Henri Cartan

Prolongement des espaces analytiques

Séminaire Henri Cartan, tome 10, n° 2 (1957-1958), exp. n° 11, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_2_A1_0>

PROLONGEMENT DES ESPACES ANALYTIQUES

par Henri CARTAN

Dans les exposés qui suivent, on se propose d'exposer la compactification de SATAKE : $\mathfrak{S}_n$ désignant l'espace de Siegel, et Γ_n le groupe modulaire $Sp(n, \mathbb{Z})$, il s'agit de plonger l'espace analytique $\mathfrak{S}_n/\Gamma_n$ comme ouvert partout dense dans un espace analytique compact, qu'ensuite on réalisera comme sous-variété algébrique normale dans un espace projectif.

On aura besoin d'un critère général de "prolongement" des espaces analytiques, auquel est consacré le présent exposé. On s'inspire ici largement d'un article de W.L. BAILY [1] .

1. Rappel sur les espaces analytiques.

La notion d'"espace analytique" généralise celle de variété analytique complexe (cf. [3] , exposé VI, où l'on dit "espace analytique général" ; nous laissons désormais tomber l'épithète "général". Voir aussi [5]).

Rappelons d'abord la notion d'espace annelé : c'est un espace X muni de la donnée, en chaque point $x \in X$, d'un sous-anneau A_x de l'anneau des germes de fonctions continues (à valeurs complexes) dans X au point x. (En réalité, dans tous les cas pratiques, la collection des anneaux A_x constitue un sous-faisceau du faisceau des germes de toutes les fonctions continues. Mais ici nous pouvons éviter de parler de la notion de faisceau). Désignons par la lettre A la collection des anneaux A_x. Etant donnés deux espaces annelés (X, A) et (X', A'), un homomorphisme sera une application continue $\varphi : X \to X'$ telle que, si $x \in X$ et $f' \in A'_{\varphi(x)}$, $f' \circ \varphi$ soit dans A_x. En particulier, on a la notion d'isomorphisme : c'est un homéomorphisme $\varphi : X \longrightarrow X'$ tel que l'application $f' \to f' \circ \varphi$ soit, pour chaque point x, un isomorphisme de l'anneau $A'_{\varphi(x)}$ sur l'anneau A_x.

On a une notion évidente de structure induite sur un sous-espace ouvert d'un espace annelé.

Soit U un ouvert d'un espace numérique complexe $\mathbb{C}^N$; on appelle sous-ensemble analytique de U un sous-ensemble V fermé dans U qui, au voisinage de chaque point $x \in V$, peut être défini par l'annulation d'un ensemble fini de fonctions holomorphes au voisinage de ce point. Un tel V est muni d'une structure d'espace annelé, comme suit : pour chaque $x \in V$, l'anneau A_x est celui des germes de fonctions (sur V) induits par les germes de fonctions holomorphes de l'espace ambiant $\underset{\sim}{C}^N$. On n'exclut pas le cas où $V = U$ (on égale à 0 un ensemble vide de fonctions).

Par définition, un espace analytique est un espace topologique séparé X muni d'une structure d'espace annelé, et dont tout point possède un voisinage ouvert qui, pour la structure induite d'espace annelé, est isomorphe à un sous-ensemble analytique d'un ouvert d'un $\underset{\sim}{C}^N$. Cela signifie qu'au voisinage de tout point $x \in X$ il existe un système fini d'éléments $f_i \in A_x$ qui réalisent un voisinage de x comme sous-ensemble analytique V d'un ouvert d'un espace $\underset{\sim}{C}^N$, de manière que l'anneau A_x s'identifie à l'anneau des germes induits sur V par les fonctions holomorphes de l'espace ambiant. On supposera toujours que l'espace topologique X sous-jacent à un espace analytique est réunion dénombrable de compacts.

Cas particulier : un espace analytique X est une variété analytique (complexe) de dimension n si, au voisinage de chaque point $x \in X$, X peut se réaliser comme un ouvert de $\underset{\sim}{C}^n$. Pour cela, il faut et il suffit que l'anneau A_x soit isomorphe (comme anneau analytique) à l'anneau $\mathcal{H}_n$ des séries entières convergentes à n variables.

Si X et X' sont deux espaces analytiques, on appelle application analytique (ou holomorphe) toute application continue $\varphi : X \rightarrow X'$ qui est un homomorphisme pour les structures d'espaces annelés. En particulier, on a la notion de fonction holomorphe (à valeurs scalaires) : c'est une application $f : X \rightarrow \underset{\sim}{C}$ qui, en chaque point $x \in X$, appartient à l'anneau A_x . On a donc aussi la notion de fonction holomorphe dans un ouvert U de X .

Soit X un espace analytique, et Y un sous-ensemble fermé de X , tel que, au voisinage de chaque point $y \in Y$, Y puisse être défini par l'annulation d'un ensemble fini de fonctions holomorphes (dans X) au voisinage de y . On dit alors que Y est un sous-ensemble analytique de X . Il est facile de définir sur Y une structure induite d'espace analytique : si $y \in Y$, l'anneau B_y sera l'anneau des germes de fonctions induits sur Y , au voisinage de y , par les éléments de l'anneau A_y (germes de fonctions holomorphes dans X au point y). L'anneau B_y s'identifie à un quotient de l'anneau A_y . Les anneaux B_y définissent sur Y une structure d'espace analytique : la question étant purement locale, on peut supposer X réalisé comme sous-ensemble analytique V dans un ouvert d'un espace $\underset{\sim}{C}^N$; alors Y est réalisé, au voisinage de y, comme sous-ensemble analytique W contenu dans V, et l'anneau B_y s'identifie à l'anneau des germes induits sur W par les germes de fonctions holomorphes de l'espace ambiant $\underset{\sim}{C}^N$.

On dit que l'espace analytique X est <u>irréductible</u> au point $a \in X$ si l'anneau A_a est <u>intègre</u>. On démontre que, au voisinage de tout point a, X est réunion d'un nombre <u>fini</u> de sous-espaces irréductibles en a, cette décomposition étant unique ; les sous-espaces irréductibles de la décomposition s'appellent les composantes <u>irréductibles</u> au point a. On a aussi la notion d'espace irréductible au sens global : X est irréductible s'il est impossible de trouver deux sous-espaces analytiques Y et Z tels que $X = Y \cup Z$, $Y \neq X$, $Z \neq X$. Tout espace analytique s'écrit d'une seule manière comme réunion (localement finie) d'espaces analytiques irréductibles au sens global.

Si X est irréductible au point a, on définit la <u>dimension</u> (complexe) de X au voisinage de a. On dit qu'un espace analytique X est <u>purement</u> <u>n-dimensionnel</u> si, en chacun de ses points x, toutes les composantes irréductibles de X au point x sont de dimension n. Tout espace irréductible (au sens global) est purement n-dimensionnel, pour un n convenable ; par contre, X peut être réductible en certains points.

Soit X un espace purement n-dimensionnel ; on appelle point <u>régulier</u> de X tout point qui possède un voisinage ouvert isomorphe à une variété analytique de dimension n. On démontre (cf. [3], exp. IX) que l'ensemble des points réguliers de X est un ouvert partout dense, et que l'ensemble S des points singuliers (i.e. : non réguliers) de X est un sous-espace analytique de dimension $\leq n - 1$ (c'est-à-dire qu'en chaque point de S, les composantes irréductibles de S sont toutes de dimension $\leq n - 1$). Pour que X, purement n-dimensionnel, soit irréductible globalement, il faut et il suffit que l'ouvert des points réguliers de X soit <u>connexe</u>.

Soit X un espace analytique, irréductible et de dimension n en un point $a \in X$. Il existe un système fondamental de voisinages ouverts U de a jouissant de la propriété suivante : S désignant l'ensemble des points singuliers de X voisins de a, les intersections $(X - S) \cap U$ sont <u>connexes</u>.

On dit qu'un espace analytique X est <u>normal</u> en un point $a \in X$ si l'anneau A_a est un anneau d'intégrité <u>intégralement clos</u>. Cela revient à dire que si on réalise (au voisinage de a) X comme sous-ensemble analytique V d'un ouvert d'un espace $\underset{\sim}{C}^N$, V est normal au point correspondant à a . D'après OKA, l'ensemble des points où un espace X n'est pas normal est un sous-espace analytique de X (voir [3], exp. X, théorème 3 bis) ; en particulier, si X est normal au point a , X est normal aux points assez voisins de a .

Normalisation : Soit X un espace analytique. Introduisons l'ensemble $\tilde{X}$ des composantes irréductibles de X en ses différents points ; on a une application évidente $p : \tilde{X} \to X$. On définit sur $\tilde{X}$ la topologie suivante : un système fondamental d'ouverts de $\tilde{X}$ s'obtient en prenant arbitrairement un ouvert U de X et un sous-ensemble analytique Y de U dont toutes les composantes irréductibles (en tous les points de Y) soient des éléments de $\tilde{X}$; l'ensemble de ces composantes est, par définition, un ouvert de $\tilde{X}$, et de tels ouverts engendrent la topologie de $\tilde{X}$ par définition. Alors l'application $p : \tilde{X} \to X$ est continue. La topologie de $\tilde{X}$ est séparée. Soit $\tilde{a}$ un point de $\tilde{X}$, et $a = p(\tilde{a})$; soit n la dimension de la composante $\tilde{a}$. Considérons les points de X voisins de a , et qui appartiennent à la composante $\tilde{a}$ et sont des points réguliers (de dimension n) de X . Si une fonction f est définie et holomorphe en ces points (dans un voisinage de a) et si elle est bornée au voisinage de a , alors la fonction $f \circ p$ se prolonge par continuité en tous les points de $\tilde{X}$ voisins de $\tilde{a}$. Les germes de fonctions ainsi obtenus au point $\tilde{a} \in \tilde{X}$ forment un anneau $\hat{A}_{\tilde{a}}$; on démontre que ces anneaux définissent sur $\tilde{X}$ une structure d'espace analytique normal (i.e. : normal en chacun de ses points). L'espace analytique $\tilde{X}$, muni de l'application $p : \tilde{X} \to X$, s'appelle le normalisé de l'espace X . On notera qu'"en général" , l'image réciproque d'un point de X se compose d'un unique point de $\tilde{X}$; les points de X qui font exception sont précisément les points où X n'est pas irréductible. Même lorsque $p : \tilde{X} \to X$ est un homéomorphisme, p n'est pas nécessairement un isomorphisme des structures analytiques, car il peut y avoir sur $\tilde{X}$ plus de fonctions holomorphes que sur X .

D'une façon précise, soit a un point de X où X est irréductible, et soit $\tilde{a}$ son image réciproque dans $\tilde{X}$. Alors l'application $p : \tilde{X} \to X$ définit une injection $A_a \to \hat{A}_{\tilde{a}}$ des anneaux de fonctions holomorphes, et $\hat{A}_{\tilde{a}}$ est la clôture intégrale de l'image de A_a . Rappelons que $\hat{A}_{\tilde{a}}$ est un module de type fini sur A_a .

2. Rappel concernant le quotient d'un espace analytique par un groupe proprement discontinu d'automorphismes. (cf. [3] , exp. XII ; et [2]).

Soit X un espace analytique, et soit Γ un groupe d'automorphisme de X (automorphismes pour la structure analytique). Rappelons qu'on dit que Γ est proprement discontinu si, pour tout couple de points (a, b) de X, il existe deux voisinages ouverts $U(a)$ et $V(b)$ jouissant de la propriété suivante : les $s \in \Gamma$ tels que $s.V(b)$ rencontre $U(a)$ sont en nombre fini et satisfont à $s.b = a$. S'il en est ainsi, l'espace quotient X/Γ est séparé, le groupe de stabilité $\Gamma(a)$ de chaque point a est fini (et en général réduit à un seul élément) ; de plus tout point a possède un voisinage ouvert $U(a)$, stable par $\Gamma(a)$, tel que l'application naturelle

$$U(a)/\Gamma(a) \longrightarrow X/\Gamma$$

soit un homéomorphisme de $U(a)/\Gamma(a)$ sur un ouvert de X/Γ.

Localement, l'espace X/Γ s'identifie donc au quotient d'un espace analytique par un groupe fini d'automorphismes. On montre alors que X/Γ est un espace analytique (on définit, en un point $a' \in X/\Gamma$, l'anneau $B_{a'}$ comme celui des fonctions f continues au voisinage de a' et telles que, si on les restreint à un voisinage assez petit V de a', la fonction $f \circ p$ soit holomorphe dans $p^{-1}(V)$; p désigne la projection $X \longrightarrow X/\Gamma$). De plus, si X est un espace analytique normal, X/Γ est aussi normal. D'une façon plus précise, on montre que si X est une variété analytique, l'espace X/Γ est, au voisinage de chacun de ses points, isomorphe à un cône algèbrique (au voisinage de son sommet, en lequel il est normal).

Tout cela s'applique notamment au cas qui nous intéresse ici : celui où X est l'espace de Siegel $\mathfrak{S}_n$, et Γ un groupe commensurable au groupe $Sp(n, \mathbb{Z})$.

3. Prolongement d'un espace normal.

Le problème est le suivant : soit X un espace localement compact, V un ouvert partout dense dans X, $W = X - V$. Supposons définie sur V une structure d'espace analytique normal de dimension m. Il s'agit de savoir s'il existe sur X une structure d'espace analytique normal qui induise sur V la structure donnée, et pour laquelle W soit un sous-espace analytique de dimension $< m$ (i.e. en chaque point de W, les composantes irréductibles de W doivent être de dimension $< m$). On supposera que V est réunion dénombrable de compacts.

Or si le problème est possible, sa solution est unique. En effet si $x \in X$, l'anneau A_x des fonctions (dans X) holomorphes au point x est nécessairement le suivant : une fonction f définie et continue sur X au voisinage de x définit un élément de A_x si et seulement si f est holomorphe aux points de

V assez voisins de x .

Que le problème soit possible ou non, soit $\mathcal{A}$ la structure annelée définie sur X comme il vient d'être dit. Cette structure induit sur V la structure analytique donnée, et l'on se propose de donner un système de conditions suffisantes (d'ailleurs nécessaires) pour que le problème posé admette une solution.

THÉORÈME 1. - Avec les notations précédentes, faisons les hypothèses que voici :

(i) tout point $x_0 \in W$ possède (dans X) un système fondamental de voisinages ouverts U tels que $V \cap U$ soit irréductible (comme espace analytique) ;

(ii) $\mathcal{A}$ induit sur W une structure d'espace analytique de dimension $< m$ $(m = \dim V)$;

(iii) chaque point $x_0 \in W$ possède un voisinage ouvert U tel que les fonctions "holomorphes" dans U séparent les points de $V \cap U$ (N.B : on convient de dire qu'une fonction continue dans un ouvert U de X est "holomorphe" si, en chaque point $x \in U$, elle appartient à l'anneau $\mathcal{A}_x$).

Alors $\mathcal{A}$ définit sur X une structure d'espace analytique normal, et W est un sous-espace analytique (normal ou non) de X .

L'énoncé précédent renforce un théorème de Baily (loc. cit.) ; contrairement à BAILY, nous ne supposons pas a priori que W , au voisinage de chacun de ses points, puisse être défini par un nombre fini d'équations $f_i(x) = 0$, où les f_i sont "holomorphes".

On va en fait démontrer l'énoncé un peu plus fort que voici :

THÉORÈME 2. - Avec les notations précédentes, faisons les hypothèses (i) et (ii) du théorème 1 , et soit a un point de W jouissant de la propriété suivante :

(iii') a possède un voisinage ouvert U tel que les fonctions "holomorphes" dans U séparent les points de $V \cap U$.

Alors il existe un voisinage ouvert U_0 de a sur lequel $\mathcal{A}$ induit une structure d'espace analytique normal, $W \cap U_0$ étant un sous-espace analytique (de dimension $< m$).

Avant d'aborder la démonstration (assez longue) du théorème 2 , établissons d'abord la

PROPOSITION 1. - Sous l'hypothèse (i) , l'anneau $\mathcal{A}_{x_0}$ est un anneau normal (i.e. : un anneau d'intégrité intégralement clos) quel que soit le point $x_0 \in X$.

Lorsque $x_0 \in V$, c'est vrai par l'hypothèse. Supposons $x_0 \in W$, et montrons d'abord que l'anneau A_{x_0} est intègre : soient f et g deux fonctions "holomorphes" au voisinage de x_0 , telles que le produit fg soit identiquement nul au voisinage de x_0 ; soit U un voisinage ouvert de x_0 dans lequel f et g soient holomorphes, fg soit identiquement nul, et tel que $V \cap U$ soit irréductible. Puisque f et g induisent sur $V \cap U$ de vraies fonctions analytiques dont le produit est nul, et puisque $V \cap U$ est irréductible, l'une des fonctions f et g (f par exemple) induit 0 sur $V \cap U$; puisque $V \cap U$ est dense dans U , il s'ensuit que f est nulle en tout point de U , donc f définit l'élément 0 de l'anneau A_{x_0} .

Soit toujours $x_0 \in W$; montrons que l'anneau A_{x_0} est intégralement clos. Soient f et $g \in A_{x_0}$, g n'étant identiquement nulle dans aucun voisinage de x_0 ; supposons que f/g satisfasse à une équation

$$(f/g)^n + \sum_{0 \leq i \leq n} a_i(x)\ (f/g)^i = 0$$

à coefficients $a_i(x)$ "holomorphes" au voisinage de x_0 . Alors il existe sur V , au voisinage de x_0 , une fonction continue h , holomorphe, telle que $hg = f$, puisque V est normal. Montrons que h se prolonge par continuité aux points de W assez voisins de x_0 , ce qui achèvera la démonstration. Puisque h satisfait à

$$h^n + \sum_{0 \leq i < n} a_i(x)\ h^i = 0$$

en tout point $x \in V$ assez voisin de x_0 , $h(x)$ ne peut avoir qu'un nombre fini de valeurs d'accumulation lorsque x tend vers un point $y \in W$ (assez voisin de x_0). D'après (i) , y possède un système fondamental de voisinages ouverts U tels que $V \cap U$ soit irréductible. Il s'ensuit aussitôt que $h(x)$ ne peut avoir deux valeurs d'accumulation distinctes au point y ; donc $h(x)$ tend vers une limite quand x tend vers y (en restant dans V). La proposition 1 est ainsi démontrée.

4. Outils pour la démonstration du théorème 2 .

L'outil principal va être le théorème de Remmert-Stein (cf. [4] , ainsi que [3] , exp. XIII et XIV) : soit U un ouvert de $\mathbb{C}^N$, et soit W un sous-ensemble analytique de U , de dimension $\leq p$; soit M un sous-ensemble analytique dans l'ouvert $U - W$, qui soit purement m-dimensionnel, avec $m > p$. Alors l'adhérence

$\overline{M}$ de M dans U est un sous-ensemble analytique de U, purement m-dimensionnel. (Autrement dit, aucun point de W n'est "point singulier essentiel" pour M).

On utilisera d'autre part les propriétés des applications analytiques non-dégénérées. Soit X un espace analytique irréductible en un point a ; soient des $f_i \in A_a$, en nombre fini, nulles au point a, mais non simultanément nulles aux points $x \neq a$ et assez voisins de a. Alors A_a est un module de type fini sur le sous-anneau analytique B engendré par les f_i (B se compose de toutes les fonctions holomorphes des f_i). Si f désigne l'application définie par les f_i (f est une application analytique d'un voisinage V de a, dans un espace numérique $\mathbb{C}^n$), f applique le germe de X au point a, sur un germe (irréductible) de sous-ensemble analytique de $\mathbb{C}^n$; f définit alors, sur un voisinage convenable de a dans X, une structure de "revêtement ramifié" d'un sous-ensemble analytique Y d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$; le degré de ce revêtement (nombre de points de l'image réciproque d'un point de Y, chaque point de l'image réciproque étant compté avec son ordre de multiplicité) est égal au degré du corps des fractions de A_a sur le corps des fractions de B. On dit qu'une application analytique $f : X \to C^n$ est non-dégénérée en un point $a \in X$ si a est point isolé de $f^{-1}(f(a))$.

On a aussi la notion de "revêtement ramifié" au sens global : soient X et Y deux espaces analytiques, et f une application analytique propre de X sur Y ("propre" signifie que l'image réciproque de tout compact de Y est un compact de X). Supposons de plus que Y soit irréductible en chacun de ses points, et que chaque point $y_0 \in Y$ possède un voisinage ouvert connexe U tel que la restriction de f à $f^{-1}(U)$ soit un revêtement ramifié (de degré fini) de $f^{-1}(U)$ sur U (on ne suppose pas nécessairement que $f^{-1}(U)$ soit connexe). On dit alors que f définit X comme revêtement ramifié de Y (ni X ni Y ne sont supposés globalement irréductibles). Si Y est globalement irréductible, le degré de ce revêtement ramifié est le même en tous les points de Y ; alors chaque composante irréductible de X est un revêtement ramifié de Y.

5. Démonstration du théorème 2.

Il s'agit de trouver un système de n fonctions $f_i \in A_a$ qui définissent un homéomorphisme d'un voisinage de a (dans X) sur un sous-ensemble analytique X' d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$, de telle manière que cet homéomorphisme définisse un isomorphisme des structures annelées.

LEMME 1. - Il existe un voisinage ouvert U de a jouissant de la propriété suivante : si un sous-ensemble compact $K \subset U$ rencontre W en un point au plus, et est défini par un nombre fini d'équations $g_i(x) = 0$ (g_i "holomorphes" dans U), alors $K \cap V$ se compose de points isolés (qui sont donc en nombre fini si $K \cap W = \emptyset$).

DÉMONSTRATION. - Prenons U assez petit pour pouvoir appliquer l'hypothèse (iii') de l'énoncé. Soit alors un compact K comme dans l'énoncé du lemme 1. L'intersection $K \cap V$ est un sous-ensemble analytique de l'espace analytique $V \cap U$; on veut montrer que chacune de ses composantes irréductibles (dans l'espace $V \cap U$) est réduite à un point. Raisonnons par l'absurde : soit H une composante irréductible de $K \cap V$ non réduite à un point ; soient b et c deux points distincts de H ; d'après (iii'), il existe une fonction g "holomorphe" dans U, telle que $g(b) \neq g(c)$. Si H est compact, ceci est absurde, car toute fonction holomorphe sur un espace analytique compact et connexe est constante. Si H n'est pas compact, son adhérence $\overline{H}$ dans U se compose de H et d'un point $d \in W$; on peut supposer $g(d) = 0$ (en rajoutant au besoin une constante à la fonction g). La fonction g induit sur le compact $\overline{H}$ une fonction continue, nulle en d, et non constante ; donc $|g|$ atteint sa borne supérieure sur $\overline{H}$ en un point de H, et par suite est constante sur H, d'où une contradiction.

LEMME 2. - Il existe un ensemble fini F de fonctions $f_i \in A_a$, nulles au point a, et telles que a soit un zéro commun isolé des f_i.

En effet, d'après (ii), on peut trouver un système fini de fonctions "holomorphes" au voisinage de a, et qui séparent les points de W au voisinage de a. Il suffit donc de trouver un système fini de fonctions holomorphes au voisinage de a, nulles en a, et sans zéro commun dans V au voisinage de a. Soit U un ouvert comme dans (iii') ; supposons qu'il existe un point $x_0 \in V \cap U$ tel que toute fonction "holomorphe" dans U et nulle en a soit nulle en x_0 ; alors si $x \in V \cap U$ est $\neq x_0$, il existe une f holomorphe dans U telle que $f(x) \neq f(x_0)$; en ajoutant une constante à f, on peut supposer que $f(a) = 0$, donc $f(x_0) = 0$, donc $f(x) \neq 0$. Ainsi, en enlevant au besoin à l'ouvert U un point x_0, on peut supposer que, pour tout point $x \in V \cap U$, il existe une f holomorphe dans U, et telle que $f(a) = 0$, $f(x) \neq 0$.

On va prouver, par récurrence descendante sur l'entier n, la proposition suivante : il existe un système fini de f_i holomorphes dans U, nulles en a, et tellesque l'ensemble des zéros communs aux f_i situés dans $V \cap U$ soit un sous-ensemble analytique de dimension $\leq n$. Pour $n = -1$, le lemme 2 sera établi. Or l'assertion à démontrer est triviale pour $n = m$ (dimension de V). Supposons-la prouvée pour n , et montrons qu'on peut adjoindre aux f_i une g holomorphe dans U , telle que l'ensemble des zéros communs à g et aux f_i situés dans $V \cap U$ soit de dimension $\leq n-1$. Désignons par D l'ensemble des points de $V \cap U$ où les f_i s'annulent simultanément ; l'ensemble des composantes irréductibles de D est dénombrable (car on a supposé que l'espace analytique V est réunion dénombrable de compacts). Choisissons un point x_k dans chaque composante irréductible de D ; pour chaque x_k il existe une fonction g_k holomorphe dans U , telle que $g(a) = 0$, $g(x_k) \neq 0$. Il est facile de trouver une série $\sum_k c_k g_k$ (les c_k étant des constantes) qui converge uniformément sur tout compact de U , et dont la somme soit $\neq 0$ en chacun des x_k . Cette somme est holomorphe dans $V \cap U$ parce que V est un espace analytique normal ; donc elle est holomorphe dans U , à cause de la définition des anneaux A_x . Et ceci achève la démonstration du lemme 2 .

LEMME 3. - <u>Il existe une fonction</u> $f \in A_a$, <u>non identiquement nulle sur</u> X <u>au voisinage de</u> a , <u>mais nulle en tout point de</u> W <u>assez voisin de</u> a .

DÉMONSTRATION. - Prenons des fonctions $f_1, \dots, f_n$ "holomorphes" dans un voisinage ouvert U de a , de manière que l'application $f : U \to \underset{\sim}{C}^n$ qu'elles définissent induise un isomorphisme de l'espace analytique $W \cap U$ sur un sous-ensemble analytique W' d'un ouvert U' de $\underset{\sim}{C}^n$. Ceci est possible, à cause de (ii) , et W' est de dimension $< m$. On peut supposer U choisi assez petit pour satisfaire à (iii*) . On peut de plus supposer que U' est un ouvert d'holomorphie ; alors toute fonction holomorphe sur W' est (globalement) induite par une fonction holomorphe sur U' , en vertu de la théorie des faisceaux analytiques cohérents. Soit $U_1 = U \cap f^{-1}(U')$, et soit U_2 un voisinage ouvert de a , contenu dans U_1 , et tel que $V \cap U_2$ soit irréductible (cf. (i)). On va montrer qu'il existe une fonction holomorphe dans U_1 , nulle en tout point de $W \cap U_1$, mais non identiquement nulle dans U_2 . Pour toute g holomorphe dans U_1 , il existe une φ holomorphe dans U' telle que la restriction de g à $W \cap U_1$ s'écrive $\varphi(f_1, \dots, f_n)$; donc $g - \varphi(f_1, \dots, f_n)$ est holomorphe dans U_1 et nulle sur $W \cap U_1$. De deux choses l'une : ou bien f applique U_2 dans W' , et alors, pour des raisons de dimension, les fonctions $f_1, \dots, f_n$ ne séparent pas les points de $V \cap U_2$; puisque les fonctions "holomorphes" dans U_1 séparent les points de $V \cap U_2$, il s'ensuit qu'il existe une g telle que $g - \varphi(f_1, \ldots, f_n)$ ne soit pas identiquement nulle dans $V \cap U_2$, et le lemme est démontré. Ou bien f n'applique pas U_2 dans W', et dans ce cas il existe une ψ holomorphe dans U', nulle sur W', et prenant la valeur 1 en un point $f(x)$, avec $x \in U_2$; donc $\psi(f_1, \ldots, f_n)$ est nulle sur $W \cap U_1$ mais non identiquement nulle dans U_2.

DÉFINITION. - On dit qu'un système fini F de fonctions $f_i \in A_a$ est <u>convenable</u>, s'il satisfait aux conditions suivantes :

(a) les f_i sont nulles au point a, et n'ont pas d'autre zéro commun dans un voisinage assez petit de a ;

(b) il existe une $f_i \in F$ qui s'annule identiquement sur W au voisinage de a, mais n'est identiquement nulle dans aucun voisinage de a ;

(c) F contient un système de fonctions qui définissent un isomorphisme de l'espace analytique $W \cap U$ sur un sous-ensemble analytique d'un ouvert d'un espace $\mathbb{C}^N$ (U désignant un voisinage ouvert assez petit de a).

Les lemmes 2 et 3 montrent qu'il <u>existe des ensembles convenables</u>.

DÉFINITION. - Soit F un ensemble convenable de n fonctions $f_i \in A_a$; on dit qu'un voisinage ouvert U de a (dans X) et un voisinage ouvert U' de l'origine 0 dans $\mathbb{C}^n$, sont F-<u>adaptés</u> s'ils satisfont aux conditions suivantes :

1° les f_i sont holomorphes dans U, et l'application $f : U \to \mathbb{C}^n$ qu'elles définissent envoie U dans U' ;

2° l'application $f : U \to U'$ est propre, et $f^{-1}(0) \cap U = \{a\}$;

3° f induit un isomorphisme de l'espace analytique $W \cap U$ sur son image W' (qui est alors un sous-espace analytique de U') ;

4° $f^{-1}(W') \cap V \cap U$ est un sous-ensemble analytique K de $V \cap U$, de dimension $< m$ en chacun de ses points.

LEMME 4. - <u>Etant donné un ensemble convenable</u> F <u>de</u> $f_i \in A_a$, <u>il existe des couples</u> (U, U'), F-<u>adaptés</u>, <u>aussi petits qu'on veut</u>.

DÉMONSTRATION. - On peut évidemment choisir un voisinage U_1 de a, arbitrairement petit, tel que les $f_i \in F$ soient holomorphes sur l'adhérence $\overline{U}_1$, qu'on peut supposer compacte. D'après (a), on peut en outre supposer que a est l'unique zéro commun aux f_i situé dans $\overline{U}_1$. On peut aussi choisir U_1 assez petit pour que l'application f définisse un homéomorphisme de $W \cap U_1$ sur son image, et que cet homéomorphisme définisse un isomorphisme des structures annelées. Enfin, si U_1 a été pris assez petit, il existe une $f_i \in F$ qui s'annule sur

$W \cap U_1$ sans être identiquement nulle au voisinage de a. On peut supposer que $U_1 \cap V$ est irréductible (cf. (i)), et par suite f_i n'est identiquement nulle au voisinage d'aucun point de $U_1 \cap V$. On peut ensuite prendre un voisinage ouvert U' de $0 \in \underset{\sim}{C}^n$ arbitrairement petit, de manière que $f(W \cap U_1) \cap U'$ soit un sous-ensemble analytique fermé dans U', et de manière que l'image, par f, de la frontière de U_1 ne rencontre pas U'. Posons

$$U = f^{-1}(U') \cap U_1 .$$

On va montrer que (U , U') est un couple F-adapté. La propriété 1° est évidente. Montrons 2° : si C' est un compact $\subset U'$, $f^{-1}(C') \cap U = C$ est compact ; en effet, l'adhérence de C dans $\overline{U}_1$ est compacte, et tout point b adhérent à C est tel que $f(b) \in C'$, donc $b \in f^{-1}(U')$; donc b n'appartient pas à la frontière de U_1, par suite $b \in U_1$, donc $b \in U$, et comme C est fermé dans U, on a $b \in C$. On a déjà dit que la condition 3° est réalisée. Il reste à vérifier la condition 4° : il est clair que $f^{-1}(W') \cap V \cap U$ est un sous-ensemble analytique K de $V \cap U$; si K avait un point intérieur, la fonction f_i déjà citée serait nulle dans un ouvert non vide de $V \cap U$, contrairement à ce qui a été supposé. Ceci prouve bien que K est de dimension $< m$ en chacun de ses points, et le lemme 4 est établi.

LEMME 5. - Soit F un ensemble convenable, et soit (U , U') un couple F-adapté. Si U a été choisi assez petit, l'image $f(U)$ est un sous-ensemble analytique X' de U', purement m-dimensionnel, et irréductible au point $0 \in \underset{\sim}{C}^n$. Soit S' l'ensemble des points où $X' - W'$ n'est pas irréductible, et soit $S = f^{-1}(S') \cap U$. Alors S est un sous-ensemble analytique de $(V \cap U) - K$, de dimension $< m$; f définit $(V \cap U) - (K \cup S)$ comme revêtement ramifié de $X' - (W' \cup S')$.. Si $X' - W'$ est irréductible alors $(V \cap U) - (K \cup S)$ est irréductible.

DÉMONSTRATION. - Supposons U assez petit pour pouvoir appliquer le lemme 1. Soit $x_o \in (V \cap U) - K$; l'ensemble $f^{-1}(f(x_o)) \cap U$ est compact (puisque f est propre), et il ne rencontre pas W ; donc (lemme 1) il est fini, et en particulier l'application f est non-dégénérée au point x_o. Il existe donc un voisinage de x_o que f applique sur un sous-ensemble analytique au voisinage de $x'_o = f(x_o)$; ce sous-ensemble analytique est irréductible en x'_o, et de dimension m (comme V l'est au point x_o). Soient alors x_k les points de $V \cap U$, en nombre fini, tels que $f(x_k) = x'_o$; soit donné, pour chaque x_k, un voisinage ouvert E_k arbitrairement petit ; il existe un voisinage E' de x'_o tel que $f^{-1}(E')$ soit contenu dans la réunion des E'_k , parce que f est propre. Donc l'image $f(U) = X'$ est, au voisinage de chaque point $x'_o \in X' - W'$, la réunion d'un nombre fini de sous-ensembles analytiques, irréductibles en x'_o et de dimension m .

Ainsi $X' - W' = M'$, qui est fermé dans $U' - W'$ (puisque f est une application propre de $(V \cap U) - K$ dans $U' - W'$), est purement m-dimensionnel, et non vide. D'après le théorème de Remmert-Stein, l'adhérence de M' dans U' est un sous-ensemble analytique purement m-dimensionnel. Or cette adhérence n'est autre que $M' \cup W' = X'$: car d'une part X' est fermé (f étant propre), d'autre part tout point de W' est adhérent à M' , puisque $(V \cap U) - K$ est dense dans $V \cap U$.

Le sous-ensemble analytique X' est <u>irréductible</u> à l'origine 0 ; en effet, soit φ une fonction holomorphe dans $\underset{\sim}{C}^n$ au voisinage de 0 ; la fonction $\varphi \circ f$ est "holomorphe" dans X au voisinage de a , car elle est holomorphe en tout point de V assez voisin de a . Or l'anneau A_a est <u>intègre</u> (proposition 1). Donc l'anneau induit sur X' , au voisinage de 0 , par les germes de fonctions holomorphes de l'espace ambiant $\underset{\sim}{C}^n$ est intègre, et ceci prouve que X' est irréductible au point 0 . Il en résulte que l'on pourra choisir des couples F-adaptés (U , U') arbitrairement petits, tels que $(X' - W') \cap U'$ soit <u>irréductible</u>.

Soient maintenant S et S' comme dans l'énoncé du lemme 5 . On sait que S' est un sous-ensemble analytique, de dimension $< m$ en chacun de ses points. Il est clair que $f^{-1}(S')$ coupe l'espace analytique $(V \cap U) - K$ suivant un ensemble analytique S . Or aucun point $x_o \in (V \cap U) - K$ n'est intérieur à S , parce que l'application f est non-dégénérée au point x_o . Donc S est un ensemble analytique de dimension $< m$ en chacun de ses points.

f est évidemment une application propre de $(V \cap U) - (K \cup S)$ sur son image $X' - (W' \cup S')$. Tout point $x'_o \in X' - (W' \cup S')$ possède un voisinage ouvert E' tel que $f^{-1}(E)$ soit un revêtement ramifié de E' , d'après ce qu'on a vu. Donc f définit bien $(V \cap U) - (K \cup S)$ comme revêtement ramifié de $X' - (W' \cup S')$.. Supposons maintenant que $X' - W'$ soit <u>irréductible</u> (ce qu'on peut toujours réaliser, on l'a vu) ; alors $(X' - W') - S'$ est irréductible, pour des raisons de dimension. Soit d le degré du revêtement ramifié : pour chaque point x' d'un ouvert partout dense de $X' - (W' \cup S')$, $f^{-1}(x')$ se compose de d points distincts. Si x' tend vers 0 , ces d points tendent vers a . Or il existe un voisinage ouvert U_2 de a, contenu dans U, tel que $V \cap U_2$ soit irréductible ; alors $(V \cap U_2) - (K \cup S) \cap U_2$ est irréductible (pour des raisons de dimension), et par suite il n'y a qu'une composante irréductible de $(V \cap U) - (K \cup S)$ qui rencontre U_2. Cela veut dire que si $x' \in X' - (W' \cup S')$ est assez voisin de 0, les d points de $f^{-1}(x')$ sont dans la même composante irréductible de $(V \cap U) - (K \cup S)$. Comme cette composante est un revêtement de $X' - (W' \cup S')$, on voit que $(V \cap U) - (K \cup S)$ est irréductible. Le lemme 5 est démontré. On voit que le degré du revêtement ramifié défini par f ne dépend pas du choix du couple (U, U') pourvu que U' soit assez petit et que $(X' - W') \cap U'$ soit irréductible. On l'appellera le degré du système F, et on le notera $d(F)$.

LEMME 6. - Soient $F \subset \widetilde{F}$ deux ensembles "convenables". Soit (U, U') un couple F-adapté, tel que $X' - W'$ soit irréductible. Supposons les fonctions de $\widetilde{F}$ holomorphes dans U, et soit $\widetilde{f} : U \to C^{\widetilde{n}}$ l'application qu'elles définissent. Notons $\pi : C^{\widetilde{n}} \to C^n$ la projection naturelle, et soit $\widetilde{U}' = \pi^{-1}(U')$. Alors le couple $(U, \widetilde{U}')$ est $\widetilde{F}$-adapté, $\widetilde{X}' - \widetilde{W}'$ est irréductible et le revêtement ramifié $f : (V \cap U) - f^{-1}(W' \cup S') \to X' - (W' \cup S')$ se factorise en

$$(1) \qquad (V \cap U) - f^{-1}(W' \cup S') \to X' - \pi^{-1}(W' \cup S') \to X' - (W' \cup S'),$$

qui sont deux revêtements ramifiés. Le degré de revêtement composé est égal au produit des degrés de chacun d'eux.

DÉMONSTRATION. - Il est clair que f se factorise en $\widetilde{f} : U \to C^{\widetilde{n}}$ et $\pi : C^{\widetilde{n}} \to C^n$. Il est immédiat que $\widetilde{f}$ est une application propre de U dans $\widetilde{U}'$, et que $\widetilde{f}^{-1}(0) \cap U = \{a\}$. Les conditions 3° et 4° d'un couple adapté sont évidemment vérifiées par U et $\widetilde{U}'$. Puisque $X' - W'$ est supposé irréductible, il résulte du lemme 5 que $(V \cap U) - f^{-1}(W' \cup S')$ est irréductible, donc son image par f est irréductible. Donc les deux revêtements de la factorisation (1) sont irréductibles, et on peut parler de leurs degrés. L'assertion relative au produit de ces degrés est évidente.

Soit F un ensemble "convenable" (on sait qu'il en existe). Soit $d(F)$ le degré de F. Prenons dans $X' - (W' \cup S')$ un point x'_0 tel que $f^{-1}(x'_0)$ se compose de $d(F)$ points distincts (en supposant $X' - W'$ irréductible). D'après l'hypothèse (iii'), il existe un système fini G de fonctions "holomorphes" dans U, qui séparent ces $d(F)$ points. En adjoignant G à F, on obtient un système $\widetilde{F}$ tel que, dans le lemme 5, le degré du second revêtement (1) soit égal à $d(F)$. Il en résulte que $d(\widetilde{F}) = 1$.

Ainsi l'on aura pu choisir F de façon que $d(F) = 1$. Supposons désormais qu'il en soit ainsi. Soit B l'anneau des germes induits sur X' (au voisinage de 0) par les germes de fonctions holomorphes de l'espace ambiant. La clôture intégrale $\tilde{B}$ de B est un B-module de type fini ; soit (φ_j) un système fini de générateurs de $\tilde{B}$ sur B . Puisque l'anneau A_a est normal (proposition 1), il existe un élément $g_j \in A_a$ qui induit la fonction $\varphi_j \circ f$ aux points de V (voisins de a) où elle est définie. Adjoignons les g_j au système F ; on obtient un système $\tilde{F}$, pour lequel on a évidemment $d(\tilde{F}) = 1$; si $\hat{f}$ désigne l'application définie par $\tilde{F}$, $\hat{f}$ applique un voisinage de a sur un sous-ensemble analytique $\tilde{X}'$, normal à l'origine 0 . Alors $\tilde{X}'$ est normal (et en particulier irréductible) en chacun de ses points suffisamment voisins de 0 .

Ecrivons de nouveau F , f et X' au lieu de $\tilde{F}$, $\tilde{f}$ et $\tilde{X}'$. Supposons choisi un couple F-adapté (U , U') assez petit pour que X' soit normal en tout point de $X' \cap U'$. Il est clair que S' est alors vide, ainsi que S ; et f définit un isomorphisme de $(V \cap U) - K$ sur $X' - W'$. On va montrer que K est vide. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il y ait un point $x_o \in U$ tel que $x_o \notin W$ et $f(x_o) \in W'$. Appliquons le lemme 1 à l'ensemble compact $f^{-1}(f(x_o)) \cap U$, qui rencontre W en un seul point x_1 , distinct de x_o . On en conclut que x_o est un point isolé de $f^{-1}(f(x_o))$, donc l'application f est non-dégénérée au point x_o . Alors f applique tout voisinage de x_o sur un sous-ensemble analytique de dimension m au point $f(x_o)$, et puisque X' est irréductible en ce point, f applique tout voisinage de x_o sur un voisinage de $f(x_o) = f(x_1)$. Or l'image réciproque d'un point de $X' - W'$ se compose d'un seul point ; ceci oblige f à ne prendre, au voisinage de x_1 , que des valeurs situées dans W' ; or ceci contredit l'assertion 4° des couples F-adaptés, et nous avons obtenu une contradiction.

Ainsi f applique biunivoquement $V \cap U$ sur $X' - W'$, et $W \cap U$ sur W' ; f est donc une application continue injective de U sur X' , et comme f est propre, f est un homéomorphisme de U sur X' . Alors il est clair que, par cet homéomorphisme, chaque anneau $A_x (x \in U)$ se transporte sur l'anneau des germes de fonctions holomorphes sur X' au point $f(x)$. Ceci achève enfin la démonstration du théorème 2 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAILY (W. L.). - Satake's compactification of V_n, Amer. J. Math. (à paraître).

[2] CARTAN (Henri). - Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes, Algebraic Geometry and Topology (Symposium in honor of S. Lefschetz). - Princeton, Princeton University Press, 1957 ; p. 90-102.

[3] Séminaire H. CARTAN, t. 6, 1953/54.

[4] REMMERT (R.) und STEIN (K.). - Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen, Math. Annalen, t. 126, 1953, p. 263-306.

[5] SERRE (Jean-Pierre). - Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 6, 1955/56, p. 1-42.