ICHIRO SATAKE

# Compactification des espaces quotients de Siegel, II

*Séminaire Henri Cartan*, tome 10, n° 2 (1957-1958), exp. n° 13, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_2_A4_0>

10 mars 1958

# COMPACTIFICATION DES ESPACES QUOTIENTS DE SIEGEL, II.

par Ichiro SATAKE

Dans cet exposé on va considérer le cas des groupes commensurables au groupe modulaire. Les notations $\Gamma$, $\mathfrak{G}_r^n$, $\Omega_n^*$, $\mathfrak{S}_n^*$, ... , sont les mêmes que dans l'exposé précédent.

## 1. Considérations supplémentaires sur l'espace $\mathfrak{S}_n^*$.

Soit $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_n$ le "groupe des transformations" de $\Gamma = Sp(n, \underset{\sim}{Z})$, i.e. $\tilde{\Gamma} = Sp(n, \underset{\sim}{Q})$ ; montrons d'abord que l'on peut faire opérer $\tilde{\Gamma}$ sur l'espace $\mathfrak{S}_n^*$.

Pour cela considérons l'ensemble $\tilde{\mathfrak{S}}_n^*$ construit par la même méthode que celle de l'exposé 12, n° 2, mais en se servant de $\tilde{\Gamma}$ au lieu de $\Gamma$, c'est-à-dire l'ensemble des points $\tilde{M}.Z$ (classes des couples $(\tilde{M}, Z)$) avec $\tilde{M} \in \tilde{\Gamma}$, $Z \in \mathfrak{S}_r$ $(0 \leq r \leq n)$ ; on peut supposer de plus que $\tilde{\mathfrak{S}}_n^*$ est muni d'une topologie satisfaisant aux conditions 1° et :

$\tilde{2}$° les opérations de $\tilde{M} \in \tilde{\Gamma}$ dans $\tilde{\mathfrak{S}}_n^*$ sont continues

(par exemple, considérer la topologie la plus fine satisfaisant aux conditions 1°, $\tilde{2}$°, définie comme dans l'exposé précédent, n° 3); $\tilde{\mathfrak{S}}_n^*$ contient alors $\mathfrak{S}_n^*$ (comme sous-ensemble) ; mais en fait ils coïncident. En effet, pour chaque $\tilde{M} \in \tilde{\Gamma}$, il existe un nombre fini de $M_i \in \Gamma$ telles que $\tilde{M}\Omega_n \subset \bigcup_i M_i \Omega_n$ (parce que $\Omega_n$ est un "ouvert fondamental" pour un groupe "minkowskien" $\Gamma$) ; la topologie de $\tilde{\mathfrak{S}}_n^*$ induisant sur $\mathfrak{S}_n^*$ une topologie satisfaisant aux conditions 1°, 2°, on obtient en prenant l'adhérence par rapport à cette topologie (que l'on notera par $^*$, notation qui ne se contredit pas avec la notation $\Omega_n^*$), $\tilde{M}\Omega_n^* = (\tilde{M}\Omega_n)^* \subset \bigcup_i M_i \Omega_n^*$, d'où $\tilde{\mathfrak{S}}_n^* = \tilde{\Gamma}\Omega_n^* \subset \Gamma\Omega_n^* = \mathfrak{S}_n^*$ ; donc on a $\tilde{\mathfrak{S}}_n^* = \mathfrak{S}_n^*$. Puisque $\tilde{\mathfrak{S}}_n^* = \mathfrak{S}_n^*$, on peut considérer $\tilde{\Gamma}$ comme opérant sur $\mathfrak{S}_n^*$.

Or si l'on décompose $\tilde{\Gamma}$ en classes à droite suivant $\tilde{\Gamma} \cap \mathfrak{G}_r^n$, on aura une décomposition directe de l'espace $\tilde{\mathfrak{S}}_n^*$ semblable à (2.3) dans l'exposé précédent ; le fait que $\tilde{\mathfrak{S}}_n^* = \mathfrak{S}_n^*$ signifie alors qu'on peut prendre comme représentants des classes de $\tilde{\Gamma}/\tilde{\Gamma} \cap \mathfrak{G}_r^n$ des éléments de $\Gamma$ ; cela veut dire que

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma.(\tilde{\Gamma} \cap \mathfrak{G}_r^n) \qquad (0 \leq r \leq n) . \tag{1.1}$$

Ce fait a déjà été signalé par KOECHER [2] dans le cas particulier $r = 0$ (et non seulement pour $\Gamma$ , mais aussi pour tous les groupes satisfaisant à certaines conditions).

Les opérations de $\widetilde{M} \in \widetilde{\Gamma}$ sont continues par rapport à $\mathcal{T}^{\Gamma}$. En effet, soit $F$ un fermé de $\mathfrak{S}_n^*$ au sens de $\mathcal{T}^{\Gamma}$ ; on va montrer que pour toute $\widetilde{M} \in \widetilde{\Gamma}$ , $\widetilde{M} F$ l'est aussi, c'est-à-dire que $M \widetilde{M} F \cap \Omega_n^*$ est fermé pour toute $M \in \Gamma$ . Or il existe un nombre fini de $M_i \in \Gamma$ telles que $(M \widetilde{M})^{-1} \Omega_n^* \subset \bigcup_i M_i \Omega_n^*$ ; alors $M \widetilde{M} F \cap \Omega_n^* = \bigcup_i M \widetilde{M} M_i (M_i^{-1} F \cap \Omega_n^*) \cap \Omega_n^*$ et, $M_i^{-1} F \cap \Omega_n^*$ étant fermé, ce dernier est fermé à cause de la "continuité" de $M \widetilde{M} M_i$ dans $\Omega_n^*$ (ceci résulte du lemme 1 de l'exposé précédent). Les opérations de $\widetilde{M} \in \widetilde{\Gamma}$ sont encore continues par rapport à $\mathcal{T}_0^{\Gamma}$ . Il suffira de montrer que si $U$ est un $\mathcal{T}^{\Gamma}$-voisinage de $x$ , $\Gamma_x$-saturé, alors $\widetilde{M} U (\widetilde{M} \in \widetilde{\Gamma})$ contient un $\mathcal{T}^{\Gamma}$-voisinage de $\widetilde{M}x$ , $\Gamma_{\widetilde{M}x}$-saturé. Cela résulte immédiatement du fait que $\widetilde{M} U$ est $\widetilde{M} \Gamma_x \widetilde{M}^{-1}$-saturé et que $\widetilde{M} \Gamma_x \widetilde{M}^{-1} = (\widetilde{M} \Gamma \widetilde{M}^{-1})_{\widetilde{M}x}$ est commensurable à $\Gamma_{\widetilde{M}x}$ .

Soit maintenant $\Gamma' = \Gamma'_n$ un groupe commensurable à $\Gamma$ ; alors il existe un nombre fini de $M_i \in \Gamma$ telles que

$$\Omega'_n = \bigcup_i M_i \Omega_n \tag{1.2}$$

soit un ouvert fondamental pour $\Gamma'$ (on prend, par exemple, $M_i$ telles que $\Gamma = \bigcup_i (\Gamma \cap \Gamma') M_i$). On a alors $\mathfrak{S}_n^* = \Gamma'(\Omega'_n)^*$ ($^*$ désignant l'adhérence par rapport à n'importe quelle topologie satisfaisant aux conditions 1° , 2°). En effet, pour chaque $M \in \Gamma$ , il existe un nombre fini de $M'_j \in \Gamma'$ telles que $M \Omega_n \subset \bigcup_j M'_j \Omega'_n$ ; donc $M \Omega_n^* \subset \bigcup_j M'_j (\Omega'_n)^*$ , d'où $\mathfrak{S}_n^* = \Gamma \Omega_n^* \subset \Gamma'(\Omega'_n)^*$ .

Cela dit, considérons les conditions 1' , 2' , 3' , 4' qui se déduisent des conditions 1° , 2° , 3° , 4° respectivement, en remplaçant $\Gamma$ , $\Omega_n^*$ par $\Gamma'$, $\Omega_n'^*$ (la topologie "naturelle" de $\Omega_n'^*$ sera celle induite dans $\Omega_n'^*$ par n'importe quelle topologie de $\mathfrak{S}_n^*$ satisfaisant aux conditions 1° , 2°). Il est clair que $\mathcal{T}^{\Gamma}$ satisfait aux conditions 1' , 2'. Réciproquement, on peut définir la topologie $\mathcal{T}^{\Gamma'}$ de $\mathfrak{S}_n^*$ , comme la plus fine des topologies satisfaisant aux conditions 1' , 2' (on procède comme dans l'exposé précédent, n° 3) ; alors $\mathcal{T}^{\Gamma'}$ satisfait aux conditions 1° , 2° (la "continuité" des opérations de $\widetilde{M} \in \widetilde{\Gamma}$ dans $\Omega_n'^*$) ; donc $\mathcal{T}^{\Gamma} = \mathcal{T}^{\Gamma'}$ . On constate alors le même raisonnement que plus haut que le système des $\mathcal{T}^{\Gamma'}$-voisinages $\Gamma'_x$-saturés de $x$ est équivalent au système des $\mathcal{T}^{\Gamma}$-voisinages $\Gamma_x$-saturés de $x$ ; donc, si on définit la topologie $\mathcal{T}_0^{\Gamma'}$ de la même manière que $\mathcal{T}_0^{\Gamma}$, on a $\mathcal{T}_0^{\Gamma'} = \mathcal{T}_0^{\Gamma}$ . Or il est facile de voir que $\mathcal{T}_0^{\Gamma'} = \mathcal{T}_0^{\Gamma}$ satisfait aux conditions 1' , 2' , 3' , 4' ; la condition 3' se démontre comme suit : soient $x$ , $x' \in \mathfrak{S}_n^*$ deux points non équivalents par rapport à $\Gamma'$ , soit $\Gamma' = \bigcup_i (\Gamma \cap \Gamma') M_i'$ et soient, pour chaque $i$, $U_i$, $U_i'$ des voisinages de $x$, $M_i'^{-1} x'$ respectivement tels que $\Gamma U_i \cap U_i' = \emptyset$ si $x$, $M_i'^{-1} x'$ ne sont pas équivalents par rapport à $\Gamma$, et que $((\Gamma - \Gamma_x) U_i) \cap U_i = \emptyset$, $U_i' = M\, U_i$, si $M_i'^{-1} x' = Mx$ avec $M \in \Gamma$ ; alors, comme $\Gamma' \cap M\, \Gamma_x = \emptyset$, on a $((\Gamma \cap \Gamma') U_i) \cap U_i' = \emptyset$ ; donc en posant $U = \bigcap_i U_i$, $U' = \bigcap_i M_i' U_i'$, on a $(\Gamma' U) \cap U' = \emptyset$. Il s'ensuit que $\mathcal{T}^{\Gamma}$ satisfait à la condition 3' ; on peut démontrer aussi par le même raisonnement que dans l'exposé précédent l'unicité de la topologie satisfaisant aux conditions 1', 2', 3', 4'.

On s'occupera désormais exclusivement de la topologie $\mathcal{T}_0^{\Gamma} = \mathcal{T}_0^{\Gamma'}$ ; les résultats obtenus ci-dessus s'énoncent comme suit :

THÉORÈME 1. - <u>Les opérations de</u> $\widetilde{M} \in \widetilde{\Gamma}$ <u>dans</u> $\mathfrak{S}_n^*$ <u>sont continues par rapport à</u> $\mathcal{T}_0^{\Gamma}$. <u>Pour tout groupe</u> $\Gamma'$ <u>commensurable au groupe</u> $\Gamma$, $\mathcal{T}_0^{\Gamma}$ <u>satisfait aux conditions</u> 1', 2', 3', 4' <u>et est entièrement caractérisée par ces conditions.</u>

## 2. <u>La structure des espaces compactifiés</u> $\Gamma' \backslash \mathfrak{S}_n^*$.

D'abord il est clair que le théorème 1 entraîne le suivant :

THÉORÈME 2. - <u>L'espace quotient</u> $\Gamma' \backslash \mathfrak{S}_n^*$ <u>est séparé et compact.</u>

Si $\Gamma''$ est un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma'$, il existe visiblement une application canonique

$$\pi_{\Gamma',\Gamma''} : \Gamma'' \backslash \mathfrak{S}_n^* \to \Gamma' \backslash \mathfrak{S}_n^* \tag{2.1}$$

qui est un "revêtement ramifié" (comme on le précisera plus loin) ; $\pi_{\Gamma',\Gamma''}$ est continue, c'est une application qui transforme les ouverts en ouverts, et les fermés en fermés. Si de plus $\Gamma''$ est un sous-groupe <u>invariant</u> de $\Gamma'$, alors $\Gamma'' \backslash \mathfrak{S}_n^*$ est "galoisien" sur $\Gamma' \backslash \mathfrak{S}_n^*$, ce qui veut dire que le groupe fini $\Gamma'/\Gamma''$ opère sur $\Gamma'' \backslash \mathfrak{S}_n^*$, et l'on a

$$(\Gamma'/\Gamma'') \backslash (\Gamma'' \backslash \mathfrak{S}_n^*) = \Gamma' \backslash \mathfrak{S}_n^* \ . \tag{2.2}$$

On va étudier maintenant la structure de l'espace $\Gamma' \backslash \mathfrak{S}_n^*$. Pour cela décomposons $\widetilde{\Gamma}$ dans les classes doubles à gauche suivant $\Gamma'$ et à droite suivant $\widetilde{\Gamma} \cap \mathfrak{G}_r^n$, comme suit :

$$\widetilde{\Gamma} = \bigcup_{\lambda} \Gamma' M_{r,\lambda} (\widetilde{\Gamma} \cap \mathfrak{G}_r^n) \ , \tag{2.3}$$

où il n'existe qu'un nombre fini de classes en vertu de (1.1) ; on a alors la décomposition correspondante de $\mathfrak{S}_n^*$ :

(2.4)
$$\mathfrak{S}_n^* = \bigcup_r \bigcup_\lambda \Gamma' M_{r,\lambda} \tilde{\mathfrak{S}}_r' \quad ,$$

et par conséquent on a

$$\Gamma' \backslash \mathfrak{S}_n^* = \bigcup_r \bigcup_\lambda \Gamma' \backslash \Gamma' M_{r,\lambda} \mathfrak{S}_r' \quad ;$$

or si l'on pose

(2.5)
$$\Gamma'_{r,\lambda} = \varpi_r(M_{r,\lambda}^{-1} \Gamma' M_{r,\lambda} \cap \mathfrak{G}_r^n) \quad ,$$

il est facile de voir que $\Gamma'_{r,\lambda}$ est un sous-groupe discret de $Sp(r , \mathbb{R})$ commensurable à $\Gamma_r$ et que l'espace quotient $\Gamma' \backslash \Gamma' M_{r,\lambda} \mathfrak{S}_r$ s'identifie canoniquement à $\Gamma'_{r,\lambda} \backslash \mathfrak{S}_r$ ; donc la relation précédente s'écrit

(2.6)
$$\Gamma' \backslash \mathfrak{S}_n^* = \bigcup_{r,\lambda} \Gamma'_{r,\lambda} \backslash \mathfrak{S}_r$$

Il y a lieu de remarquer si l'on pose dans (1.2) $M_i = M_i' M_{r,\lambda i} L_i$ , $M_i' \in \Gamma'$, $L_i \in \tilde{\Gamma} \cap \mathfrak{G}_r^n$ , alors

(2.7)
$$\Omega'_{r,\lambda} = \bigcup_{i:\lambda_i=\lambda} \varpi_r(L_i)\Omega_r$$

est un ouvert fondamental pour $\Gamma'_{r,\lambda}$ ; ceci est une conséquence immédiate du fait que $\mathfrak{S}_n^* = \Gamma'(\Omega_n')^*$ .

Or on va considérer la relation entre $\Gamma'_{r,\lambda} \backslash \mathfrak{S}_r^*$ et $\Gamma' \backslash \mathfrak{S}_n^*$ . On note d'abord qu'il existe une injection canonique de $\mathfrak{S}_r^*$ dans $\mathfrak{S}_n^*$ définie par

$$M.Z \longrightarrow \iota_n(M).Z \quad (M \in \tilde{\Gamma}_r \ , \ Z \in \mathfrak{S}_s \ , \ 0 \leq s \leq r) \ ,$$

parce que $(M , Z) \sim (M' , Z')$ entraîne évidemment $(\iota_n(M) , Z) \sim (\iota_n(M') , Z')$ et réciproquement ; cette application, étant visiblement un homéomorphisme pour $\mathcal{C}^\Gamma$ ou pour $\mathcal{C}_0^\Gamma$, nous permet d'identifier $\mathfrak{S}_r^*$ avec l'adhérence de $\mathfrak{S}_r$ dans $\mathfrak{S}_n^*$ .

Or, pour $\Gamma'$ donné, il existe encore une application $\psi_{r,\lambda}$ de $\Gamma'_{r,\lambda} \backslash \mathfrak{S}_r^*$ dans $\Gamma' \backslash \mathfrak{S}_n$ définie par

(2.8)
$$\psi_{r,\lambda} : M.Z \bmod \Gamma'_{r,\lambda}) \longrightarrow M_{r,\lambda}\, \iota_n(M).Z \ (\bmod \Gamma') \ ,$$

parce que, si $M.Z$ , $M'.Z'$ sont équivalents par rapport à $\Gamma'_{r,\lambda}$ , il existe $M_0' \in \Gamma'$ telle que $\varpi_r(M_{r,\lambda}^{-1} M_0' M_{r,\lambda})M.Z = M'.Z'$ , c'est-à-dire que

$\tilde{M}_o = M'^{-1}\,\varpi_r(M_{r,\lambda}^{-1}\,M'_o\,M_{r,\lambda})M \in \mathfrak{S}_s^r$ et $\varpi_s(\tilde{M}_o)\,Z = Z'$ , d'où résulte que $\iota_n(M')^{-1}\,M_{r,\lambda}^{-1}\,M'_o\,M_{r,\lambda}\,\iota_n(M) \in \mathfrak{S}_s^n$ et $\varpi_s(\iota_n(M')^{-1}\,M_{r,\lambda}^{-1}\,M'_o\,M_{r,\lambda}\,\iota_n(M)) = \varpi_s(\tilde{M}_o)$ , i.e. que $M_{r,\lambda}\,\iota_n(M).Z$ , $M_{r,\lambda}\,\iota_n(M').Z'$ sont équivalents par rapport à $\Gamma'$ . Comme le diagramme suivant est commutatif, il est clair que l'application $\Psi_{r,\lambda}$ est continue :

(2.9)
$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{H}_r^* & \xrightarrow{M_{r,\lambda}} & \mathfrak{H}_n^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma'_{r,\lambda}\backslash\mathfrak{H}_r^* & \xrightarrow{\Psi_{r,\lambda}} & \Gamma'\backslash\mathfrak{H}_n^* \end{array}$$

mais, comme on le verra tout de suite, elle n'est pas injective en général.

En effet, soit $s < r < n$ et soit

(2.10)
$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_n &= \bigcup_\lambda \Gamma'\,M_{r,\lambda}\,(\tilde{\Gamma}_n \cap \mathfrak{S}_r^n) \\ &= \bigcup_\mu \Gamma'\,M_{s,\mu}\,(\tilde{\Gamma}_n \cap \mathfrak{S}_s^n) \ , \\ \tilde{\Gamma}_r &= \bigcup_\nu \Gamma'_{r,\lambda}\,M_{s,\nu}^{(r,\lambda)}\,(\tilde{\Gamma}_r \cap \mathfrak{S}_s^r) \ ; \end{aligned}$$

on a alors

$$\tilde{\Gamma}_n \cap \mathfrak{S}_r^n = \bigcup_\nu\,(M_{r,\lambda}^{-1}\Gamma'\,M_{r,\lambda} \cap \mathfrak{S}_r^n)\;\iota_n(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)})(\tilde{\Gamma}_n \cap \mathfrak{S}_r^n \cap \mathfrak{S}_s^n) \ ,$$

puisque $\tilde{\Gamma}_r = \varpi_r(\tilde{\Gamma}_n \cap \mathfrak{S}_r^n)$ et $\varpi_r^{-1}(\mathfrak{S}_s^r) = \mathfrak{S}_r^n \cap \mathfrak{S}_s^n$ ; donc

(2.11)
$$\tilde{\Gamma}_n = \bigcup_{\lambda,\nu} \Gamma'\,M_{r,\lambda}\;\iota_n(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)})(\tilde{\Gamma}_n \cap \mathfrak{S}_r^n \cap \mathfrak{S}_s^n) \ ;$$

ceci est la décomposition de $\tilde{\Gamma}_n$ en classes doubles suivant $\Gamma'$ et $\tilde{\Gamma}_n \cap \mathfrak{S}_r^n \cap \mathfrak{S}_s^n$ , la décomposition plus fine que la deuxième décomposition de (2.10). On écrit

(2.12)
$$(\lambda\,,\,\nu) \rightarrow \mu \ , \text{ si } M_{r,\lambda}\;\iota_n(M_{s\,\nu}^{(r,\lambda)}) \in \Gamma'\,M_{s,\mu}\,(\tilde{\Gamma}_n \cap \mathfrak{S}_s^n) \ .$$

Alors l'application $\Psi_{r,\lambda}$ applique

$$\Gamma'_{r,\lambda}\backslash\Gamma'_{r,\lambda}\,M_{s,\nu}^{(r,\lambda)}\,\mathfrak{H}_s \text{ sur } \Gamma'\backslash\Gamma'M_{r,\lambda}\;\iota_n(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)})\,\mathfrak{H}_s = \Gamma'\backslash\Gamma'\,M_{s,\mu}\,\mathfrak{H}_s \ ,$$

ou, en posant

$$\begin{aligned} (\Gamma'_{r,\lambda})_{s,\nu} &= \varpi_s\,(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)^{-1}}\;\Gamma'_{r,\lambda}\;M_{s,\nu}^{(r,\lambda)} \cap \mathfrak{S}_s^r) \ , \\ M_{r,\lambda}\,M_{s,\nu}^{(r,\lambda)} &= M'\;M_{s,\mu}\,L \ , \quad M' \in \Gamma', \quad L \in \tilde{\Gamma}_n \cap \mathfrak{S}_s^n \ , \end{aligned}$$

$\psi_{r,\lambda}$ applique

$$(\Gamma'_{r,\lambda})_{s,\nu}\backslash\mathfrak{S}_s \quad \text{sur} \quad \Gamma'_{s,\mu}\backslash\mathfrak{S}_s$$

comme suit :

(2.13) $$Z(\text{mod } (\Gamma'_{r,\lambda})_{s,\nu}) \to L.Z \ (\text{mod } \Gamma'_{s,\mu}) \quad ,$$

pour $(\lambda,\nu) \to \mu$ . Or il est bien possible que deux couples distincts $(\lambda,\nu)$ , $(\lambda',\nu')$ (même avec $\lambda = \lambda'$ ) correspondent à un même $\mu$ ; d'autre part, on a

$$\begin{aligned}(\Gamma'_{r,\lambda})_{s,\nu} &= \varpi_s(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)-1}\ \Gamma'_{r,\lambda}\ M_{s,\nu}^{(r,\lambda)} \cap \mathfrak{G}_s^r) \\ &= \varpi_s(\iota_n(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)})^{-1}\ M_{r,\lambda}^{-1}\ \Gamma'\ M_{r,\lambda}\ \ \iota_n(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)}) \cap \mathfrak{G}_r^n \cap \mathfrak{G}_s^n) \\ &\subset \varpi_s(\iota_n(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)})^{-1}\ M_{r,\lambda}^{-1}\ \Gamma'\ M_{r,\lambda}\ \ \iota_n(M_{s,\nu}^{(r,\lambda)}) \cap \mathfrak{G}_s^n) \\ &= \varpi_s(L^{-1}\ M_{s,\mu}^{-1}\ \Gamma'\ M_{s,\mu}\ L \cap \mathfrak{G}_s^n) \\ &= \varpi_s(L)^{-1}\ \Gamma'_{s,\mu}\ \ \varpi_s(L) \quad ;\end{aligned}$$

et il est encore bien possible que $(\Gamma'_{r,\lambda})_{s,\nu}$ soit strictement plus petit que $\varpi_s(L)^{-1}\ \Gamma'_{s,\mu}\ \varpi_s(L)$ . Ces deux possibilités impliquent en général que $\psi_{r,\lambda}$ n'est pas injective.

EXEMPLE. - Considérons le cas du "Hauptkongruenzgruppe" :

$$\Gamma_n\ (q) = \{M\ ;\ M \in \Gamma_n\ ,\ \ M \equiv E_n\ \ (\text{mod } q)\} \ .$$

Dans ce cas tout $\Gamma'_{r,\lambda}$ est égal à $\Gamma_r(q)$ (donc la seconde possibilité : $(\Gamma'_{r,\lambda})_{s,\nu} \subsetneq \varpi_s(L)^{-1}\ \Gamma'_{s,\mu}\ \varpi_s(L)$ n'a pas lieu) ; calculons le nombre $\nu_{n,r}$ de "multiplicité" de $\Gamma'_r(q)$ . On a évidemment

$$\begin{aligned}\nu_{n,r} &= [\Gamma_n : \Gamma_n(q)(\Gamma_n \cap \mathfrak{G}_r^n)] \\ &= [\Gamma_n : \Gamma_n(q)] / [\Gamma_n \cap \mathfrak{G}_r^n : \Gamma_n(q) \cap \mathfrak{G}_r^n] \\ &= [\Gamma_n : \Gamma_n(q)] / [\Gamma_r : \Gamma_r(q)] \,.\, [\Gamma_n \cap \mathfrak{N}_r^n : \Gamma_n(q) \cap \mathfrak{N}_r^n] \ ,\end{aligned}$$

$\mathfrak{N}_r^n$ désignant le noyau de $\varpi_r$ . Or $\mathfrak{N}_r^n$ se décompose dans le produit semi-direct comme suit :

(2.14) $$\mathfrak{N}_r^n = \mathfrak{U}_r^n \,.\, \mathfrak{T}_r^n \quad ,$$

avec

$$\mathfrak{U}_r^n = \left\{ \begin{pmatrix} {}^tU & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \quad ; \quad U = \begin{pmatrix} E_r & U_{12} \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \text{ , } \det(U_2) \neq 0 \right\} ,$$

(2.15)

$$\mathfrak{T}_r^n = \left\{ \begin{pmatrix} E & T \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad ; \quad T = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} \\ {}^tT_{12} & T_2 \end{pmatrix} \text{ , } T_2 \text{ : symétrique} \right\} ,$$

le dernier étant un sous-groupe invariant de $\mathfrak{M}_r^n$ . Comme

$$\Gamma_n(q) \cap \mathfrak{M}_r^n = (\Gamma_n(q) \cap \mathfrak{U}_r^n).(\Gamma_n(q) \cap \mathfrak{T}_r^n)$$

et

$$\Gamma_n(q) \cap \mathfrak{U}_r^n = \left\{ \begin{pmatrix} {}^tU & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \quad ; \quad U = \begin{pmatrix} E_r & U_{12} \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \text{ : unimodulaire,} \right.$$

$$\left. \equiv E_n (\mathrm{mod}\ q) \right\} ,$$

$$\Gamma_n(q) \cap \mathfrak{T}_r^n = \left\{ \begin{pmatrix} E & T \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad ; \quad T = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} \\ {}^tT_{12} & T_2 \end{pmatrix} \text{ : entière, symétrique,} \right.$$

$$\left. \equiv E_n (\mathrm{mod}\ q) \right\} ,$$

on a

$$[\Gamma_n \cap \mathfrak{M}_r^n : \Gamma_n(q) \cap \mathfrak{M}_r^n] = [\Gamma_n \cap \mathfrak{U}_r^n : \Gamma_n(q) \cap \mathfrak{U}_r^n] . [\Gamma_n \cap \mathfrak{T}_r^n : \Gamma_n(q) \cap \mathfrak{T}_r^n]$$

$$= (2)\ [\gamma_{n-r} : \gamma_{n-r}(q)]\ q^{r(n-r)} . q^{\frac{(n-r)(n-r+1)}{2} + r(n-r)} ,$$

où $\gamma_{n-r} = SL(n-r, \mathbb{Z})$ , $\gamma_{n-r}(q) = \{U \ ;\ U \in \gamma_{n-r} \ ,\ U \equiv E_{n-r}(q)\}$

et le facteur 2 apparaît lorsque $n - r \geqslant 1$ , $q > 2$ . Or il est bien connu que

$$[\gamma_n : \gamma_n(q)] = q^{n^2-1} \prod_{p|q} \prod_{2 \leq k \leq n} (1 - p^{-k}) ,$$

$$[\Gamma_n : \Gamma_n(q)] = q^{n(2n+1)} \prod_{p|q} \prod_{1 \leq k \leq n} (1 - p^{-2k})$$

Cf. KOECHER [1] ). Donc on a

$$(2.16)\quad \nu_{n,r} = \frac{q^{n(2n+1) - r(2r+1)} \prod_{p|q} \prod_{r+1 \leq k \leq n} (1 - p^{-2k})}{(2)\, q^{\frac{(n-r)(n-r+1)}{2} + 2r(n-r) + (n-r)^2 - 1} \prod_{p|q} \prod_{2 \leq k \leq n-r} (1 - p^{-k})}$$

$$= q^{\frac{1}{2}(n-r)(n+3r+1)+1} \,(2)^{-1} \prod_{p|q} \frac{\prod_{r+1 \leq k \leq n} (1 - p^{-2k})}{\prod_{2 \leq k \leq n-r} (1 - p^{-k})}$$

pour $r < n$ . Si $s < r < n$ , on a donc

$$\frac{\nu_{n,r}\, \nu_{r,s}}{\nu_{n,s}} = q^{(n-r)(r-s)+1}\, (2)^{-1} \prod_{p|q} \frac{\prod_{2}^{n-s} (1 - p^{-k})}{\prod_{2}^{n-r} (1 - p^{-k}) \prod_{2}^{r-s} (1 - p^{-k})} > 1 \ ,$$

ce qui montre que l'application $\Gamma_r(q)\backslash \mathfrak{S}_r^* \longrightarrow \Gamma_n(q)\backslash \mathfrak{S}_n^*$ n'est certainement pas injective pour $0 < r < n$ .

## 3. Un théorème de connexité

Finalement on ajoute un théorème qui nous sera utile ultérieurement.

THÉORÈME 3. - Chaque point de $\mathfrak{S}_n^* - \mathfrak{S}_n$ possède un système fondamental de $\mathcal{T}_o^{\Gamma}$-voisinages qui coupent $\mathfrak{S}_n$ suivant un ouvert connexe.

DÉMONSTRATION. - On peut supposer que le point en question est $Z_o \in \Omega_r$ $(r < n)$ . Soit $U_r$ un voisinage connexe, $(\Gamma_r)_{Z_o}$-saturé de $Z_o$ dans $\Omega_r$ et soit $U_s = V^{(s)}(U_r , K)$ $(r \leq s \leq n)$ l'ensemble défini dans l'exposé précédent p.3 , i.e. l'ensemble des $Z \in \Omega_s$ telles que

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1^{(r)} & Z_{12} \\ {}^tZ_{12} & Z_2 \end{pmatrix} = X + iY \ , \quad Y = {}^tW\, D\, W \ , \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_s \end{pmatrix}$$

avec $Z_1^{(r)} \in U_r$ , $d_{r+1} > K$ ;

alors $U = \bigcup_{r \leq s \leq n} U_s$ est un voisinage de $Z_o$ dans $\Omega_n^*$ et par conséquent $\tilde{U} = \Gamma_{Z_o} U$ est un $\mathcal{C}_o^{\Gamma}$-voisinage de $Z_o$ dans $\mathcal{S}_n^*$. On va montrer que $\tilde{U} = \Gamma_{Z_o} U$ coupe $\mathcal{S}_n$ suivant un ensemble connexe, c'est-à-dire que $\Gamma_{Z_o} U_n$ est connexe. Or il est facile de voir que $\Gamma_{Z_o}$ est <u>de génération finie</u> (noter que $\Gamma \cap \mathfrak{M}_r^n$ est un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma_{Z_o}$ et est de génération finie) ; soit $\{M_i\}$ un système de générateurs de $\Gamma_{Z_o}$ en nombre fini, et contenant l'identité $E$ ; on peut supposer de plus que $M_i$ a l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$(3.1) \qquad M_i = \begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^tU_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_2^{-1} \end{pmatrix} , \quad U_2 : \text{unimodulaire},$$

$$(3.2) \qquad M_i = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & B_{12} \\ A_{21} & E_{n-r} & B_{21} & B_2 \\ C_1 & 0 & D_1 & D_{12} \\ 0 & 0 & 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}$$

(en effet, $\Gamma_{Z_o}$ est un produit semi-direct de sous-groupes formés des matrices de la forme (3.1), (3.2) respectivement, dont le dernier est un sous-groupe invariant). En décomposant $Z' = M_i Z$, $Z \in U_n$ comme ci-dessus, on voit facilement que, si $M_i$ est de la forme (3.2), $Z'$ appartient à $\Omega_n(u')$, où $u' (\geq u)$ ne dépend que de $U_r$, $K$, $M_i$ ; donc on a $M_i U_n \subset \Omega_n(u')$ pour $u'$ suffisamment grand. Soit maintenant $M_i$ de la forme (3.1) ; pour une matrice $Z_i$ (quelconque mais fixée) de $U_n$ on peut prendre encore $u'$ tel que $Z_i' = M_i Z_i \in \Omega_n(u')$ ; dans ce cas, on a les relations

$$X_1' = X_1 \ , \quad X_{12}' = X_{12} U_2 \ , \quad X_2' = {}^tU_2 X_2 U_2 \ , \quad W_1' = W_1 \ ,$$

$$W_{12}' = W_{12} U_2 \ , \quad D_1' = D_1 \ , \quad {}^tW_2' D_2' W_2' = {}^tU_2 \, {}^tW_2 D_2 W_2 U_2 \ ;$$

donc si l'on désigne par $Z_i(\lambda)$, $Z_i'(\lambda)$ les matrices obtenues en remplaçant $D_2$, $D_2'$ par $\lambda D_2$, $\lambda D_2'$ $(\lambda \geq 1)$ respectivement, dans $Z_i$

(resp. $Z'_i$) , on voit facilement que $Z_i(\lambda) \in U_n$ , $Z'_i(\lambda) \in \Omega_n(u')$ , $Z'_i(\lambda) = M_i\, Z_i(\lambda)$ et donc $Z'_i(\lambda)$ $(\lambda \geq 1)$ appartient à $M_i\, U_n \cap \Omega_n(u')$ . Soit $u'$ tel que toutes les conditions ci-dessus soient satisfaites ; définissons un voisinage $U' = \bigcup_{r\leq s\leq n} U'_s$ de $Z_o$ dans $\Omega_n(u')^*$ exactement comme ci-dessus avec $U'_r = U_r$ et avec $K'$ suffisamment grand pour que $U' \subset \widetilde{U}$ ; alors on a $M_i\, U_n \cap U'_n = \emptyset$ pour tout $i$ ; en effet, si $M_i$ est de la forme (3.2), on peut prendre, pour $K'$ donné, $K_1$ tel que $M_i\, V^{(n)}(U_r\, , K_1) \subset U'_n$ ; d'autre part, si $M_i$ est de la forme (3.1) , $Z'_i(\lambda)$ appartient à $M_i\, U_n \cap U'_n$ pour $\lambda$ suffisamment grand. Alors $U_n$ , $U'_n$ étant connexes, $U_n \cup U'_n$ est connexe, et $(U_n \cup U'_n) \cap M_i(U_n \cup U'_n) \neq \emptyset$ pour tout $i$ , d'où résulte la connexité de $\Gamma_{Z_o} U_n = \Gamma_{Z_o}(U_n \cup U'_n)$ .

## BIBLIOGRAPHIE

Les deux résultats de KOECHER cités dans cet exposé se trouvent dans

[1] KOECHER (Max). - Zur Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, 1, Math. Z., t. 59, 1954, p. 399-416.

[2] KOECHER (Max). - Zur Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, 2, Math. Z., t. 61, 1955, p. 455-466.