Séminaire Henri Cartan

I. Satake
H. Cartan

Démonstration du théorème fondamental

Séminaire Henri Cartan, tome 10, n° 2 (1957-1958), exp. n° 15, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_2_A6_0>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL

par I. SATAKE et H. CARTAN

On se propose maintenant de démontrer le théorème fondamental, i.e. le fait que l'espace compactifié $\Gamma'\backslash\mathfrak{S}_n^*$, muni d'une structure d'espace annelé d'une façon canonique, est un espace analytique normal.

1. Définition du faisceau des modules de germes de formes automorphes d'espèce (μ, ρ).

Les notations étant comme dans l'exposé précédent, soient U un ouvert Γ'-saturé dans $\mathfrak{S}_n^*$, $U_{r,\lambda} = M_{r,\lambda}^{-1} U \cap \mathfrak{S}_r$,

$$\Gamma'_{r,\lambda} = \varpi_r (M_{r,\lambda}^{-1} \Gamma' M_{r,\lambda} \cap \mathfrak{P}_r^n) .$$

Soit

$$f^* = (f_n , \ldots , f_{r\lambda} , \ldots)$$

une collection de formes $f_{r,\lambda} \in \mathfrak{H}_{\Gamma'_{r\lambda}, U_{r\lambda}}(\mu_{r\lambda} , \rho^{(r)})$ telles que $f_{r\lambda} = \Phi_{r\lambda}^n f_n$; on sait qu'alors, si $(\lambda , \nu) \to \mu$, on a

$$f_{s,\mu} = (\Phi_{s,\nu}^{r,\lambda} f_{r\lambda}) | \varpi_s(L)$$

avec un élément L de $\check{\Gamma} \cap \mathfrak{P}_s^n$. On appelle une telle collection f^* une <u>forme automorphe d'espèce</u> (μ , ρ) <u>pour</u> Γ' <u>dans</u> U et on désigne par $\mathfrak{H}^*_{\Gamma',U}(\mu , \rho)$ l'ensemble de toutes ces formes ; $\mathfrak{H}^*_{\Gamma',U}(\mu , \rho)$ est un sous-espace vectoriel du produit direct $\prod_{r,\lambda} \mathfrak{H}_{\Gamma'_{r,\lambda}, U_{r\lambda}}(\mu_{r\lambda}, \rho^{(r)})$ et est isomorphe à $\mathfrak{H}_{\Gamma',U_n}(\mu , \rho)$, si $n \geq 2$.

Or, si U, U' sont des ouverts Γ'-saturés dans $\mathfrak{S}_n^*$ tels que $U \subset U'$, on a un homomorphisme canonique

$$\mathfrak{H}^*_{\Gamma',U'}(\mu , \rho) \to \mathfrak{H}^*_{\Gamma',U}(\mu , \rho)$$

défini par restriction ; donc, en attachant le module $\mathfrak{H}^*_{\Gamma',U}(\mu , \rho)$ à chaque ouvert $\pi^*_{\Gamma'}(U)$ de $\Gamma'\backslash\mathfrak{S}_n^*$ (où $\pi^*_{\Gamma'}$ désigne la projection canonique $\mathfrak{S}_n^* \to \Gamma'\backslash\mathfrak{S}_n^*$), on peut définir un faisceau de modules sur $\Gamma'\backslash\mathfrak{S}_n^*$, que l'on appellera le <u>faisceau de modules de germes de formes automorphes d'espèce (μ , ρ) sur</u> $\Gamma'\backslash \mathfrak{S}^*_n$; on le notera $\mathcal{A}^*_{\Gamma'} (\mu , \rho)$. Il est facile de voir que l'espace des sections de $\mathcal{A}^*_{\Gamma'} (\mu , \rho)$ au-dessus de $\pi^*_{\Gamma'}(U)$ est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{H}^*_{\Gamma',U} (\mu , \rho)$.

D'une façon analogue, on peut définir un faisceau de modules

$$\mathcal{A}_{\Gamma'_{r,\lambda}} (\mu_{r\lambda} , \rho^{(r)}) \text{ sur } \Gamma'_{r\lambda}\backslash \mathfrak{S}_r ,$$

dont l'espace des sections au-dessus de $\pi_{\Gamma'_{r\lambda}} (U_{r\lambda})$ (où $\pi_{\Gamma'_{r\lambda}}$ désigne la projection canonique $\mathfrak{S}_r \to \Gamma'_{r\lambda}\backslash \mathfrak{S}_r$) est canoniquement isomorphe à

$$\mathfrak{H}_{\Gamma'_{r.\lambda},U_{r\lambda}} (\mu_{r\lambda}, \rho^{(r)})$$

(<u>faisceau des modules de germes de formes automorphes d'espèce</u> $(\mu_{r\lambda} , \rho^{(r)})$ <u>sur</u> $\Gamma'_{r\lambda}\backslash \mathfrak{S}_r$).

Il est clair que la restriction du faisceau $\mathcal{A}^*_{\Gamma'} (\mu , \rho)$ à $\Gamma'\backslash \mathfrak{S}_n$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{A}_{\Gamma'} (\mu , \rho)$. En général, pour $r < n$, l'homomorphisme canonique de la restriction à $\Gamma'_{r\lambda}\backslash \mathfrak{S}_r$ du faisceau $\mathcal{A}^*_{\Gamma'} (\mu , \rho)$ dans $\mathcal{A}_{\Gamma'_{r\lambda}} (\mu_{r\lambda} , \rho^{(r)})$ est <u>surjectif</u>. (L'homomorphisme canonique est défini, en faisant correspondre à la section $f^* = (\ldots , f_{r\lambda} , \ldots)$ de $\mathcal{A}^*_{\Gamma'} (\mu , \rho)$ la section $f_{r\lambda}$ de $\mathcal{A}_{\Gamma'_{r\lambda}} (\mu_{r\lambda}, \rho^{(r)})$). Cela résulte du lemme suivant :

LEMME 1. - <u>Soit</u> $\pi^*_{\Gamma'} (U)$ <u>un voisinage suffisamment petit d'un point de</u> $\Gamma'_{r\lambda}\backslash \mathfrak{S}_r$ <u>dans</u> $\Gamma'\backslash \mathfrak{S}^*_n$. <u>Alors pour chaque</u> $f_{r\lambda} \in \mathfrak{H}_{\Gamma'_{r\lambda},U_{r\lambda}} (\mu_{r\lambda} , \rho^{(r)})$ <u>il existe</u> $f_n \in \mathfrak{H}_{\Gamma',U_n}(\mu , \rho)$ <u>telle que</u> $\Phi^n_{r\lambda} f_n = f_{r\lambda}$.

DÉMONSTRATION. - Soit U' un voisinage ouvert de $Z_0 \in \mathfrak{S}_r$ dans $\mathfrak{S}^*_n$ vérifiant la condition 4' (exposé 13) pour $M^{-1}_{r\lambda} \Gamma' M_{r\lambda}$ (i.e. tel que $M \in M^{-1}_{r\lambda} \Gamma' M_{r\lambda}$, $MU' \cap U' \neq \emptyset$ entraîne $MZ_0 = Z_0$), et soit $U = \Gamma' M_{r\lambda} U'$; alors $\pi^*_{\Gamma'}(U)$ est un voisinage ouvert de $\pi_{\Gamma'_{r\lambda}} (Z_0) \in \Gamma'_{r\lambda}\backslash \mathfrak{S}_r$ dans $\Gamma'\backslash \mathfrak{S}^*_n$; soit $f_{r\lambda} \in \mathfrak{H}_{\Gamma'_{r\lambda},U_{r\lambda}} (\mu_{r\lambda} , \rho^{(r)})$ et définissons f_n par la formule

$$(f_n|M'M_{r\lambda})(Z) = f_{r\lambda} (Z_1) ,$$

où $Z = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_{12} \\ {}^t Z_{12} & Z_2 \end{pmatrix} \in U' \cap \mathfrak{H}_n$, $M' \in \Gamma'$, i.e. posons

$$(1.1) \qquad f_n (M' M_{r\lambda} Z) = \rho(C_{M'M_{r\lambda}} Z + D_{M'M_{r\lambda}}) f_{r\lambda} (Z_1) \sigma^{-1}_{M'M_{r\lambda}} .$$

Cette définition est possible, parce que l'expression du membre de droite de (1.1) ne dépend que du point $M'M_{r\lambda} Z$; en effet, si

$$M'M_{r\lambda} Z = M''M_{r\lambda} Z' , \quad Z , Z' \in U' \cap \mathfrak{H}_n , \quad M' , M'' \in \Gamma' ,$$

on a (d'après la condition 4') $L = M_{r\lambda}^{-1} M''^{-1} M'M_{r\lambda} \in \mathfrak{P}^n_r$ et donc $Z'_1 = L_1 Z_1$ avec $L_1 = \varpi_r (L) \in \Gamma'_{r\lambda}$; par conséquent, on a, en posant

$$L = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & * \\ * & A_2 & * & * \\ C_1 & 0 & D_1 & * \\ 0 & 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix}$$

$$\rho(C_{M'M_{r\lambda}} Z + D_{M'M_{r\lambda}}) \circ f_{r\lambda} (Z_1) \circ \sigma^{-1}_{M'M_{r\lambda}}$$

$$= \rho(C_{M''M_{r\lambda}} Z' + D_{M''M_{r\lambda}}) \circ \rho\left(\begin{pmatrix} C_1 Z_1 + D_1 & * \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}\right) \circ f_{r\lambda} (Z_1) \circ \mu^{-1}_{M_{r\lambda}}(L) \circ \sigma^{-1}_{M''M_{r\lambda}}$$

$$= \rho(C_{M''M_{r\lambda}} Z' + D_{M''M_{r\lambda}}) \circ \rho^{(r)}(C_1 Z_1 + D_1) \circ f_{r\lambda} (Z_1) \circ \mu^{-1}_{r\lambda} (L_1) \circ \sigma^{-1}_{M''M_{r\lambda}}$$

$$= \rho(C_{M''M_{r\lambda}} Z' + D_{M''M_{r\lambda}}) \circ f_{r\lambda} (Z'_1) \circ \sigma^{-1}_{M''M_{r\lambda}} ,$$

ce qui prouve notre assertion. Alors, il est clair d'après la définition que $f_n|M' = f_n$ pour $M' \in \Gamma'$, i.e. $f_n \in \mathfrak{H}_{\Gamma', U_n} (\mu , \rho)$ et que

$$\Phi^n_{r\lambda} f_n = f_{r\lambda} .$$

Cela étant, considérons le cas particulier où μ , ρ sont triviaux tous les deux ; dans ce cas tous les $\mu_{r\lambda}$, $\rho^{(r)}$ le sont aussi et

$$f_{r\lambda} \in \mathfrak{H}_{\Gamma'_{r\lambda}, U_{r\lambda}} = \mathfrak{H}_{\Gamma'_{r\lambda}, U_{r\lambda}} (1 , 1)$$

n'est autre qu'une fonction holomorphe, invariante par rapport à $\Gamma'_{r\lambda}$, définie dans $U_{r\lambda}$. On va maintenant considérer

$$f^* = (\dots , f_{r\lambda} , \dots) \in \mathfrak{H}^*_{\Gamma, U} = \mathfrak{H}^*_{\Gamma', U} (1 , 1)$$

comme une fonction définie dans U . Pour cela, posons

$$f^*(M'M_{r\lambda}\ Z) = f_{r\lambda}\ (Z) \qquad \text{pour} \quad Z \in U_{r\lambda}\ , \quad M' \in \Gamma'\ ; \tag{1.2}$$

cette expression ne dépend encore que du point $x = M'M_{r\lambda}\ Z$, car, si

$$M'M_{r\lambda}\ Z = M''M_{r\lambda}\ Z'\ , \qquad Z\ ,\ Z' \in U_{r\lambda}\ , \qquad M'\ ,\ M'' \in \Gamma'\ ,$$

alors Z , Z' sont équivalentes par rapport à $\Gamma'_{r\lambda} = \varpi_r(M_{r\lambda}^{-1}\ \Gamma'\ M_{r\lambda} \cap \tilde{\mathfrak{G}}_r^n)$ et donc $f_{r\lambda}(Z) = f_{r\lambda}(Z')$. La fonction f^* ainsi définie est continue par rapport à $\mathfrak{T}_0^{\Gamma}$; en effet, pour $\varepsilon > 0$ donné, soit U' un voisinage de $Z_0 \in U_{r\lambda}$ tel qu'on ait

$$|(f_n|M_{r\lambda})(Z) - f_{r\lambda}\ (Z_0)| < \varepsilon$$

pour $Z \in U' \cap M_{r\lambda}^{-1}\ U_n$ (continuité de l'opérateur Φ_r^n) ; on a alors

$$|f^*(M'M_{r\lambda}\ Z) - f^*(M'M_{r\lambda}\ Z_0)|$$

$$= |f_n(M_{r\lambda}\ Z) - f_{r\lambda}\ (Z_0)| < \varepsilon$$

pour $M'M_{r\lambda}\ Z \in M'M_{r\lambda}\ U' \cap U_n$, d'où la continuité de f^* . La fonction f^* , étant évidemment invariante par rapport à Γ' , définit une fonction continue sur $\pi^*_{\Gamma'}(U)$.

Or le faisceau $\mathcal{A}^*_{\Gamma'}(1\ ,\ 1) = \mathcal{A}^*_{\Gamma'}$ est un faisceau d'anneaux (et tous les faisceaux $\mathcal{A}^*_{\Gamma'}(\mu\ ,\ \rho)$ sont des $\mathcal{A}^*_{\Gamma'}$-modules) ; d'après ce que nous avons dit, on peut le considérer comme un sous-faisceau du faisceau des anneaux de germes de fonctions continues sur $\Gamma' \backslash \mathfrak{S}_n^*$. De même, on peut considérer $\mathcal{A}_{\Gamma'} = \mathcal{A}_{\Gamma'}(1\ ,\ 1)$ comme un sous-faisceau du faisceau des anneaux de germes de fonctions continues sur $\Gamma' \backslash \mathfrak{S}_n$. Alors on a le lemme suivant.

LEMME 2. – <u>Une fonction continue dans un ouvert</u> $\pi^*_{\Gamma'}(U) \subset \Gamma' \backslash \mathfrak{S}_n^*$ <u>est une section de</u> $\mathcal{A}^*_{\Gamma'}$ <u>si et seulement si sa restriction à</u> $\pi^*_{\Gamma'}(U) \cap \Gamma' \backslash \mathfrak{S}_n$ <u>est une section de</u> $\mathcal{A}_{\Gamma'}$.

C'est presque évident ; en effet, si f^* est une fonction continue et invariante par rapport à Γ' , définie dans U , telle que sa restriction f_n à U_n soit holomorphe, alors $\Phi_{r\lambda}^n\ f_n$ est définie chaque fois que $U_{r\lambda} \neq \emptyset$ (f_n est bornée lorsque $n = 1$, $r = 0$) et, en désignant la restriction de f^* à $U_{r\lambda}$ par $f_{r\lambda}$, on a $\Phi_{r\lambda}^n\ f_n = f_{r\lambda}$.

2. Démonstration du théorème fondamental dans le cas du groupe modulaire.

On se propose maintenant de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - L'espace annelé $(\Gamma' \backslash \mathfrak{S}_n^*, \mathcal{A}^*_{\Gamma'})$ est un espace analytique normal, et le complémentaire de $\Gamma' \backslash \mathfrak{S}_n$ dans $\Gamma' \backslash \mathfrak{S}_n^*$ est un sous-espace analytique de dimension strictement plus petite.

On va considérer dans ce numéro le cas du groupe modulaire $\Gamma = \Gamma_n$. Dans ce cas, on a

$$\text{(2.1)} \quad \begin{aligned} \Gamma_n \backslash \mathfrak{S}_n^* &= \Gamma_n \backslash \mathfrak{S}_n \cup \Gamma_{n-1} \backslash \mathfrak{S}_{n-1} \cup \ldots \cup \Gamma_0 \backslash \mathfrak{S}_0 \\ &= \Gamma_n \backslash \mathfrak{S}_n \cup \Gamma_{n-1} \backslash \mathfrak{S}_{n-1}^* \,; \end{aligned}$$

la structure (d'espace annelé) induite sur $\Gamma_n \backslash \mathfrak{S}_n$ et sur $\Gamma_{n-1} \backslash \mathfrak{S}_{n-1}^*$ par $(\Gamma_n \backslash \mathfrak{S}_n^*, \mathcal{A}^*_{\Gamma_n})$ n'est autre que celle définie par $\mathcal{A}_{\Gamma_n}$ et par $\mathcal{A}^*_{\Gamma_{n-1}}$ respectivement (en vertu du lemme 1) ; réciproquement, d'après le lemme 2 la structure de $(\Gamma_n \backslash \mathfrak{S}_n^*, \mathcal{A}^*_{\Gamma_n})$ coïncide avec celle définie en prolongeant $(\Gamma_n \backslash \mathfrak{S}_n, \mathcal{A}_{\Gamma_n})$ par continuité (i.e. en disant qu'une fonction f définie et continue au voisinage de x dans $\Gamma_n \backslash \mathfrak{S}_n^*$ définit un élément de $(\mathcal{A}^*_{\Gamma_n})_x$, si et seulement si la restriction de f à $\Gamma_n \backslash \mathfrak{S}_n$ définit un élément de $(\mathcal{A}_{\Gamma_n})_y$ en chaque point y de $\Gamma_n \backslash \mathfrak{S}_n$ suffisamment voisin de x). En outre, on sait que l'espace annelé $(\Gamma_n \backslash \mathfrak{S}_n, \mathcal{A}_{\Gamma_n})$ est un espace analytique normal (voir exposé 11, n° 2).

Donc, en posant $X = \Gamma_n \backslash \mathfrak{S}_n^*$, $V = \Gamma_n \backslash \mathfrak{S}_n$, $W = \Gamma_{n-1} \backslash \mathfrak{S}_{n-1}^*$, nous sommes justement dans la situation considérée dans l'exposé 11 ; le théorème 1 ci-dessus résulte alors du théorème 1 de l'exposé 11, parce que les hypothèses de ce dernier théorème sont remplies comme suit :

(i) Tout point $x_0 \in W$ possède (dans X) un système fondamental de voisinages ouverts U tels que $U \cap V$ soit connexe. En effet, soit $x_0 = \pi^*_\Gamma(Z_0)$, $Z_0 \in \Omega_r$ et soient $U = \pi^*_\Gamma(\tilde{U})$, $\tilde{U} = \bigcup_{r \leq s \leq n} \Gamma V^{(s)}(U_r, K)$, où U_r est un voisinage ouvert connexe de Z_0 dans Ω_r et $K > 0$; alors

$$U \cap V = \pi_\Gamma(V^{(n)}(U_r, K))$$

est certainement ouvert et connexe (donc irréductible, parce que V est normal).

(ii) $\mathcal{A}^*_\Gamma$ induit sur W une structure d'espace analytique de dimension $< m$ ($m = \dim V$). En effet, en utilisant la récurrence sur n, on peut supposer le théorème démontré pour $W = \Gamma_{n-1} \backslash \mathfrak{S}^*_{n-1}$.

(iii) Chaque point $x_0 \in W$ possède un voisinage ouvert U tel que les fonctions "holomorphes" dans U séparent les points de $U \cap V$.

Pour affirmer cette propriété, on a besoin du résultat suivant. Soit q le plus petit commun multiple des ordres des stabilisateurs des points de $\mathfrak{S}_n$ dans Γ (il est fini, parce qu'il ne dépasse pas le nombre de $M \in \Gamma$ telles que $M \Omega_n \cap \Omega_n \neq \emptyset$). Alors on a le

LEMME 3. - Si k est un multiple assez grand de q, il existe, pour chaque couple de matrices Z, $Z' \in \mathfrak{S}_n$ non-équivalentes par rapport à Γ, une forme modulaire (en fait une Spitzenform) f de poids k telle que $f(Z) = 1$, $f(Z') = 0$. (Voir l'exposé 10, n° 4 et n°8).

Or soit k un tel entier, soient $x_0 = \pi^*_\Gamma(Z_0) \in \Gamma_r \backslash \mathfrak{S}_r$, et $U = \pi^*_\Gamma(\tilde{U})$ un voisinage ouvert suffisamment petit de x_0 ($\tilde{U}$ son image réciproque dans $\mathfrak{S}^*_n$) ; alors il existe une forme modulaire locale g_r de poids k définie et $\neq 0$ dans $\tilde{U}_n = \tilde{U} \cap \mathfrak{S}_n$ (prendre d'abord une forme modulaire locale g_r de poids k définie dans $\tilde{U}_r = \tilde{U} \cap \mathfrak{S}_r$ telle que $g_r(Z_0) \neq 0$, et appliquer le lemme 1). D'après le lemme 3, on peut prendre en outre, pour deux points distincts $x = \pi_\Gamma(Z)$, $x' = \pi_\Gamma(Z')$ de $U \cap V$, une forme modulaire f_n de poids k telle que $f_n(Z) = 1$, $f_n(Z') = 0$; alors $h_n = f_n/g_n$ est une forme modulaire locale définie dans $\tilde{U}_n$, de poids 0, et telle que $h_n(Z) \neq 0$, $h_n(Z') = 0$; elle définit donc une section de $\hat{\mathcal{A}}_\Gamma$ sur $U \cap V$ qui sépare x, x', ce qui prouve notre assertion.

Le théorème 1 est donc démontré dans le cas du groupe modulaire.

3. Le cas d'un groupe commensurable au groupe modulaire.

Soit Γ' un groupe commensurable à $\Gamma = \Gamma_n$. Les conditions (i) et (iii) ci-dessus sont encore remplies pour $X = \Gamma' \backslash \mathfrak{S}^*_n$, $V = \Gamma' \backslash \mathfrak{S}_n$, $W = X - V$ (la condition (i) résulte du théorème de connexité, exposé 13, n° 3). Mais il semble difficile de prouver la condition (ii), car aucun procédé de récurrence sur n ne permet plus de prouver que W est un espace analytique de dimension $< m$ ($m = \dim V$). On va procéder autrement.

Soit Γ'' l'intersection de $\Gamma \cap \Gamma'$ avec tous ses transformés par les automorphismes intérieurs de Γ' ; Γ'' est un sous-groupe invariant dans Γ', et est d'indice fini dans Γ et dans Γ'. Alors l'espace annelé

$$(\Gamma'\backslash\mathfrak{S}_n^*, \mathcal{A}^*_{\Gamma'})$$

s'identifie au quotient de l'espace annelé $(\Gamma''\backslash\mathfrak{S}_n^*, \mathcal{A}^*_{\Gamma''})$ par le <u>groupe fini</u> Γ'/Γ'' (qui définit des automorphismes de cet espace annelé). Supposons qu'on ait déjà montré que $(\Gamma''\backslash\mathfrak{S}_n^*, \mathcal{A}^*_{\Gamma''})$ est un espace analytique normal ; alors son quotient $(\Gamma'\backslash\mathfrak{S}_n^*, \mathcal{A}^*_{\Gamma'})$ sera aussi un espace analytique normal (cf. exposé 11, paragraphe 2). Tout revient donc à prouver le théorème 1 pour le groupe Γ'', qui est <u>sous-groupe d'indice fini</u> du groupe modulaire Γ.

Posons alors $X = \Gamma''\backslash\mathfrak{S}_n^*$, $V = \Gamma''\backslash\mathfrak{S}_n$, $W = X - V$, $X' = \Gamma\backslash\mathfrak{S}_n^*$, $V' = \Gamma\backslash\mathfrak{S}_n$, $W' = X' - W'$. On sait déjà que X' est un espace analytique normal de dimension m, et W' un sous-espace analytique de dimension $< m$. Soit $f : X \longrightarrow X'$ l'application naturelle $\Gamma''\backslash\mathfrak{S}_n^* \longrightarrow \Gamma\backslash\mathfrak{S}_n^*$; on a $f(W) = W'$, $f^{-1}(W') = W$; de plus l'application f est continue et <u>propre</u>, et l'image réciproque de tout point de X' est un ensemble <u>fini</u> de points de X. On va établir ci-dessous un théorème (théorème 2) d'où résultera immédiatement, dans le cas présent, que X est bien un espace analytique normal de dimension m, et W un sous-espace analytique de dimension $< m$; ce qui achèvera de prouver le théorème 1.

Pour cela, nous aurons besoin d'une théorie des "revêtements ramifiés", dont on a déjà parlé dans l'exposé 11 (page 11-08). Nous n'utiliserons pas le théorème profond de Grauert et Remmert (C. R. Acad. Sc. Paris, t. 245, 1957, p. 918-921), mais seulement des résultats beaucoup plus élémentaires.

4. <u>Sur les revêtements ramifiés.</u>

On peut considérer comme classique le résultat suivant :

<u>Soient</u> X <u>et</u> X' <u>deux espaces analytiques normaux de même dimension</u> m, X' <u>étant connexe</u>. <u>Soit</u> $f : X \longrightarrow X'$ <u>une application analytique propre, telle que l'image réciproque de tout point de</u> X' <u>soit discrète (donc finie). Alors</u> f <u>est une application ouverte, et il existe un entier</u> d <u>jouissant des propriétés suivantes</u> :

1. <u>pour tout</u> $x' \in X'$, $f^{-1}(x')$ <u>se compose d'au plus</u> d <u>points</u> ;

2. <u>l'ensemble</u> D' <u>des points</u> $x' \in X'$ <u>tels que</u> $f^{-1}(x')$ <u>se compose de moins de</u> d <u>points est un sous-espace analytique de dimension</u> $< m$; $f^{-1}(D') = D$ <u>est un sous-espace analytique de</u> X, <u>de dimension</u> $< m$;

3. <u>tout point</u> $x \in X - D$ <u>possède un voisinage ouvert</u> U <u>tel que la restriction de</u> f <u>à</u> U <u>soit un isomorphisme de l'espace analytique</u> U <u>sur l'espace</u>

<u>analytique</u> $f(U)$.

Il résulte de 3. que la restriction de f à $X - D$ définit $X - D$ comme <u>revêtement</u> de $X' - D'$ (au sens topologique), le nombre des feuillets du revêtement étant égal à d . On dit, pour cette raison, que f définit X comme <u>revêtement ramifié</u> de X' .

Soit φ une fonction holomorphe sur X . Si $x \in X - D$, les fonctions symétriques élémentaires des valeurs de φ aux d points de $X - D$ dont l'image dans X' est $f(x)$, sont des fonctions holomorphes du point $f(x) \in X' - D'$, bornées au voisinage de chaque point de D' ; donc elles se prolongent en fonctions holomorphes dans X' , puisque X' est un espace analytique normal. Ainsi φ satisfait à une équation $P(\varphi) = 0$, où P est un polynôme unitaire de degré d , à coefficients holomorphes dans X' . Le polynôme P est canoniquement associé à φ .

Soit (X , X' , f) un revêtement ramifié comme ci-dessus. Soit Y une composante connexe de X , et soit g la restriction de f à Y ; alors (Y , X' , g) est évidemment un revêtement ramifié. Le degré du revêtement (X , X' , f) est égal à la somme des degrés des revêtements qui correspondent aux composantes connexes de X .

Soit U' un ouvert non vide et connexe de X' ; soit $U = f^{-1}(U')$. Il est clair que $(U , U' , f|U)$ est un revêtement ramifié, de même degré d que (X , X' , f) .

Soit $a' \in X'$, et soient a_i les points de $f^{-1}(a')$. Choisissons des ouverts connexes U_i , deux à deux disjoints, tels que $a_i \in U_i$ (c'est possible puisque, X étant irréductible au point a_i , a_i possède un système fondamental de voisinages ouverts connexes). Puisque l'application f est propre, il existe un voisinage ouvert connexe U' de a' , tel que $f^{-1}(U') = U$ soit contenu dans la réunion des U_i . On a vu que $(U , U' , f|U)$ est un revêtement ramifié de degré d ; chaque composante connexe de U est un revêtement ramifié de U' , et la somme des degrés de ces revêtements est d . Chacune de ces composantes connexes contient au moins un point de $f^{-1}(a')$, et est contenue dans l'un des U_i ; il en résulte que le nombre de ces composantes connexes est égal au nombre des points a_i , chacune contenant un point a_i et un seul. Le degré de la composante connexe qui contient a_i est indépendant du choix de U' (assez petit) ; on l'appelle le <u>degré</u> du revêtement (X , X' , f) au point $a_i \in X$. On voit que le degré d du revêtement ramifié (X , X' , f) est égal à la somme des degrés $d(a_i)$ aux différents points $a_i \in f^{-1}(a')$, et ceci pour tout point

$a' \in X'$.

Soit U un voisinage ouvert connexe de $a \in X$, tel que U soit revêtement ramifié de $f(U)$, de degré $d(a)$. Toute fonction φ holomorphe dans U définit canoniquement un polynôme unitaire P_φ , à coefficients holomorphes dans $U' = f(U)$, dont le degré est égal au degré $d(a)$ du revêtement au point a . Il en résulte que tout germe φ de fonction holomorphe au point a définit un polynôme P_φ de degré $d(a)$, à coefficients dans l'anneau des germes de fonctions holomorphes (sur X') au point $a' = f(a)$. De plus, il existe une φ holomorphe en a , telle que <u>le discriminant de P_φ ne soit pas identiquement nul</u> au voisinage de $f(a)$; il suffit, pour cela, de choisir U (connexe) et φ holomorphe dans U , de manière que φ prenne des valeurs distinctes en $d(a)$ points distincts de U ayant même image dans X' ; et ceci est possible si U est assez petit.

On se propose maintenant d'étudier une situation un peu plus subtile : au lieu de supposer que X soit un espace analytique normal, on va supposer seulement (comme dans l'exposé 11) que X est un espace localement compact, et qu'une structure d'espace analytique normal est donnée sur un <u>ouvert partout dense</u> V de X , de complémentaire W . Faisons l'hypothèse (i) ci-dessus : tout point $x_0 \in W$ possède un système fondamental de voisinages ouverts U tels que $V \cap U$ soit connexe. Définissons alors sur X une structure annelée A comme dans l'exposé 11 : si $x_0 \in X$, un germe de fonction continue, au point x_0 , appartient à l'anneau A_{x_0} si c'est le germe d'une fonction φ à valeurs complexes, définie et continue dans un voisinage ouvert U de x_0 , et telle que φ soit holomorphe dans $V \cap U$. On a vu (exposé 11, proposition 1) que l'anneau A_{x_0} est normal (i.e. : intègre et intégralement clos).

Plus généralement, soit X' un espace analytique, et U un ouvert de l'espace X comme ci-dessus. On dira qu'une application $f : U \longrightarrow X'$ est "holomorphe" si elle est continue, et si sa restriction à $V \cap U$ est une application holomorphe.

Soit X un espace comme ci-dessus, et soit X' un espace analytique normal, connexe et de même dimension m que l'espace $V = X - W$. On dira qu'une application $f : X \longrightarrow X'$ définit X comme <u>revêtement ramifié</u> de X' (dans un sens généralisé) si f est "holomorphe", propre, et si l'image réciproque de tout point de X' est discrète (donc finie) ; nous supposerons en outre que $W' = f(W)$ est un sous-espace analytique de X' , de dimension $< m$, et que $W = f^{-1}(W')$ (ce qui implique que, au voisinage de chacun de ses points x_0 ,

W peut être définie par un nombre fini d'équations $\varphi_i(x) = 0$, où les $\varphi_i \in A_{x_0}$).

Soit (X , W , X' , f) un revêtement ramifié généralisé (r.r.g.). Alors la restriction de f à $X - W$ définit $X - W$ comme (vrai) revêtement ramifié de $X' - W'$; son degré s'appelle encore le degré de f . On en déduit : à chaque fonction φ "holomorphe" (à valeurs scalaires) dans X correspond un polynôme unitaire P_φ , à coefficients holomorphes dans X' , de degré égal au degré de l'application f , tel que $P_\varphi(\varphi) = 0$. On définit encore le degré de f en un point $a \in X$, même si $a \in W$; et tout élément $\varphi \in A_a$ définit un polynôme unitaire P_φ à coefficients holomorphes (sur X') au point $f(a)$, de degré égal au degré $d(a)$ de l'application f au point a , et tel que $P_\varphi(\varphi) = 0$.

PROPOSITION 1. - Soit (X , W , X' , f) un revêtement ramifié généralisé, comme ci-dessus. Supposons que, pour tout point $a \in W$, il existe un élément $\varphi \in A_a$ tel que le discriminant du polynôme associé P_φ ne soit pas identiquement nul (au voisinage du point $f(a) \in X'$). Alors la structure annelée A , sur X , est une structure d'espace analytique normal de dimension m (et f définit donc un vrai revêtement ramifié) ; de plus, W est un sous-espace analytique de X , de dimension $< m$.

DÉMONSTRATION. - Il suffit de prouver que A définit sur X une structure d'espace analytique ; les autres conclusions de l'énoncé sont alors évidentes. Soit $a \in W$; il s'agit de montrer l'existence d'un voisinage ouvert U de a , tel que la structure annelée de U soit une structure d'espace analytique.

Or a possède un voisinage ouvert U ayant les propriétés suivantes :

1. U est revêtement ramifié de $f(U)$, de degré $d(a)$;

2. $V \cap U$ est connexe ;

3. il existe une φ "holomorphe" dans U , et dont le polynôme P_φ , de degré $d(a)$, a un discriminant non identiquement nul.

Soit alors $U' = f(U)$, et soit Y' le sous-espace du produit $U' \times \underset{\sim}{C}$ formé des couples (x' , z) tels que $P_\varphi(z)$ soit nul au point $x' \in U'$; c'est un sous-espace analytique de $U' \times \underset{\sim}{C}$. Soit $\tilde{Y}'$ l'espace normalisé de Y' (cf. exposé 11, page 11-04), et soit $p : \tilde{Y}' \longrightarrow Y'$ l'application canonique. Soit $h : U \longrightarrow Y'$ l'application qui envoie x dans $(f(x) , \varphi(x))$; la restriction de h à $V \cap U$ est une application analytique qui se relève d'une seule manière en une application analytique $V \cap U \longrightarrow Y'$ (parce que $V \cap U$ est un espace analytique normal), et celle-ci se prolonge par continuité en tout point de $W \cap U$ (à cause de l'hypothèse (i) de l'exposé 11). Donc h se relève en une application continue $\tilde{h} : U \longrightarrow \tilde{Y}'$ telle que $p \cdot \tilde{h} = h$, la restriction de $\tilde{h}$ à $V \cap U$ étant analytique ; $\tilde{h}$ est donc "holomorphe".

Soit $q = \tilde{Y}' \longrightarrow U'$ l'application composée de $p : \tilde{Y}' \longrightarrow Y'$ et de l'application $Y' \longrightarrow U'$ induite par la première projection de $U' \times \underline{C}$ sur U'. Soit $k : V \cap U \longrightarrow \tilde{Y}' - q^{-1}(U' \cap W')$ l'application analytique induite par $\tilde{h}$; puisque $q \circ k = g$ définit $V \cap U$ comme revêtement ramifié de $U' - U' \cap W'$, de degré $d(a)$, et que q est évidemment un revêtement ramifié de degré $d(a)$, il s'ensuit que k définit $V \cap U$ comme revêtement ramifié de $\tilde{Y}' - q^{-1}(U' \cap W')$, de degré 1 ; autrement dit, k est un <u>isomorphisme</u> de l'espace analytique $V \cap U$ sur l'espace analytique $\tilde{Y}' - q^{-1}(U' \cap W')$. L'isomorphisme réciproque se prolonge par continuité en une application $\tilde{Y}' \longrightarrow U$, comme on le voit facilement. Cette application continue est évidemment réciproque de l'application $\tilde{h}$; donc $\tilde{h}$ est un <u>homéomorphisme</u> de U sur $\tilde{Y}'$, et il est évident que $\hat{h}$ transporte la structure annelée de U sur la structure analytique de $\tilde{Y}'$. Ceci achève la démonstration de la proposition 1.

Comme corollaire de la proposition 1, nous obtenons le :

THÉORÈME 2. - <u>Soit</u> X <u>un espace localement compact et soit</u> V <u>un ouvert partout dense de</u> X <u>qui porte une structure d'espace analytique normal de dimension</u> m ; <u>posons</u> $W = X - V$. <u>Pour tout ouvert</u> U <u>de</u> X, <u>convenons de dire qu'une fonction définie dans</u> U, <u>à valeurs complexes</u>, <u>est "holomorphe" si elle est continue dans</u> U <u>et holomorphe dans</u> $V \cap U$. <u>Faisons les hypothèses</u> :

(i) <u>chaque point</u> $x_0 \in W$ <u>possède</u> (<u>dans</u> X) <u>un système fondamental de voisinages ouverts</u> U <u>tels que</u> $V \cap U$ <u>soit connexe</u> ;

(iii) <u>chaque point</u> $x_0 \in W$ <u>possède un voisinage ouvert</u> U <u>tel que les fonctions "holomorphes" dans</u> U <u>séparent les points de</u> $V \cap U$.

<u>Soit</u> X' <u>un espace analytique normal de dimension</u> m, <u>connexe</u> ; <u>et soit</u> $f : X \longrightarrow X'$ <u>une application continue</u>, <u>propre</u>, <u>telle que l'image réciproque de tout point de</u> X' <u>soit finie</u>. <u>Supposons que la restriction de</u> f <u>à</u> V <u>soit holomorphe</u>. <u>Supposons de plus que</u> $W' = f(W)$ <u>soit un sous-espace analytique de</u> X', <u>de dimension</u> $< m$, <u>et que</u> $W = f^{-1}(W')$. <u>Alors la structure annelée de</u> X <u>définie par les fonctions "holomorphes" est une structure d'espace analytique normal</u>, <u>et</u> W <u>est un sous-espace analytique de dimension</u> $< m$.

DÉMONSTRATION immédiate. - On peut appliquer la proposition 1, car, étant donné $a \in W$, l'existence d'une fonction $\varphi \in A_a$ telle que le discriminant de P_φ ne soit pas identiquement nul, est assurée par l'hypothèse (iii).

Comme on l'a déjà dit, le théorème 2 entraîne la validité du théorème 1 pour tout groupe commensurable au groupe modulaire.