base $x_0 \in A$. Appliquons au diagramme de la proposition 4 le foncteur π_n ; on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi_{n+1}(X\ ,\ A\ ,\ x_0) & \to & \pi_n(A\ ,\ x_0) & \to & \pi_n(X\ ,\ x_0) \\
 & & & & \downarrow \mathrm{id.} & & \downarrow \mathrm{id.} \\
\pi_{n+1}(X\ ,\ x_0) & \to & \pi_{n+1}(X\ ,\ A\ ,\ x_0) & \to & \pi_n(A\ ,\ x_0) & &
\end{array}$$

dont les deux lignes sont <u>exactes</u>, en vertu du lemme 3 ; pour $n \geqslant 1$, les applications précédentes sont des <u>homomorphismes de groupes</u>.

Considérons alors la suite (illimitée à gauche)

$$(\Sigma)\qquad \begin{array}{l} \dots \to \pi_{n+1}(X,A,x_0) \to \pi_n(A,x_0) \to \pi_n(X,x_0) \to \pi_n(X,A,x_0) \to \dots \\ \qquad\qquad \dots \to \pi_1(X,A,x_0) \to \pi_0(A,x_0) \to \pi_0(X,x_0)\ , \end{array}$$

les applications de cette suite étant celles du diagramme précédent.

L'application $\pi_n(A\ ,\ x_0) \to \pi_n(X\ ,\ x_0)$ est donc, en fait, celle définie par l'injection $A \to X$.

THEOREME 1. - <u>La suite</u> (Σ) <u>est une suite exacte.</u>

Compte tenu de ce qui précède, il y a seulement à montrer l'exactitude de la suite

$$(2)\qquad \pi_{n+1}(A\ ,\ x_0) \to \pi_{n+1}(X\ ,\ x_0) \to \pi_{n+1}(X\ ,\ A\ ,\ x_0)\ ,$$

pour tout entier $n \geqslant 0$. Or, en vertu des définitions, on peut l'obtenir en appliquant le foncteur π_n à la suite d'applications

$$(3) \qquad \Omega(A, x_0) \xrightarrow{f} \Omega(X, x_0) \xrightarrow{g} \Omega(X, A, x_0) \;;$$

mais ceci ne constitue pas un fibré. Considérons alors le fibré

$$F \to Y \to B ,$$

où $F = \Omega(X, x_0)$, $Y = \Omega(X, A, x_0)$, $B = A$ (cf. la dernière ligne du diagramme de la proposition 4). Soit $y_0 \in Y$ le point $\tilde{x}_0$. On a un diagramme (cf. le diagramme (Δ) du n° 3)

$$(4) \qquad \begin{array}{ccccc} \Omega(Y, F, y_0) & \xrightarrow{t} & E(Y, F) & \xrightarrow{p_0} & Y \\ \downarrow r & & \downarrow p_1 & & \\ \Omega(B, x_0) & & F & & \end{array}$$

où r et p_1 définissent des isomorphismes des groupes d'homotopie π_n pour tout $n \geqslant 1$ (lemme 3), et des bijections des ensembles π_0 (lemme 2). La première ligne du diagramme précédent représente un fibré, donc donne naissance à une <u>suite exacte</u>

$$\pi_n(\Omega(B, x_0)) \to \pi_n(F, y_0) \to \pi_n(Y, y_0) \;.$$

Compte tenu des définitions de F, Y et B, cela donne une suite exacte

$$\pi_n(\Omega(A, x_0)) \xrightarrow{\varphi} \pi_n(\Omega(X, x_0)) \xrightarrow{\psi} \pi_n(\Omega(X, A, x_0))$$

et tout revient à montrer que les applications de cette suite <u>sont les mêmes que dans la suite</u> (2), c'est-à-dire sont respectivement obtenues en appliquant le foncteur π_n aux applications f et g de la suite (3).

En ce qui concerne ψ, on l'obtient en appliquant π_n à l'injection $F \to Y$, injection qui est bien g. Il reste maintenant à prouver que $\varphi = \pi_n(f)$, ce qui est moins immédiat.

Il suffira de montrer l'existence d'une application continue

$$h : \Omega(B, x_0) \to \Omega(Y, F, y_0)$$

qui relève r (c'est-à-dire $r \circ h$ = identité) et est telle que

$$p_1 \circ t \circ h : \Omega(B, x_0) \to F$$

ne soit autre que l'application $f : \Omega(A , x_0) \to \Omega(X , x_0)$ définie par l'injection de A dans X. Or cela résulte d'un lemme général que voici :

LEMME 4. - Soient un espace X, un point-base $x_0 \in X$, et deux sous-espaces B et C tels que $x_0 \in B$, $x_0 \in C$. Considérons le fibré

$$F \to Y \to B ,$$

où $Y = E(X ; C , B)$ (espace des chemins de Y, d'origine dans C et d'extrémité dans B), l'application $Y \to B$ étant celle qui associe à chaque chemin son extrémité; la fibre F est donc $\Omega'(X , C , x_0)$ (espace des chemins de X, d'extrémité x_0, d'origine dans C). Soit $y_0 \in Y$ le lacet ponctuel $\tilde{x}_0$ de l'espace X. Considérons le diagramme (4) contruit avec F, Y, B ; alors il existe une application continue $h : \Omega(B , x_0) \to \Omega(Y , F , y_0)$ qui relève r, et est telle que $p_1 \circ t \circ h$ soit l'application $\Omega(B , x_0) \to F = \Omega'(X , C , x_0)$ définie par l'inclusion de B dans X.

DÉMONSTRATION du lemme. - Soit $u \to \alpha(u)$ un lacet de B, d'origine x_0 ; posons

$$\beta(u , u') = \alpha(\inf(u , u')) , \quad \text{pour } 0 \leq u \leq 1 , \quad 0 \leq u' \leq 1 .$$

Pour chaque valeur de u', l'application $u \to \beta(u , u')$ est bien un chemin de X, soit $\gamma(u')$, dont l'origine est dans C et l'extrémité dans B ; $\gamma(0)$ est le lacet constant $\tilde{x}_0$, et $\gamma(1)$ n'est autre que le lacet α, qui est bien un élément de $\Omega'(X , C , x_0) = F$. L'application $u' \to \gamma(u')$ est donc bien un chemin de Y, d'origine y_0 et d'extrémité dans F ; ainsi γ est un point de $\Omega(Y , F , y_0)$. On définit l'application cherchée h en posant $h(\alpha) = \gamma$; il est immédiat que h satisfait aux conditions de l'énoncé.

Ainsi le lemme 4 est démontré, et aussi, du même coup, le théorème 1.

Revenant à la suite exacte (Σ), il est clair qu'elle est un foncteur covariant du triple (X , A , x_0).

7. La suite exacte d'homotopie des fibrés.

Soit $F \to X \to B$ un fibré de Serre. Appliquons le foncteur π_n au diagramme (Δ) du n° 3 ; il vient un diagramme commutatif, dont les lignes sont exactes en vertu du lemme 3 :

$$\begin{tikzcd}
 & & & \pi_n(F) \arrow[r] & \pi_n(X) \arrow[r] & \pi_n(B) \\
 & & \pi_{n+1}(B) \arrow[r, "\partial"] & \pi_n(F) \arrow[r] \arrow[u, leftarrow, "\mathrm{id.}"] & \pi_n(X) \arrow[u, leftarrow, "\mathrm{id.}"] & \\
 & \pi_{n+1}(X) \arrow[r] & \pi_{n+1}(B) \arrow[r, "\partial"] \arrow[u, leftarrow, "\mathrm{id.}"] & \pi_n(F) \arrow[u, leftarrow, "\mathrm{id.}"] & & \\
\pi_{n+1}(F) \arrow[r] & \pi_{n+1}(X) \arrow[r] \arrow[u, leftarrow, "\mathrm{id.}"] & \pi_{n+1}(B) \arrow[u, leftarrow, "\mathrm{id.}"] & & &
\end{tikzcd}$$

où l'application $\partial : \pi_{n+1}(B) \to \pi_n(F)$ est celle définie par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(\Omega(X , F , x_o)) \arrow[r, "\pi_n(q)"] \arrow[d, "\pi_n(r)"', "\approx"] & \pi_n(F) \\
\pi_n(\Omega(B , b_o)) &
\end{tikzcd}$$

Pour $n \geqslant 1$, toutes les applications précédentes sont des homomorphismes de groupes. Ainsi :

THÉORÈME 2. - *Un fibré de Serre* $F \to X \xrightarrow{p} B$ *(où* F *désigne la fibre de* $x_o \in X$, *et* $b_o = p(x_o)$) *donne naissance à une suite exacte (illimitée à gauche)*

$$\ldots \to \pi_{n+1}(B,b_o) \to \pi_n(F,x_o) \to \pi_n(X,x_o) \to \pi_n(B,b_o) \to \ldots$$
$$\ldots \to \pi_1(B,b_o) \to \pi_o(F,x_o) \to \pi_o(X,x_o) \to \pi_o(B,b_o) .$$

Les applications $\pi_n(F , x_o) \to \pi_n(X , x_o)$ *et* $\pi_n(X , x_o) \to \pi_n(B , b_o)$ *sont définies par les applications* $F \to X$ *et* $X \to B$; *l'application* $\partial : \pi_{n+1}(B , b_o) \to \pi_n(F , x_o)$ *est celle définie ci-dessus, et c'est un homomorphisme de groupes si* $n \geqslant 1$.

A ce sujet, il y a plusieurs remarques à faire :

REMARQUE 1. - Dans la suite exacte (Σ) , relative à un espace X et un sous-espace A , remplaçons A par la fibre F d'un fibré X ; d'après les définitions données, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_{n+1}(X\ ,\ x_o) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(X\ ,\ F\ ,\ x_o) & \longrightarrow & \pi_n(F\ ,\ x_o) \\
\downarrow \text{id.} & & \downarrow & & \downarrow \text{id.} \\
\pi_{n+1}(X\ ,\ x_o) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(B\ ,\ b_o) & \longrightarrow & \pi_n(F\ ,\ x_o)
\end{array}$$

où les applications de la première ligne sont celles de la suite exacte d'homotopie relative, et celles de la seconde ligne sont celles de la suite exacte d'homotopie du fibré ; l'application verticale $\pi_{n+1}(X\ ,\ F\ ,\ x_o) \to \pi_{n+1}(B\ ,\ b_o)$ est celle définie par l'application $p : X \to B$ (qui envoie F au point b_o), et c'est un isomorphisme.

REMARQUE 2. - Prenons pour X le fibré $E'(B\ ,\ b_o)$ de base B, qui est contractile et a pour fibre l'espace des lacets $\Omega(B\ ,\ b_o)$; puisque $\pi_n(E'(B\ ,\ b_o))$ est réduit à un élément pour tout n, la suite exacte du théorème 2 donne une bijection

$$\pi_{n+1}(B\ ,\ b_o) \to \pi_n(\Omega(B\ ,\ b_o)\ ,\ \tilde{b}_o)$$

qui n'est autre que la bijection ayant servi de définition récurrente aux groupes d'homotopie d'un espace B. Pour le voir, il suffit d'appliquer le lemme 4. Mais si, au lieu du fibré $E'(B\ ,\ b_o)$ formé des chemins de B d'origine b_o, on avait considéré le fibré $E(B\ ,\ b_o)$ formé des chemins de B d'extrémité b_o, on aurait trouvé la bijection $\pi_{n+1}(B\ ,\ b_o) \to \pi_n(\Omega(B\ ,\ b_o)\ ,\ \tilde{b}_o)$ déduite de la précédente en effectuant d'abord sur le groupe $\pi_{n+1}(B\ ,\ b_o)$ la transformation qui consiste à envoyer chaque élément sur son inverse (pour la loi de composition du groupe). Cela résulte en effet d'un lemme analogue au lemme 4 : si on prend $Y = E(X\ ;\ B\ ,\ C)$, l'application $Y \to B$ étant celle qui associe à chaque chemin son origine, la fibre F est alors $\Omega(X\ ,\ C\ ,\ x_o)$; il existe dans ce cas une application continue $h : \Omega(B\ ,\ x_o) \to \Omega(Y\ ,\ F\ ,\ y_o)$ telle que :

1° $r \circ h$ soit l'application qui, à chaque élément de $\Omega(B\ ,\ x_o)$, associe le "lacet opposé" ;

2° $p_1 \circ t \circ h$ soit l'application $\Omega(B\ ,\ x_o) \to F = (X\ ,\ C\ ,\ x_o)$ définie par l'inclusion de B dans X.

Ainsi, lorsque l'entier n est $\geqslant 1$, l'homomorphisme de groupes

$$\pi_{n+1}(B\ ,\ b_o) \to \pi_n(\Omega(B\ ,\ b_o)\ ,\ \tilde{b}_o) = \pi_{n+1}(B\ ,\ b_o)$$

défini par la suite exacte du fibré $E(B\ ,\ b_o)$ (de base B , de fibre $\Omega(B\ ,\ b_o)$) est celui qui transforme chaque élément dans l'élément opposé (pour la loi de groupe abélien). Pour $n = 0$, on trouve l'application

$$\pi_1(B\ ,\ b_o) \to \pi_1(B\ ,\ b_o)$$

qui transforme chaque élément du groupe $\pi_1(B\ ,\ b_o)$ dans son inverse (ce n'est pas, en général, un isomorphisme de groupes).

REMARQUE 3. - La suite exacte d'homotopie des fibrés est évidemment un foncteur covariant du fibré. Mais il faut prendre garde au fait suivant : considérons le diagramme (Δ) du n° 3, et identifions les groupes d'homotopie

$$\pi_n(E(X\ ,\ F)) \approx \pi_n(X) \quad \text{au moyen de} \quad \pi_n(p_o)\ ,$$

$$\pi_n(\Omega(X\ ,\ F\ ,\ x_o)) \approx \pi_{n+1}(B) \quad \text{au moyen de} \quad \pi_n(r)\ ,$$

$$\pi_n(\Omega(X\ ,\ x_o)) \approx \pi_{n+1}(B) \quad \text{(par définition)}\ ;$$

alors chacun des fibrés des lignes du diagramme (Δ) possède une suite exacte d'homotopie, et en particulier la seconde ligne définit

$$\partial_2 : \pi_{n+1}(X) \to \pi_{n+1}(B)\ ,$$

et la troisième ligne définit

$$\partial_3 : \pi_{n+1}(F) \to \pi_{n+1}(X)\ .$$

On constate que ∂_3 est bien l'application définie par l'injection $F \to X$ (appliquer le lemme 3), mais que ∂_2 est l'"opposé" de l'application définie par l'application $p : X \to B$. On pourrait voir aussi que la suite exacte d'homotopie du fibré

$$\Omega(F) \to \Omega(X) \to \Omega(B)$$

définit une application $\pi_{n+1}(\Omega(B)) \to \pi_n(\Omega(F))$ qui est l'"opposée" de l'application $\pi_{n+2}(B) \to \pi_{n+1}(F)$ de la suite exacte d'homotopie du fibré $F \to X \to B$.

Cas où le fibré $F \to X \to B$ possède une section.— Supposons l'existence d'une application continue $s : B \to X$ telle que $p \circ s$ soit l'application identique de B. Alors l'application composée

$$\pi_n(B) \xrightarrow{\pi_n(s)} \pi_n(X) \xrightarrow{\pi_n(p)} \pi_n(B)$$

est l'identité, donc $\pi_n(p)$ est surjectif, pour tout $n \geqslant 0$. Il en résulte que, pour tout $n \geqslant 0$, l'application $\partial : \pi_{n+1}(B) \to \pi_n(F)$ est nulle (si $n = 0$, ceci signifie que l'image de ∂ est réduite au point-base de $\pi_0(F)$). Ainsi, la suite d'homotopie du fibré donne des suites exactes

$$0 \to \pi_n(F) \to \pi_n(X) \to \pi_n(B) \to 0 ,$$

et ceci vaut même pour $n = 0$, étant alors entendu que 0 désigne un ensemble réduit à son point-base. L'existence d'un relèvement $\pi_n(B) \to \pi_n(X)$ entraîne que, pour $n \geqslant 2$, le groupe abélien $\pi_n(X)$ est somme directe de $\pi_n(F)$ et $\pi_n(B)$ (relevé dans $\pi_n(X)$) ; que, pour $n = 1$, le groupe $\pi_1(X)$ est un produit croisé de $\pi_1(F)$ et $\pi_1(B)$. Pour $n = 0$, il n'y a pas de conclusion aussi précise concernant l'ensemble $\pi_0(X)$.

8. Le système local des groupes d'homotopie.

Soit X un espace, et soit u un chemin de X, d'origine x_0 et d'extrémité x. Définisons une application φ_u de l'espace $\Omega(X, x)$ dans l'espace $\Omega(X, x_0)$, en associant à chaque lacet f (d'origine et d'extrémité x) le lacet

$$(u.f).u'$$

d'origine et d'extrémité x_0 (u' désigne le chemin "opposé" à u, c'est-à-dire $u'(t) = u(1-t)$). L'application φ_u esr continue ; elle est homotope à l'application qui transforme f en $u.(f.u')$; il en résulte aussitôt que si v est un chemin de X, d'origine x et d'extrémité x', les deux applications $\varphi_{u.v}$ et $\varphi_u \circ \varphi_v$ de $\Omega(X, x')$ dans $\Omega(X, x_0)$ sont homotopes. Quand on passe aux groupes d'homotopie, on obtient un homomorphisme

$$\psi_u : \pi_n(X, x) \to \pi_n(X, x_0) \qquad (n \geqslant 1) .$$

Et l'on a $\psi_{u.v} = \psi_u \circ \psi_v$. De plus, on voit aussitôt que l'application ψ_u ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin u d'origine x_0 et d'extrémité x données. En particulier, si u' désigne le chemin opposé à u, $\psi_{u.u'}$ est l'application identique de $\pi_n(X, x_0)$, et $\psi_{u'.u}$ est l'application identique de $\pi_n(X, x)$. De là résulte que ψ_u est un <u>isomorphisme</u> de $\pi_n(X, x_0)$ sur $\pi_n(X, x)$. Ainsi les groupes d'homotopie $\pi_n(X)$ attachés aux différents points d'une même composante connexe (par arcs) de X sont <u>isomorphes</u> entre eux ; toutefois, l'isomorphisme de $\pi_n(X, x_0)$ sur $\pi_n(X, x)$ dépend, en général, de la classe de chemins d'origine x_0 et d'extrémité x.

On voit que les groupes $\pi_n(X, x)$, pour chaque $n \geqslant 1$, forment un <u>système local</u> sur l'espace X. En particulier, prenant $x = x_0$, on voit que <u>le groupe $\pi_1(X, x_0)$ opère (à gauche) dans chacun des</u> $\pi_n(X, x_0)$: si u est un lacet d'origine x_0, l'automorphisme ψ_u de $\pi_n(X, x_0)$ est, par définition, celui défini par la classe de u dans $\pi_1(X, x_0)$. On voit notamment que, pour $n = 1$, $\pi_1(X, x_0)$ opère dans $\pi_1(X, x_0)$ par les automorphismes intérieurs

$$(\alpha, \beta) \to \alpha\beta\alpha^{-1} \quad .$$

THÉORÈME 3. - <u>Si l'espace X est muni d'une loi de composition continue pour laquelle x_0 est presque élément neutre, les opérations de $\pi_1(X, x_0)$ dans chacun des groupes $\pi_n(X, x_0)$ $(n \geqslant 1)$ sont triviales.</u>

DÉMONSTRATION. - Observons d'abord que si on identifie $\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0))$ au groupe-produit $\pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0)$, on obtient les opérations de $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ dans $\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0))$ en faisant le "produit" des opérations de $\pi_1(X)$ dans $\pi_n(X)$ et de $\pi_1(Y)$ dans $\pi_n(Y)$:

$$(\alpha, \beta).(u, v) = (\alpha.u, \beta.v) \quad ,$$

en notant $.$ l'opération du groupe π_1 dans le groupe π_n.

Considérons alors la loi de composition de l'espace X ; on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(X \times X) \times \pi_n(X \times X) & \longrightarrow & \pi_n(X \times X) \\
\downarrow f & & \downarrow g \\
\pi_1(X) \times \pi_n(X) & \longrightarrow & \pi_n(X)
\end{array}$$

où les applications horizontales sont celles du groupe π_1 dans le groupe π_n, et les applications f et g sont définies par l'application $X \times X \to X$.

Soient alors $\alpha \in \pi_1(X)$ et $u \in \pi_n(X)$; notons e_1 et e_n les éléments neutres de $\pi_1(X)$ et de $\pi_n(X)$; on a

$$(\alpha , e_1).(e_n , u) = (\alpha .e_n , e_1.u) = (e_n , u) \quad ;$$

en appliquant f et g , on obtient $\alpha .u = u$, ce qui démontre le théorème.