Séminaire Henri Cartan

Ichiro Satake

Surjectivité globale de l'opérateur Φ

Séminaire Henri Cartan, tome 10, nº 2 (1957-1958), exp. nº 16, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_2_A7_0>

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1957-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

SURJECTIVITÉ GLOBALE DE L'OPÉRATEUR Φ

par Ichiro SATAKE

Dans l'exposé précédent, nous avons vu que l'opérateur Φ est surjectif localement (lemme 1) ; nous allons maintenant démontrer que cet opérateur est encore surjectif globalement dans un sens que nous préciserons ci-dessous. Ce théorème, dû originairement à MAASS, sera un outil essentiel dans la démonstration du fait que l'espace compactifié $\Gamma' \backslash \mathfrak{S}_n^*$ est plongeable dans un espace projectif comme sous-variété algébrique normale (ou du moins, on en aura besoin dans le cas où Γ' est le groupe modulaire lui-même).

1. Position du problème.

Soit Γ' toujours un groupe commensurable du groupe modulaire Γ. On se donne une représentation $\rho^{(r)}$ de $GL(r, \underset{\sim}{C})$ de dimension 1 telle que

$$\rho^{(r)}(X) = \det (X)^k$$

avec k pair (que nous fixerons une fois pour toutes) ; posons

$$\mathcal{H}_{r\lambda} = \mathcal{H}_{\Gamma'_{r\lambda}}(\rho^{(r)}) , \quad \mathcal{H}_r = \prod_\lambda \mathcal{H}_{r\lambda} ,$$

$$\mathcal{S}_{r\lambda} = \mathcal{S}_{\Gamma'_{r\lambda}}(\rho^{(r)}) , \quad \mathcal{S}_r = \prod_\lambda \mathcal{S}_{r\lambda} ;$$

alors on peut définir un opérateur

$$(1.1) \qquad \Phi^n_{(r)} : f_n \longrightarrow (\dots , \Phi^n_{r\lambda} f_n , \dots) ,$$

qui applique $\mathcal{H}_n$ dans $\mathcal{H}_r$. Mais cet opérateur n'est pas surjectif en général. En effet, pour que $(\dots , f_{r\lambda} , \dots) \in \mathcal{H}_r$ appartienne à l'image de $\Phi^n_{(r)}$, il est nécessaire que la condition suivante soit remplie :

(*) Pour tout $s < r$ et pour tout μ, il existe un élément $f_{s,\mu}$ de $\mathcal{H}_{s\mu}$ tel que, chaque fois $(\lambda , \nu) \longrightarrow \mu$ (i.e. lorsque $M_{r\lambda} M_{s\nu}^{(r\lambda)s,\mu} = M' M_{s\mu} L$ avec $M' \in \Gamma'$, $L \in \mathfrak{G}^n_s$), on ait $\Phi^{r\lambda}_{s\nu} f_{r\lambda} = f_{s\mu} | \varpi_s(L)$. Désignons par $\mathcal{H}^o_r$ le sous-espace de $\mathcal{H}_r$ composé de tous les $(\dots , f_{r\lambda} , \dots)$ satisfaisant à cette condition ; alors ce que nous allons démontrer est le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Si k (pair) $> n + r + 1$, on a

$$\Phi^n_{(r)} \mathcal{H}_n = \mathcal{H}^o_r . \tag{1.2}$$

Dans le cas du groupe modulaire Γ , la condition (*) est toujours vérifiée, de sorte qu'on a la vraie surjectivité : $\Phi^n_r \mathcal{H}_n = \mathcal{H}_r$ (théorème dû à MAASS).

Or il est clair que $\mathcal{S}_r \subset \mathcal{H}^o_r$ et qu'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_r \longrightarrow \mathcal{H}^o_r \xrightarrow{(\Phi)} \mathcal{H}^o_{r-1}$$

où (Φ) désigne l'application qui applique $(\ldots , f_{r\lambda} , \ldots) \in \mathcal{H}^o_r$ dans $(\ldots , f_{r-1,\mu} , \ldots) \in \mathcal{H}^o_{r-1}$, avec $f_{r-1,\mu} = (\Phi^{r\lambda}_{r-1,\nu} f_{r\lambda}) | \varpi_{r-1}(L)^{-1}$ chaque fois que $(\lambda , \nu) \longrightarrow \mu$; alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^o_r \arrow[r, "(\Phi)"] & \mathcal{H}^o_{r-1} \\ \mathcal{H}_n \arrow[u, "\Phi^n_{(r)}"] \arrow[ur, "\Phi^n_{(r-1)}"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif : donc, si l'on veut démontrer le théorème par récurrence (croissante) sur r , il suffira de montrer premièrement que le théorème est vrai pour $r = 0$, et deuxièmement que $\mathcal{S}_r$ est contenu dans l'image de $\Phi^n_{(r)}$:

$$\mathcal{S}_r \subset \Phi^n_{(r)} \mathcal{H}_n . \tag{1.3}$$

En identifiant $\mathcal{S}_o$ avec $\mathcal{H}_o$, qui est un produit direct des espaces $\mathcal{H}_{o\lambda}$ isomorphes à $\mathbb{C}$, on peut considérer cette première assertion comme un cas particulier $(r = 0)$ de la seconde ; ainsi tout revient à démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - Pour chaque $f_{r\lambda} \in \mathcal{S}_{r\lambda}$ $(0 \leq r \leq n)$, il existe une forme $f_n \in \mathcal{H}_n$ telle que

$$\Phi^n_{r\lambda'} f_n = \begin{cases} f_{r\lambda} & (\lambda' = \lambda) , \\ 0 & (\lambda' \neq \lambda) , \end{cases} \tag{1.4}$$

dès que k (pair) est $> n + r + 1$.

Pour affirmer ceci, on va faire usage de "séries d'Eisenstein".

2. L'opérateur Φ sur les séries d'Eisenstein.

Soit S une matrice rationnelle et $\geqslant 0$, et posons

$$(2.1)\qquad \mathfrak{G}_S = \left\{ M = \begin{pmatrix} {}^tU & TU^{-1} \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{G}_o^n \; ; \; US\,{}^tU = S \; , \; \mathrm{Tr}(ST) : \text{entier} \right\} ,$$

$$\tilde{\Gamma}_S = \tilde{\Gamma} \cap \mathfrak{G}_S \; , \quad \Gamma'_S = \Gamma' \cap \mathfrak{G}_S \; ;$$

si de plus S est de la forme

$$(2.2)\qquad S = \begin{pmatrix} S_o^{(t)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad S_o^{(t)} \gg 0 ,$$

on a facilement

$$(2.3)\qquad \mathfrak{G}_t^n \supset \mathfrak{G}_S \supset \mathfrak{N}_t^n$$

et que $\Gamma' \cap \mathfrak{N}_t^n$ est d'indice fini dans Γ'_S .

Ceci dit, la série d'Eisenstein pour Γ' et S est par définition la série suivante

$$(2.4)\qquad E_{\Gamma';S}(Z) = \sum_{M:\,\Gamma'_S \backslash \Gamma'} \mathcal{E}(SZ)|M = \sum_{M:\,\Gamma'_S \backslash \Gamma'} \mathcal{E}(S.MZ)\det(CZ+D)^{-k}$$

(il faut remarquer que l'expression $\mathcal{E}(SZ)|M$ ne dépend que de la classe de M à gauche suivant Γ'_S , puisque, pour $M \in \Gamma'_S$, U étant unimodulaire et k pair, on a $\det(U)^k = 1$) ; on sait que, si $k > n + r + 1$, cette série converge normalement sur tout compact dans $\mathfrak{S}_n$ et représente une forme automorphe de poids k pour Γ' . Si $n = 0$, on considère que $E_{\Gamma';S}$ est la constante 1. (La définition des séries d'Eisenstein adoptée ici est différente de celle de l'exposé 9, mais, bien entendu, coïncide avec celle-ci à une constante près).

On considérera en outre des transformées de ces séries, i.e. pour $M_o \in \tilde{\Gamma}$, la série

$$(2.5)\qquad (E_{M_o^{-1}\Gamma' M_o;S}|M_o^{-1})(Z) = \sum_{M:\,(M_o^{-1}\Gamma' M_o)_S \backslash M_o^{-1}\Gamma'} \mathcal{E}(SZ)|M ,$$

qui représente encore une forme de $\mathcal{H}_n$. Si $M_o = \begin{pmatrix} {}^tU_o & T_o U_o^{-1} \\ 0 & U_o^{-1} \end{pmatrix} \in \tilde{\Gamma}_S$, on a évidemment $(M_o^{-1}\ \Gamma'\ M_o)_S = M_o^{-1}\ \Gamma'_S\ M_o$, de sorte qu'on a

(2.6) $$E_{M_o^{-1}\Gamma' M_o;S}|M_o^{-1} = \det(U_o)^{-k}\ E_{\Gamma';S}\ ;$$

par conséquent, il nous suffira de considérer les séries (2.5) pour un système de représentants de classes doubles de $\widetilde{\Gamma}$ suivant Γ' et $\widetilde{\Gamma}_S$. Plus généralement, pour $M_o \in \widetilde{\Gamma} \cap \mathfrak{G}_o^n$, on a la relation

(2.7) $$E_{M_o\Gamma' M_o^{-1};S}|M_o = \det(U_o)^k\ \ \mathcal{E}(ST_o)\ E_{\Gamma';U_oS{}^tU_o}\ ,$$

de sorte qu'on peut supposer, sans restreindre la généralité, que S est de la forme (2.2).

On s'occupe maintenant de calculer

(2.8) $$\Phi^n_{r\lambda}\ (E_{M_o^{-1}\Gamma' M_o;S}|M_o^{-1}) = \Phi^n_r(E_{M_o^{-1}\Gamma' M_o;S}|M_o^{-1}\ M_r\ \lambda)\ .$$

Pour cela, il faut calculer la limite suivante

(2.9) $$\Phi^n_r\ (E_{\Gamma';S}|M_o)(Z_o^{(r)}) = \lim_{Z\to Z_o^{(r)}}\ \sum_{M:\ \Gamma'_S\backslash\Gamma' M_o}\ \mathcal{E}(SZ)|M\ ,$$

où l'on suppose que Z reste dans la réunion d'un nombre fini de transformés (par $\widetilde{\Gamma}$) de Ω_n . Comme on le verra plus loin, on peut la calculer terme à terme, i.e. on peut échanger la limite et la sommation ; d'autre part, la limite de chaque terme se calcule comme suit :

(2.10) $$\lim_{Z\to Z_o^{(r)}}\ \mathcal{E}(SZ)|M = \begin{cases} \det(U)^k\ \det(D_2)^{-k}\ \ \mathcal{E}(S^{(r)}\ Z_o^{(r)})|L_1 \\ \qquad\qquad \text{si}\ \ t \leq r\ ,\ M = NL\ \in\ \widetilde{\Gamma}_S\,\mathfrak{G}^n_r\ , \\ 0 \qquad\qquad \text{sinon,} \end{cases}$$

où l'on pose

$$S^{(r)} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} S_o^{(t)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\!\!\begin{array}{l} \}\,t \\ \}\,r-t \end{array}\ ,\quad N = \begin{pmatrix} {}^tU & * \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \in \widetilde{\Gamma}_S\ ,$$

$$L = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & * \\ * & A_2 & * & * \\ C_1 & 0 & D_1 & * \\ 0 & 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix} \in \widetilde{\Gamma} \cap \mathfrak{G}^n_r\ ,\quad L_1 = \varpi_r(L) = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}\ .$$

(Pour la démonstration de ces résultats, voir l'appendice.)

Donc, en supposant $t \leq r$, (2.9) s'écrit

$$= \sum_{M=NL:\, \Gamma'_S \backslash \Gamma' M_o \cap \tilde{\Gamma}_S \mathfrak{G}^n_r} \det(U)^k \det(D_2)^{-k}\ \mathcal{E}(S^{(r)}\ Z_o^{(r)})|L_1 .$$

Lorsque $M = NL$ parcourt $\Gamma'_S \backslash \Gamma' M_o \cap \tilde{\Gamma}_S \mathfrak{G}^n_r$, L parcourt

$$\tilde{\Gamma}_S \cap \mathfrak{G}^n_r \backslash \tilde{\Gamma}_S\ \Gamma' M_o \cap \mathfrak{G}^n_r$$

et, comme $\tilde{\Gamma}_S \cap \mathfrak{G}^n_r \supset \tilde{\Gamma} \cap \mathfrak{N}^n_r$, vu (2.3), et que $\varpi_r(\tilde{\Gamma}_S \cap \mathfrak{G}^n_r) = (\tilde{\Gamma}_r)_{S^{(r)}}$, $L_1 = \varpi_r(L)$ parcourt $(\tilde{\Gamma}_r)_{S^{(r)}} \backslash \varpi_r(\tilde{\Gamma}_S\ \Gamma' M_o \cap \mathfrak{G}^n_r)$; on voit d'ailleurs que la constante $\det(U)^k . \det(D_2)^{-k}$ ne dépend que de L_1 (on la désigne par c_{L_1}). Donc (2.9) s'écrit

$$\sum_{L_1 : (\tilde{\Gamma}_r)_{S^{(r)}} \backslash \varpi_r(\tilde{\Gamma}_S\ \Gamma' M_o \cap \mathfrak{G}^n_r)} c_{L_1}\ \mathcal{E}(S^{(r)}\ Z_o^{(r)})|L_1 .$$

On décompose $\varpi_r(\tilde{\Gamma}_S\ \Gamma' M_o \cap \mathfrak{G}^n_r)$ en classes doubles suivant $(\tilde{\Gamma}_r)_{S^{(r)}}$ et $\varpi_r(M_o^{-1}\ \Gamma' M_o \cap \mathfrak{G}^n_r)$ comme suit :

$$\varpi_r(\tilde{\Gamma}_S\ \Gamma' M_o \cap \mathfrak{G}^n_r) = \bigcup_i (\tilde{\Gamma}_r)_{S^{(r)}}\ L_{1,i}\ \varpi_r(M_o^{-1}\ \Gamma' M_o \cap \mathfrak{G}^n_r) , \tag{2.11}$$

où, comme on le voit facilement, il n'y a qu'un nombre fini de classes ; alors

$$(\tilde{\Gamma}_r)_{S^{(r)}} \backslash (\tilde{\Gamma}_r)_{S^{(r)}}\ L_{1,i}\ \varpi_r(M_o^{-1}\ \Gamma' M_o \cap \mathfrak{G}^n_r)$$

$$\approx (L_{1,i}\ \varpi_r(M_o^{-1}\ \Gamma' M_o \cap \mathfrak{G}^n_r) L_{1,i}^{-1})_{S^{(r)}} \backslash L_{1,i}\ \varpi_r(M_o^{-1}\ \Gamma' M_o \cap \mathfrak{G}^n_r)$$

et il est facile de voir que c_{L_1}, pour $L_1 \in L_{1,i}\ \varpi_r(M_o^{-1}\ \Gamma' M_o \cap \mathfrak{G}^n_r)$, ne dépend que de i (on le désigne par c_i). Donc la sommation étendue à cette partie est précisément une transformée d'une série d'Eisenstein pour

$$\varpi_r(M_o^{-1}\ \Gamma' M_o \cap \mathfrak{G}^n_r)\ ,\ S^{(r)}\ ;$$

on obtient ainsi le résultat suivant :

$$\Phi^n_r(E_{\Gamma';S}|M_o) = \sum_i c_i\ E_{L_{1,i}\varpi_r(M_o^{-1}\ \Gamma' M_o \cap \mathfrak{G}^n_r) L_{1,i}^{-1};S^{(r)}}\ |L_{1,i} . \tag{2.12}$$

Si, en particulier, $r = t$, on a $\mathfrak{G}_S \subset \mathfrak{G}^n_t = \mathfrak{G}^n_r$, de sorte qu'on a

$$\widetilde{\Gamma}_S \Gamma' M_o \cap \mathfrak{G}^n_r = \widetilde{\Gamma}_S(\Gamma' M_o \cap \mathfrak{G}^n_r) \ ;$$

il en résulte que dans (2.11) il y a au plus une classe, et qu'on a

$$(2.13) \qquad \Phi^n_r(E_{\Gamma';S}|M_o) = \begin{cases} c\, E_{\varpi_r(\Gamma' \cap \mathfrak{G}^n_r);S^{(r)}}|L_1 & \text{si} \quad \Gamma' M_o \cap \mathfrak{G}^n_r \neq \emptyset \\ (L \in \Gamma' M_o \cap \mathfrak{G}^n_r\,, \quad L_1 = \varpi_r(L)\,, \quad c = \det(D_{2_L})^{-k}) & \\ 0 \quad \text{sinon} \ ; & \end{cases}$$

cette formule appliquée à (2.8) donne

$$(2.14) \quad \Phi^n_{r\lambda}(E_{M_o^{-1}\Gamma' M_o;S}|M_o^{-1}) = \begin{cases} c\, E_{L_1\Gamma'_{r\lambda}L_1^{-1};S^{(r)}}|L_1 & \text{si} \quad M_o \in \Gamma' M_{r\lambda}(\widetilde{\Gamma} \cap \mathfrak{G}^n_r) \\ (L \in M_o^{-1}\Gamma' M_{r\lambda} \cap \mathfrak{G}^n_r, \quad L_1 = \varpi_r(L), \quad c = \det(D_{2_L})^{-k}) & \\ 0 \quad \text{sinon} \ . & \end{cases}$$

On notera que si M_o parcourt $M_{r\lambda}(\widetilde{\Gamma} \cap \mathfrak{G}^n_r)$, L_1 parcourt $\widetilde{\Gamma}_r$.

D'un autre côté, on sait que l'espace des Spitzenformen $\mathfrak{S}_{r\lambda}$ est engendré par des transformées de séries d'Eisenstein

$$E_{M_1^{-1}\Gamma'_{r\lambda}M_1;S^{(r)}}|M_1^{-1} \ , \quad S^{(r)} \gg 0 \ , \quad M_1 \in \widetilde{\Gamma}_r$$

(ceci est démontré pour le groupe modulaire Γ dans l'exposé 9 ; le cas général en résulte facilement. Voir n° 3). Donc notre proposition, ainsi que le théorème 1, est démontrée.

Nous avons en fait établi le résultat plus fort que voici :
<u>si</u> k (<u>pair</u>) $> n + r + 1$, <u>tout élément de</u> $\mathcal{H}^o_r$ <u>est l'image par</u> $\Phi^n_{(r)}$ <u>d'une combinaison linéaire de transformées de séries d'Eisenstein</u> $E_{M_o^{-1}\Gamma' M_o;S}|M_o^{-1}$.
En particulier, nous obtenons le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - <u>Si</u> k <u>est pair et</u> $> 2n$, <u>toute forme automorphe de poids</u> k <u>pour</u> Γ' <u>est une combinaison linéaire de transformées de séries d'Eisenstein</u>

$$E_{M_o^{-1}\Gamma' M_o;S}|M_o^{-1} \ .$$

REMARQUE. - Dans le calcul de (2.8) nous nous sommes bornés au cas de $r = t$, ce qui a été suffisant pour notre considération. Le résultat général pour $t \leqslant r$ est comme suit.

Décomposons $\widetilde{\Gamma}$ en classes doubles suivant Γ' et $\widetilde{\Gamma}_S$:

$$(2.15) \qquad \widetilde{\Gamma} = \bigcup_{\rho} \Gamma' M_{S,\rho} \widetilde{\Gamma}_{S'}$$

et de même $\widetilde{\Gamma}_r$ suivant $\Gamma'_{r\lambda}$, $(\widetilde{\Gamma}_r)_{S^{(r)}}$:

$$(2.16) \qquad \widetilde{\Gamma}_r = \bigcup_{\tau} \Gamma'_r \, M^{(r\lambda)}_{S,\tau} \, (\widetilde{\Gamma}_r)_{S^{(r)}} ;$$

alors on a

$$\widetilde{\Gamma} \cap \mathfrak{G}^n_r = \bigcup_{\tau} (M^{-1}_{r\lambda} \; \Gamma' \, M_{r\lambda} \cap \mathfrak{G}^n_r) \; \iota_n(M^{(r\lambda)}_{S,\tau}) \; (\widetilde{\Gamma}_S \cap \mathfrak{G}^n_r)$$

et par suite

$$(2.17) \qquad \widetilde{\Gamma} = \bigcup_{\lambda,\tau} \Gamma' \, M_{r\lambda} \; \iota_n(M^{(r\lambda)}_{S;\tau}) \; (\widetilde{\Gamma}_S \cap \mathfrak{G}^n_r) ;$$

ceci est la décomposition de $\widetilde{\Gamma}$ en classes doubles suivant Γ' et $\widetilde{\Gamma}_S \cap \mathfrak{G}^n_r$, décomposition plus fine que (2.15). On écrit

$$(2.18) \qquad (\lambda , \tau) \longrightarrow \rho \text{ , si } M_{r\lambda} \; \iota_n(M^{(r\lambda)}_{S,\tau}) \in \Gamma' M_{S,\rho} \; \widetilde{\Gamma}_S ;$$

alors on a

$$(2.19) \qquad \Phi^n_{r\lambda}(E_{M^{-1}_{S,\rho} \Gamma' M_{S,\rho} ; S} | M^{-1}_{S,\rho})$$
$$= \sum_{\substack{\tau : \\ (\lambda , \tau) \to \rho}} c_\tau \, E_{M^{(r\lambda)-1}_{S,\tau} \Gamma'_{r\lambda} M^{(r\lambda)}_{S,\tau} ; S^{(r)}} | M^{(r\lambda)-1}_{S,\tau} \quad \text{(somme finie)},$$

où $c_\tau = \det(U_N)^k$ avec $N \in M^{-1}_{S,\rho} \Gamma' M_{r\lambda} \; M^{(r\lambda)}_{S,\tau} \cap \widetilde{\Gamma}_S$.

3. Considérations supplémentaires sur les séries d'Eisenstein.

Dans ce numéro on va montrer que l'espace des Spitzenformen est engendré par des transformées de séries d'Eisenstein, en le réduisant au cas déjà établi, i.e. au cas du groupe modulaire. Pour cela, il sera commode de considérer des séries d'Eisenstein plus générales en tenant compte des multiplicateurs. Soient donc ρ une représentation irréductible quelconque de $GL(n , \underset{\sim}{C})$, μ' un multiplicateur de Γ' , et soient

$$S = \begin{pmatrix} S^{(t)}_o & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^{(t)}_o \gg 0 ,$$

$$\omega \in \mathrm{Hom}\,(F_{\mu'(t)}\,,\, F_{\rho(t)});$$

posons

(3.1) $$\Gamma'_{S,\omega} = \Big\{ M = \begin{pmatrix} {}^tU & TU^{-1} \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma' \cap \mathfrak{G}^n_0 \;;$$

$$\mathcal{E}(SZ)\,\omega|M = \mathcal{E}(SZ)\,\omega\,, \quad \text{i.e.}\quad US{}^tU = S\,,\ \rho(U)\circ\omega\circ\mu(M) = \mathcal{E}(-ST)\,\omega \Big\}\;;$$

alors on a encore

(3.2) $$\Gamma' \cap \mathfrak{G}^n_t \supset \Gamma'_{S,\omega} \supset \Gamma' \cap \mathfrak{H}^n_t\;;$$

on notera que cette dernière inégalité est équivalente à la condition

$$\omega \in \mathrm{Hom}(F_{\mu'(t)}\,,\, F_{\rho(t)})$$

et que d'après cela les conditions pour que $M \in \Gamma' \cap \mathfrak{G}^n_t$ appartienne à $\Gamma'_{S,\omega}$ s'expriment par des conditions pour $\varpi_t(M)$.

La série d'Eisenstein pour Γ' et S , ω est par définition

(3.3) $$E_{\Gamma';S,\omega}(Z) = \sum_{M:\ \Gamma'_{S,\omega}\backslash\Gamma'} \mathcal{E}(SZ)\;\omega|\,M\,,$$

qui représente une forme d'espèce (μ', ρ) pour Γ' lorsque $\alpha_n > n + t + 1$. On se donne en outre un système d'isomorphismes $\sigma_M :\ F_{\mu'_M} \longrightarrow F_{\mu'}$ introduit dans l'exposé 14, n° 4, et on considère des transformées de séries d'Eisenstein comme suit :

(3.4) $$(E_{M_0^{-1}\Gamma' M_0;S,\omega}|M_0^{-1})(Z) = \sum_{M:\,(M_0^{-1}\Gamma' M_0)_{S,\omega}\backslash M_0^{-1}\Gamma'} \mathcal{E}(SZ)\;\omega|\,M$$
$$= \sum_M \rho(CZ+D)^{-1}\mathcal{E}(SMZ)\;\omega\circ\sigma^{-1}_{M_0}\;\mu'\,(M_0M)\,,$$

où $\omega \in \mathrm{Hom}(F_{\mu'_{M_0}(t)}\,,\, F_{\rho(t)})$. Alors notre but est de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 3. – <u>Si</u> $\alpha_n > 2n$, <u>toute Spitzenform d'espèce</u> (μ', ρ) <u>pour</u> Γ' <u>est une combinaison linéaire de transformées de séries d'Eisenstein</u> (3.4)

On démontre ce théorème en quelques étapes :

1. <u>Soit</u> Γ'' <u>un sous-groupe d'indice fini de</u> Γ' . <u>Si le théorème est vrai pour</u> Γ'' , <u>il en est de même pour</u> Γ' .

En effet, soit $f' \in \mathcal{S}_{\Gamma'}(\mu', \rho)$, et soit μ'' la restriction de μ' à Γ'' ; alors il est clair que $f' \in \mathcal{S}_{\Gamma''}(\mu'', \rho)$; donc, par l'hypothèse, f' est une combinaison linéaire des transformées de séries d'Eisenstein

$$E_{M_o^{-1}\Gamma'' M_o ; S, \omega} | M_o^{-1} ,$$

où $\omega \in \mathrm{Hom}(F_{\mu''_{M_o}(t)}, F_{\rho(t)})$. Soit $\Gamma' = \bigcup_{i=1}^{\mathcal{K}'} \Gamma'' M_i'$; alors, comme

$$f' = \frac{1}{\mathcal{K}'} \sum_i f' | M_i' ,$$

f' est une combinaison linéaire de

$$\frac{1}{\mathcal{K}'} \sum_i E_{M_o^{-1}\Gamma'' M_o ; S, \omega} | M_o^{-1} M_i' ;$$

mais ceci est égal à

$$= \frac{1}{\mathcal{K}'} \sum_i \overline{\sum_{M : (M_o^{-1}\Gamma'' M_o)_{S,\omega} \backslash M_o^{-1}\Gamma''}} \mathcal{E}(SZ)\,\omega\, | M M_i'$$

$$= \frac{1}{\mathcal{K}'} \overline{\sum_{M : (M_o^{-1}\Gamma'' M_o)_{S,\omega} \backslash M_o^{-1}\Gamma'}} \mathcal{E}(SZ)\,\omega\, | M .$$

Or on pose

$$\omega' = \overline{\sum_{M : M_o^{-1}\Gamma'' M_o \cap \mathfrak{N}_t^n \backslash M_o^{-1}\Gamma' M_o \cap \mathfrak{N}_t^n}} \det(U_2)^{-\alpha n}\, \omega \circ \mu'_{M_o}(M) \quad \left(M = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & * \\ * & {}^tU_2 & * & * \\ 0 & 0 & E & * \\ 0 & 0 & 0 & U_2^{-1} \end{pmatrix} \right) ;$$

alors c'est une sommation finie et l'on a $\omega' \in \mathrm{Hom}(F_{\mu'_{M_o}(t)}, F_{\rho(t)})$. La sommation ci-dessus s'écrit alors

$$= \frac{1}{\mathcal{K}'} \overline{\sum_{M : (M_o^{-1}\Gamma'' M_o)_{S,\omega} (M_o^{-1}\Gamma' M_o \cap \mathfrak{N}_t^n) \backslash M_o^{-1}\Gamma'}} \mathcal{E}(SZ)\,\omega' | M$$

$$= \frac{\lambda'}{\mathcal{K}'} E_{M_o^{-1}\Gamma' M_o ; S, \omega'} | M_o^{-1}$$

où $\lambda' = [(M_o^{-1}\Gamma' M_o)_{S,\omega'} : (M_o^{-1}\Gamma'' M_o)_{S,\omega} (M_o^{-1}\Gamma' M_o \cap \mathfrak{N}_t^n)]$.

Notre assertion est donc démontrée.

2. Le théorème est vrai pour un sous-groupe Γ' d'indice fini de Γ.

En effet, soit $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{\varkappa} \Gamma' M_i$ $(M_1 = E)$ et soit μ la "représentation induite" de Γ définie par μ' et par cette décomposition ; plus précisément, μ est une représentation de Γ dans

(3.5) $$F_\mu = F_{\mu'_{M_1}} \oplus \dots \oplus F_{\mu'_{M_\varkappa}}$$

définie par

(3.6) $$\mu(M) = (\sigma_{M_i}^{-1} \circ \mu'(M_i M M_j^{-1}) \circ \sigma_{M_j}) \qquad (M \in \Gamma) \ ;$$

il est clair que μ est un multiplicateur de Γ dans F_μ.

Cela fait, soit $f' \in \mathcal{H}_{\Gamma'}(\mu', \rho)$; on y attache une forme $f \in \mathcal{H}_\Gamma(\mu, \rho)$ de la manière suivante : soit $Z \in \mathfrak{S}_n$; définissons $f(Z)$ par

(3.7) $$f(Z) : \alpha = (a_i) \longrightarrow \sum_{i=1}^{\varkappa} (f'|M_i)(Z)\, a_i \ ,$$

où $\alpha \in F_\mu$, $a_i \in F_{\mu'_{M_i}}$; alors, si $M \in \Gamma$, $M_i M = M' M_j$, $M' \in \Gamma'$, on a

$$\begin{aligned} f(MZ) : \alpha = (a_i) \longrightarrow & \sum_i (f'|M_i)(MZ)\, a_i \\ &= \sum_i \rho(C_i Z + D_i)^{-1} \circ f'(M_i MZ) \circ \sigma_{M_i} a_i \\ &= \sum_j \rho(CZ + D) \circ \rho(C_j Z + D_j)^{-1} \circ \rho(C' M_j Z + D')^{-1} \\ &\qquad f'(M' M_j Z) \circ \mu'(M') \circ \sigma_{M_j} (\mu(M)^{-1} \alpha)_j \\ &= \rho(CZ + D) \sum_j (f'|M_j)(Z) (\mu(M)^{-1} \alpha)_j \\ &= \rho(CZ + D) \circ f(Z) \circ \mu(M)^{-1} \alpha \ , \end{aligned}$$

ce qui prouve que $f \in \mathcal{H}_\Gamma(\mu, \rho)$. En outre, il est clair d'après la définition que $f' \in \mathcal{S}_{\Gamma'}(\mu', \rho)$ entraîne $f \in \mathcal{S}_\Gamma(\mu, \rho)$ (et réciproquement).

Soit maintenant $f' \in \mathcal{S}_{\Gamma'}(\mu', \rho)$; alors d'après ce que nous avons dit et d'après le théorème 2, corollaire de l'exposé 9, la forme correspondante f est une combinaison linéaire de séries d'Eisenstein $E_{\Gamma; S, \omega}$; soit

$$\Gamma = \bigcup_k \Gamma' M_k \Gamma_{S,\omega}$$

la décomposition de Γ en classes doubles suivant Γ' et $\Gamma_{S,\omega}$, où k

parcourt un sous-ensemble de $\{1, \ldots, \varkappa\}$ (contenant 1) ; alors

$$E_{\Gamma;S,\omega} = \sum_k \sum_{M:\Gamma_{S,\omega}\backslash\Gamma_{S,\omega}M_{\varkappa}^{-1}\Gamma'} \mathcal{E}(SZ)\omega|M$$

$$= \sum \sum \rho(CZ+D)^{-1}\ \mathcal{E}(S.MZ)\ (\omega_1,\ldots,\omega_{\varkappa})(\sigma_{M_i}^{-1}\circ\mu'(M_iMM_j^{-1})\circ\sigma_{M_j})\ ,$$

où $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{\varkappa})$, $\omega_i \in \mathrm{Hom}(F_{\mu'_{M_i}}, F_\rho)$; or, pour $M \in M_{\varkappa}^{-1}\Gamma'$,

on a $M_i MM_1^{-1} \in \Gamma'$, si et seulement si $i = k$, i.e. la première colonne de la matrice $(\sigma_{M_i}^{-1} \circ \mu'(M_i MM_j^{-1}) \circ \sigma_{M_j})$ est

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \sigma_{M_k}^{-1} \circ \mu'(M_k M) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ;$$

donc la première composante de cette série est

$$= \sum_k \sum_{M:M_k^{-1}\Gamma'M_k\cap\Gamma_{S,\omega}\backslash M_k^{-1}\Gamma'} \rho(CZ + D)^{-1}\ \mathcal{E}(S.MZ)\,\omega_k \circ \sigma_{M_k}^{-1} \circ \mu'(M_k M) .$$

De même, on voit que $M_k^{-1}\Gamma' M_k \cap \Gamma_{S,\omega} \subset (M_k^{-1}\Gamma' M_k)_{S,\omega_k}$, ce qui implique que $\omega_k \in \mathrm{Hom}(F_{\mu'_{M_k}(t)}, F_{\rho(t)})$; donc la série ci-dessus s'écrit

$$= \lambda\ E_{M_k^{-1}\Gamma'M_k;S,\widetilde{\omega}_k}|M_k^{-1} ,$$

où $\lambda = [(M_k^{-1}\Gamma' M_k)_{S,\omega_k} : M_k^{-1}\Gamma' M_k \cap \Gamma_{S,\omega}]$. Par conséquent, f' , qui est la première composante de f , est une combinaison linéaire des transformées de séries d'Eisenstein $E_{M_k^{-1}\Gamma' M_k;S,\omega_k}|M_k^{-1}$, ce qui achève notre démonstration.

Ajoutons finalement la remarque suivante. Les résultats obtenus aux n° 1 et 2 se généralisent facilement au cas des séries d'Eisenstein considérées dans ce numéro. Les notations étant comme ci-dessus, on remplace ρ par la représentation

$$\rho_k : X \longrightarrow \det(X)^k\ \rho(X)$$

avec k pair ; il faut marquer que la définition de $\mu_M^{(r)}$, qui dépend forcément de ρ_k , ne dépend pas du choix de k . Soit

(3.8) $\varpi_r((\widetilde{\Gamma}\cap\mathfrak{N}_t^n)\Gamma'M_0\cap\mathfrak{G}_r^n) = \bigcup_i \varpi_r(\Gamma'_{S,\omega}(\widetilde{\Gamma}\cap\mathfrak{N}_t^n)\cap\mathfrak{G}_r^n)L_{1,i}\varpi_r(M_0^{-1}\Gamma'M_0\cap\mathfrak{G}_r^n)$

une décomposition en classes doubles ; on pose

$$L_{1,i} = \varpi_r(L_i) \quad , \quad L_i \in (\tilde{\Gamma} \cap \mathcal{H}_t^n)\Gamma' M_o \cap \mathfrak{G}_r^n ,$$

$$L_i = N_i^{-1} M_i \ , \quad N_i \in \Gamma'_{S,\omega}(\tilde{\Gamma} \cap \mathcal{H}_t^n) \ , \quad M_i \in \Gamma' M_o \ ;$$

alors on voit que $\rho(U_{N_i}) \circ \omega \circ \mu_{N_i}$ ne dépend que de L_i (on le désigne par ω_i) et l'on obtient, si k est suffisamment grand,

(3.9) $$\Phi_r^n(E_{\Gamma';S,\omega}|M_o) = \sum_i E_{\varpi_r(N_i^{-1}\Gamma' N_i \cap \mathfrak{G}_r^n);S^{(r)},\omega_i}|L_{1,i}$$

(où la notation $|L_{1,i}$ est entendue dans le sens de l'exposé 14, n° 4). Il en résulte que les théorèmes 1, 2 sont encore vrais pour les formes d'espèce $(\mu' \ , \ \rho_k)$ dès que k est suffisamment grand.

APPENDICE

1. Démonstration de (2.10).

On a besoin d'abord du lemme suivant :

LEMME (SIEGEL). - Comme système de représentants de Γ modulo à gauche $\Gamma \cap \mathfrak{G}_o^n$, on peut prendre les matrices de la forme suivante

(1) $$\iota_n(M_o)\begin{pmatrix} {}^tV & 0 \\ 0 & V^{-1} \end{pmatrix} ,$$

$$M_o = \begin{pmatrix} A_o & B_o \\ C_o & D_o \end{pmatrix} \in \Gamma_S \quad (0 \leq s \leq n) \ , \quad \det(C_o) \neq 0 \ , \quad V : \text{unimodulaire.}$$

(Plus précisément, si M_o parcourt un système complet de représentants par rapport à la relation d'équivalence :

$$M_o = \begin{pmatrix} A_o & B_o \\ C_o & D_o \end{pmatrix} \sim M'_o = \begin{pmatrix} A'_o & B'_o \\ C'_o & D'_o \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists\, U_o : \text{unimodulaire}, \ U_o C_o = C'_o \, , \, U_o D_o = D'_o$$

et si V parcourt celui-ci par rapport à la relation d'équivalence :
$V = (Q \ *) \sim V' = (Q' \ *)$ (où Q , Q' sont de type $(n \ , \ s)$ $\Leftrightarrow \exists\, U_o$: unimodulaire, $QU_o = Q'$, alors les matrices (1) forment un système complet de représentants de

$\Gamma \cap \mathfrak{G}_0^n \backslash \Gamma .)$

En tenant compte du fait que $\tilde{\Gamma} = (\tilde{\Gamma} \cap \mathfrak{G}_0^n)\,\Gamma$, il en résulte que toute matrice $M \in \tilde{\Gamma}$ s'écrit

(2) $$M = \begin{pmatrix} {}^tU & TU^{-1} \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 & 0 & B_0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ C_0 & 0 & D_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tV & 0 \\ 0 & V^{-1} \end{pmatrix} ,$$

$$U = (\overbrace{P}^{r}\ *) , \quad V = (\overbrace{Q}^{s}\ *) .$$

Alors

$$\begin{aligned} |\det(U)|\ |\det(CZ + D)| &= |\det(C_0\ Z[Q] + D_0)| \\ &= |\det(C_0)|\ |\det(Z[Q] + C_0^{-1}\ D_0)| \\ &\geqslant \det(Y[Q]) , \end{aligned}$$

où l'on peut supposer que $Y[Q]$ est réduite au sens de Minkowski, de sorte qu'on a

$$\det(Y[Q]) \geqslant c_s \prod_{i=1}^{s} Y[q_i] ,$$

c_s désignant une constante positive ne dépendant que de s , et q_i les colonnes de Q . Il en résulte (en supposant $k > 0$) que la limite (2.10) est nulle sauf si

(3) $$s \leqslant r , \quad Q = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} Q_1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}\, r \\ \end{array}$$

Donc supposons (3) ; alors on peut prendre V de la forme

$$V = \begin{pmatrix} \overbrace{V_1}^{r} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} ;$$

en posant $Z = \begin{pmatrix} \overbrace{Z_1}^{r} & Z_{12} \\ {}^tZ_{12} & Z_2 \end{pmatrix}$, on a

$$MZ = (\iota_n(M_o)(Z[V]))[U] + T$$
$$= \begin{pmatrix} \iota_r(M_o)(Z_1[V_1]) & * \\ * & Z_2 - * \end{pmatrix}[U] + T$$

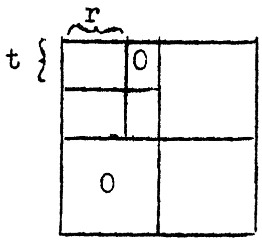
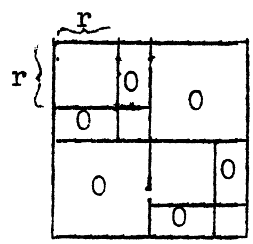
et par suite

$$\left| \varepsilon\left(\begin{pmatrix} S_o & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} MZ \right) \right| = e^{-2\pi \operatorname{Tr}\left(S_o\left(\begin{pmatrix} * & * \\ * & Y_2 - * \end{pmatrix}[P]\right)\right)} .$$

Il en résulte que la limite (2.10) est nulle sauf si

(4) $$t \leqslant r , \quad P = \begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}r \\ \end{matrix} .$$

En définitive, pour que la limite (2.10) ne soit pas nulle, il faut que M soit de la forme suivante

(5) $M =$  $\iota_n(M_o)$ 

ce qui est équivalent à $M \in (\widetilde{\Gamma} \cap \mathfrak{X}^n_t)\mathfrak{G}^n_r = \widetilde{\Gamma}_S \mathfrak{G}^n_r$. De plus, s'il en est ainsi, posons $M = NL$,

$$N = \begin{pmatrix} {}^tU & * \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \in \widetilde{\Gamma}_S , \quad L = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & * \\ * & A_2 & * & * \\ C_1 & 0 & D_1 & * \\ 0 & 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix} \in \widetilde{\Gamma} \cap \mathfrak{G}^n_r ;$$

alors on a

$$\varepsilon(SZ) \,|M = \det(U)^k \ \varepsilon(SZ) \,|L$$
$$= \det(U)^k \ \varepsilon\left(\begin{pmatrix} S_o & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 Z_1 & * \\ * & * \end{pmatrix} \right) \det\left(\begin{pmatrix} C_1 Z_1 + D_1 & * \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \right)^{-k}$$
$$= \det(U)^k \det(D_2)^{-k} \ \varepsilon(S^{(r)} L_1 Z_1) \det(C_1 Z_1 + D_1)^{-k} ,$$

qui ne dépend que de Z_1 . La formule (2.10) est donc démontrée.

2. Démonstration de la commutativité de la limite et de la sommation dans (2.9).

Les notations étant comme dans le n° 2, il s'agit de prouver que

$$\Phi_r^n(E_{\Gamma';S}|M_o)(Z_o^{(r)}) = \overline{\sum_{M:\,\Gamma'_S\backslash\Gamma' M_o}} \left(\lim_{Z \to Z_o^{(r)}} \mathcal{E}(SZ)|M_o \right) \tag{6}$$

Nous avons déjà vu que la limite (à droite de (6)) existe et que la série converge normalement sur tout compact dans $\mathfrak{S}_n$; en fait, nous avons montré que le membre à droite de (6) s'exprime comme une combinaison linéaire de transformées de séries d'Eisenstein (Cf. (2.19)) ; il résulte de là, et de la transitivité de l'opérateur Φ , qu'il nous suffit de démontrer (6) dans le cas où $r = n - 1$. On peut supposer de plus que Z est de la forme

$$Z = \begin{pmatrix} Z_o^{(n-1)} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} ;$$

en fixant Z_o , on considère les fonctions de Z comme fonctions de z ; ainsi on a facilement

$$\det(CZ + D) = cz + d ,$$

$$\mathrm{Tr}(S.MZ) = \frac{az + b}{cz + d} = L_M(z) ,$$

de sorte que

$$\mathcal{E}(SZ)|M = e^{2\pi i L_M(z)}(cz + d)^{-k} . \tag{7}$$

Or soit

$$T_o = \begin{pmatrix} E & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & t_o \end{matrix} \\ 0 & E \end{pmatrix} \qquad (t_o > 0)$$

un générateur du groupe cyclique libre

$$M_o^{-1}\,\Gamma'\,M_o \cap \left\{ \begin{pmatrix} E & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{matrix} \\ 0 & E \end{pmatrix} \right\} ,$$

et soit

$$\begin{aligned} \Gamma' M_o &= \bigcup_i \Gamma'_S M_i \{T_o\} \\ &= \bigcup_i \bigcup_{j \,(\mathrm{mod}\ n_i)} \Gamma'_S M_i T_o^j , \end{aligned} \tag{8}$$

où n_i désigne l'ordre de $M_i^{-1}\,\Gamma'_S\,M_i \cap \{T_o\}$ (fini ou non) ; alors $(E_{\Gamma';S}\,|M_o)(Z)$ et $\sum_{j (\mathrm{mod}\ n_i)} \mathcal{E}(SZ)\,M_i\,T_o^j$, comme fonctions de z , ont la période t_o ; par conséquent, en posant $\zeta = e^{2\pi i \frac{z}{t_o}}$, on peut écrire

(9) $$\varphi(\zeta) = (E_{\Gamma';S}\,|M_o)(Z) = \sum_i \varphi_i(\zeta)$$

(10) $$\varphi(\zeta) = \sum_{j (\mathrm{mod}\ n_i)} \mathcal{E}(SZ)\,|M_i\,T_o^j \ .$$

On peut constater facilement que $n_i = \infty$ si et seulement si $c_{M_i} = 0$, et qu'alors, d'après un résultat de Petersson, la série du membre à droite de (10) possède une majorante dans un domaine : $|x| < u$, $y > 1/u$ $(u > 0)$, d'où il résulte que la fonction $\varphi_i(\zeta)$ est holomorphe dans un voisinage de 0 et qu'on a

(11) $$\varphi_i(0) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \lim_{y \to \infty} \mathcal{E}(SZ)\,|M_i\,T_o^j \ .$$

Ceci dit, comme la série d'Eisenstein converge normalement sur tout compact dans $\mathfrak{S}_n$, on a

$$\begin{aligned}
\Phi^n_{n-1}(E_{\Gamma';S}\,|M_o)(Z_o) &= \varphi(0) \\
&= \frac{1}{t_o}\int_{y_{oi}}^{t_o+y_{oi}} (E_{\Gamma';S}\,|M_o)(Z)\,dz \\
&= \frac{1}{t_o}\int_{y_{oi}}^{t_o+y_{oi}} \sum_i \sum_j \mathcal{E}(SZ)\,|M_i\,T_o^j \\
&= \sum_i \frac{1}{t_o}\int_{y_{oi}}^{t_o+y_{oi}} \sum_j \mathcal{E}(SZ)\,|M_i\,T_o^j \\
&= \sum_i \varphi_i(0) \ ,
\end{aligned}$$

ce qui, avec (11) et avec la convergence absolue du membre à droite de (6), prouve la formule (6).

BIBLIOGRAPHIE

On doit l'idée principale de cet exposé à :

MAASS (Hans). - Über die Darstellung der Modulformen n-ten Grades durch Poincarésche Reihen, Math. Annalen, t. 123, 1951, p. 125-151.

où l'on trouvera aussi les détails des démonstrations données dans l'Appendice. Les lemmes de Siegel et de Petersson cités plus haut se trouvent respectivement dans :

SIEGEL (Carl L.). - Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, Math. Annalen, t. 116, 1939, p. 617-657.

PETERSSON (Hans). - Über den Bereich absoluter Konvergenz der Poincaréschen Reihen, Acta Math., t. 80, 1948, p. 23-63.