Goro Shimura

# Modules des variétés abéliennes polarisées et fonctions modulaires, II

*Séminaire Henri Cartan*, tome 10, nº 2 (1957-1958), exp. nº 19, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_2_A10_0>

12 mai 1958

# MODULES DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES POLARISÉES
# ET FONCTIONS MODULAIRES, II.

par Goro SHIMURA

Dans cet exposé on s'occupera d'un système analytique de variétés algébriques et on démontrera que les coordonnées de Chow des membres du système se représentent comme des fonctions analytiques.

## 5. Quelques lemmes.

Il est commode d'introduire la notion d'un "point générique" pour les fonctions analytiques. Pour cela, on va d'abord démontrer le lemme suivant.

LEMME 5. - *Soient* $U$ *un ouvert connexe d'un espace numérique complexe* $\mathbf{C}^n$ , $\{f_i(z)\}$ *un ensemble dénombrable de fonctions holomorphes sur* $U$ *et* $k$ *un sous-corps dénombrable du corps* $\mathbf{C}$ *des nombres complexes. Il existe alors une réunion dénombrable* $H = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} H_\nu$ *de sous-ensembles analytiques* $H_\nu$ *de* $U$ , *de dimension* $n - 1$ , *telle que* $(f_1(z_0) , f_2(z_0) , \ldots)$ *soit une spécialisation générique de* $(f_1 , f_2 , \ldots)$ *par rapport à* $k$ *pour tout* $z_0 \in U - H$ ; *cela veut dire qu'il existe un isomorphisme* $\sigma$ *du corps* $k(f_1 , f_2 , \ldots)$ *sur le corps* $k(f_1(z_0) , f_2(z_0) , \ldots)$ *tel que* $f_i^\sigma = f_i(z_0)$ *et* $a^\sigma = a$ *pour* $a \in k$ .

Nous choisissons et fixons, pour chaque entier positif $N$ , un système $\{f_{i_1} , \ldots , f_{i_p}\}$ de telle façon que $f_{i_1} , \ldots , f_{i_p}$ soient algébriquement indépendants sur $k$ et que $f_1 , \ldots , f_N$ soient algébriques sur le corps $k(f_{i_1} , \ldots , f_{i_p})$ . Soit $F$ un polynôme en $X_1 , \ldots , X_p$ , autre que $0$ , à coefficients dans $k$ ; soit $H(N , F)$ l'ensemble des points $z$ de $U$ tels qu'on ait $F(f_{i_1}(z) , \ldots , f_{i_p}(z)) = 0$ . Comme $f_{i_1} , \ldots , f_{i_p}$ sont indépendants sur $k$ , $H(N , F)$ est un sous-ensemble analytique de $U$ , de dimension $n - 1$ . Soit $H_N$ la réunion de $H(N , F)$ pour tous les $F \neq 0$ . Si $z_0 \in U - H_N$ , on a $F(f_{i_1}(z_0) , \ldots , f_{i_p}(z_0)) \neq 0$ pour tout $F \neq 0$ , de sorte qu'alors $f_{i_1}(z_0) , \ldots , f_{i_p}(z_0)$ sont indépendants par rapport à $k$ . D'autre part, on voit que $(f_1(z_o), \ldots, f_N(z_o))$ est une spécialisation de $(f_1, \ldots, f_N)$ par rapport à $k$. Si $z_o \in U - H_N$, on a

$$\dim_k(f_1, \ldots, f_N) = p = \dim_k(f_1(z_o), \ldots, f_N(z_o)) ;$$

par suite $(f_1(z_o), \ldots, f_N(z_o))$ est une spécialisation générique de $(f_1, \ldots, f_N)$ par rapport à $k$ ; on vérifie alors facilement que l'ensemble $H = \bigcup_{N=1}^{\infty} H_N$ jouit de la propriété du lemme.

Les notations $U$, $f_i$ et $k$ étant les mêmes que ci-dessus, nous dirons qu'un point $z_o$ de $U$ est un <u>point générique pour les</u> $f_i$ <u>par rapport</u> à $k$, si $(f_1(z_o), f_2(z_o), \ldots)$ est une spécialisation générique de $(f_1, f_2, \ldots)$ par rapport à $k$. D'après le lemme 5, on voit que "presque tous" les points de $U$ sont génériques pour les $f_i$ par rapport à $k$. Si $z_o$ est générique pour les $f_i$ par rapport à $k$, $(f_1(z'), f_2(z'), \ldots)$ est une spécialisation de $(f_1(z_o), f_2(z_o), \ldots)$ par rapport à $k$, pour tout point $z'$ de $U$.

LEMME 6. - <u>Soient</u> $(u_1, \ldots, u_n)$ <u>un système de</u> $n$ <u>indéterminées et</u> $\mathbb{C}\{u\}$ <u>l'anneau des séries formelles en</u> $(u_1, \ldots, u_n)$ <u>à coefficients complexes. Soit</u> $\{M_o(u) = 1, M_1(u), M_2(u), \ldots\}$ <u>la suite de tous les monônes</u> $u_1^{e_1} \ldots u_n^{e_n}$, <u>et soient</u> $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\lambda\nu} M_\nu(u)$, <u>pour</u> $1 \leq \lambda \leq r$, $r$ <u>éléments de</u> $\mathbb{C}\{u\}$. <u>Supposons qu'il existe</u> $r+1$ <u>polynômes</u> $G_o = 1 + \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu M_\nu(u)$, $G_\lambda = \sum_{\nu=0}^{q_\lambda} b_{\lambda\nu} M_\nu(u)$ $(1 \leq \lambda \leq r)$ <u>à coefficients complexes, premiers entre eux, pour lesquels on a</u> $G_o \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\lambda\nu} M_\nu(u) = G_\lambda$ <u>pour</u> $1 \leq \lambda \leq r$. <u>On a alors</u>

$$\mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_p, b_{1o}, \ldots, b_{\lambda\nu}, \ldots) = \mathbb{Q}(c_{1o}, \ldots, c_{\lambda\nu}, \ldots),$$

$\mathbb{Q}$ <u>désignant le corps des nombres rationnels.</u>

Comme on a $(1 + \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu M_\nu(u))^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (-\sum_{\nu=1}^{p} a_\nu M_\nu(u))^m$, on voit facilement que le corps $\mathbb{Q}(a_\nu, b_{\lambda\nu})$ contient $\mathbb{Q}(c_{\lambda\nu})$. Soit $\sigma$ un automorphisme de $\mathbb{C}$ qui laisse fixes les éléments de $\mathbb{Q}(c_{\lambda\nu})$ ; $\sigma$ peut être prolongé en un automorphisme du corps des fractions de $\mathbb{C}\{u\}$, que l'on désignera encore par $\sigma$, au moyen de la formule :

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu M_\nu(u)\right)^\sigma = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu^\sigma M_\nu(u)$$

pour $\sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu M_\nu(u) \in \underset{\sim}{C}\{u\}$ . On a alors $G_\lambda/G_o = G_\lambda^\sigma/G_o^\sigma$ pour tout $\lambda$ . Comme $G_o, \dots, G_r$ sont premiers entre eux, il existe $r$ nombres complexes $h_\lambda$ tels que $G_o$ et $\sum_{\lambda=1}^{r} h_\lambda G_\lambda$ sont premiers entre eux. D'après la relation

$$G_o \sum_{\lambda=1}^{r} h_\lambda G_\lambda^\sigma = G_o^\sigma \sum_{\lambda=1}^{r} h_\lambda G_\lambda$$

on voit que $G_o^\sigma$ est un multiple de $G_o$ . Comme $G_o$ et $G_o^\sigma$ s'expriment sous les formes

$$G_o = 1 + \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu M_\nu(u) \ , \quad G_o^\sigma = 1 + \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu^\sigma M_\nu(u) \ ,$$

on a $G_o = G_o^\sigma$ ; d'où résulte qu'on a $G_\lambda = G_\lambda^\sigma$ pour tout $\lambda$ ; en d'autres termes, $\sigma$ laisse fixes les $a_\nu$ et les $b_{\lambda\nu}$ . On en déduit que les $a_\nu$ et les $b_{\lambda\nu}$ appartiennent à $\underset{\sim}{Q}(c_{\lambda\nu})$ ; ce qui complète la démonstration.

LEMME 7. - Soient $U$ et $V$ deux ouverts connexes respectivement de $\underset{\sim}{C}^n$ et de $\underset{\sim}{C}^m$ ; soient $F_\lambda(u , v)$ , pour $1 \leq \lambda \leq r$ , $r$ fonctions holomorphes sur $U \times V$ , où $u$ et $v$ désignent respectivement des points de $U$ et de $V$ . Supposons que, pour chaque $v_1 \in V$ , il existe $r+1$ polynômes $G_o(u ; v_1) , \dots , G_r(u ; v_1)$ en $u$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(G1) $F_\lambda(u , v_1) G_o(u ; v_1) = G_\lambda(u ; v_1)$ pour $1 \leq \lambda \leq r$ ;

(G2) les polynômes $G_o(u ; v_1) , \dots , G_r(u ; v_1)$ sont premiers entre eux ;

(G3) le polynôme $G_o(u ; v_1)$ est de degré $d$ , $d$ étant un entier qui ne dépend pas de $v_1 \in V$ .

Alors, il existe des fonctions $H_{\lambda\nu}(v)$ sur $V$ telles que l'on ait, pour chaque $v_1 \in V$ ,

$$G_\lambda(u ; v_1) = \gamma(v_1) \sum_{\nu=0}^{t} H_{\lambda\nu}(v_1) M_\nu(u) \qquad (0 \leq \lambda \leq r) ,$$

où $\gamma(v_1)$ est un nombre autre que 0 et les $M_\nu(u)$ sont des monômes en $u$ à coefficient 1.

On va d'abord démontrer que $G_o(u ; v_1)$ est partout $\neq 0$ sur $U$ . D'après (G2), il existe $r$ nombres complexes $c_\lambda$ tels que $G_o(u ; v_1)$ et $\sum_{\lambda=1}^{r} c_\lambda G_\lambda(u ; v_1)$ soient premiers entre eux. On a, en vertu de (G1) ,

$$G_o(u ; v_1) \sum_{\lambda=1}^{r} c_\lambda F_\lambda(u , v_1) = \sum_{\lambda=1}^{r} c_\lambda G_\lambda(u ; v_1) ;$$

la fonction $\sum_{\lambda=1}^{r} c_\lambda F_\lambda(u , v_1)$ est holomorphe sur $U$ ; ce qui démontre que $G_o(u ; v_1)$ est partout $\neq 0$ sur $V$ .

On peut se borner à considérer le cas où $U$ contient l'origine. Chaque fonction $F_\lambda$ admet alors un développement de la forme

$$F_\lambda(u\ ,\ v) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\lambda\nu}(v)\ M_\nu(u)$$

qui converge dans un voisinage de l'origine pour chaque $v \in V$, où

$$\{M_0(u) = 1\ ,\ M_1(u)\ ,\ M_2(u)\ ,\ \dots\}$$

est la suite de tous les monômes $u_1^{e_1} \dots u_n^{e_n}$ ; on sait que les coefficients $f_{\lambda\nu}(v)$ sont des fonctions holomorphes sur $V$. Soit $x$ un point générique de $V$ pour les $f_{\lambda\nu}$ par rapport à $\underset{\sim}{Q}$. Il existe $r + 1$ polynômes $G_0(u\ ;\ x)\ ,\ \dots\ ,\ G_r(u\ ;\ x)$ jouissant des propriétés (G1 - 3). Comme $G_0(u\ ;\ x)$ n'est pas nul à l'origine, les $G_\lambda(u\ ;\ x)$ s'expriment sous la forme

$$\xi G_0(u\ ;\ x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{p} \alpha_\nu M_\nu(u)\ ,$$

$$\xi G_\lambda(u\ ;\ x) = \sum_{\nu=0}^{q_\lambda} \beta_{\lambda\nu} M_\nu(u) \qquad (1 \leq \lambda \leq r)$$

où $\xi$, les $\alpha_\nu$ et les $\beta_{\lambda\nu}$ sont des nombres complexes. On a, en vertu de (G1),

$$(*) \qquad (1 + \sum_{\nu=1}^{p} \alpha_\nu\ M_\nu(u)) \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\lambda\nu}(x)\ M_\nu(u) = \sum_{\nu=0}^{q_\lambda} \beta_{\lambda\nu} M_\nu(u)$$

pour chaque $\lambda$ ; d'après le lemme 6, on a $\underset{\sim}{Q}(f_{\lambda\nu}(x)) = \underset{\sim}{Q}(\alpha_\nu\ ,\ \beta_{\lambda\nu})$. Il existe donc des fonctions rationnelles $R_\nu$, $S_{\lambda\nu}$ à coefficients dans $\underset{\sim}{Q}$ tels qu'on ait

$$\alpha_\nu = R_\nu(f_{ij}(x))\ , \qquad \beta_{\lambda\nu} = S_{\lambda\nu}(f_{ij}(x))\ .$$

Posons, pour tout $v \in V$ :

$$a_\nu(v) = R_\nu(f_{ij}(v))\ , \qquad b_{\lambda\nu}(v) = S_{\lambda\nu}(f_{ij}(v))\ ;$$

les $a_\nu(v)$ et les $b_{\lambda\nu}(v)$ sont des fonctions méromorphes sur $V$. Comme $x$ est générique pour les $f_{\lambda\nu}$, on a

$$(1 + \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu(v)\ M_\nu(u)) \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\lambda\nu}(v)\ M_\nu(u) = \sum_{\nu=0}^{q_\lambda} b_{\lambda\nu}(v)\ M_\nu(u)$$

sur $U \times V$, pour chaque $\lambda$. Nous allons maintenant démontrer que les $a_\nu$ et les $b_{\lambda\nu}$ sont holomorphes sur $V$. On peut supposer que

$$\{M_0(u) = 1, M_1(u)\ ,\ \dots\ ,\ M_p(u)\}$$

est l'ensemble de tous les monômes $u_1^{e_1} \dots u_n^{e_n}$ de degré $\leq d$. Soit $y$ un point de $V$ ; supposons que $b_{ij}$ ne soit pas holomorphe en $y$. Alors il existe une suite $\{y_1\ ,\ y_2\ ,\ \dots\}$ de points de $V$ qui converge vers $y$, et telle que l'on ait

$$\lim_{h \to \infty} b_{ij}(y_h)^{-1} = 0\ .$$

Soit $B$ le sous-anneau des éléments $g(v)$ de $Q(f_{\lambda\nu}(v))$ tels que $\lim_{h \to \infty} g(y_h)$ existe et soit fini. Posons

$$\varphi(g) = \lim_{h \to \infty} g(y_h)$$

pour $g \in B$ ; alors $\varphi$ est un homomorphisme de $B$ dans $\underset{\sim}{C}$ ; on a

$$\varphi(f_{\lambda\nu}) = f_{\lambda\nu}(y)$$

puisque les $f_{\lambda\nu}$ sont holomorphes en $y$. On voit ainsi que $(f_{\lambda\nu}(y) , 0)$ est une spécialisation de $(f_{\lambda\nu} , b_{ij}^{-1})$ par rapport à $\underset{\sim}{Q}$. Comme $x$ est générique pour les $f_{\lambda\nu}$, $(f_{\lambda\nu}(y) , 0)$ est une spécialisation de $(f_{\lambda\nu}(x) , \beta_{ij}^{-1})$ par rapport à $\underset{\sim}{Q}$. On prolonge cette spécialisation en une spécialisation

$$(f_{\lambda\nu}(x) , \beta_{ij}^{-1} , (1 , \alpha_\nu , \beta_{\lambda\nu})) \longrightarrow (f_{\lambda\nu}(y) , 0 , (\alpha'_0 , \alpha'_\nu , \beta'_{\lambda\nu}))$$

par rapport à $\underset{\sim}{Q}$, où l'on considère $(1 , \alpha_\nu , \beta_{\lambda\nu})$ et $(\alpha'_0 , \alpha'_\nu , \beta'_{\lambda\nu})$ comme deux points de l'espace projectif de dimension $p + r + \sum_{\lambda=1}^{r} q_\lambda$. On vérifie facilement $\alpha'_0 = 0$, car la spécialisation $(1 , \alpha_\nu , \beta_{\lambda\nu}) \to (\alpha'_0 , \alpha'_\nu , \beta'_{\lambda\nu})$ est compatible avec la spécialisation $\beta_{ij}^{-1} \to 0$.

On a donc, d'après la relation (*),

$$\Big(\sum_{\nu=1}^{p} \alpha'_\nu M_\nu(u)\Big) \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\lambda\nu}(y) M_\nu(u) = \sum_{\nu=0}^{q_\lambda} \beta'_{\lambda\nu} M_\nu(u) \quad ;$$

comme $(\alpha'_0 , \alpha'_\nu , \beta'_{\lambda\nu})$ est un point de l'espace projectif, le polynôme $\sum_{\nu=1}^{p} \alpha'_\nu M_\nu(u)$ n'est pas $0$. On a, en vertu de (G1),

$$G_0(u ; y) \sum_{\nu=0}^{q_\lambda} \beta'_{\lambda\nu} M_\nu(u) = G_\lambda(u ; y) \sum_{\nu=1}^{p} \alpha'_\nu M_\nu(u) \qquad (1 \leq \lambda \leq r) .$$

Comme $G_0(u ; y) , \ldots , G_r(u ; y)$ sont premiers entre eux, on voit que $\sum_{\nu=1}^{p} \alpha'_\nu M_\nu(u)$ est un multiple de $G_0(u ; y)$. Le polynôme $G_0(u ; y)$ est d'ordre $d$, et $\sum_{\nu=1}^{p} \alpha'_\nu M_\nu(u)$ est un polynôme autre que $0$, d'ordre $\leq d$ ; il en résulte qu'on a $\sum_{\nu=1}^{p} \alpha'_\nu M_\nu(u) = \eta\, G_0(u ; y)$, où $\eta$ est un nombre complexe autre que $0$ ; ce qui est absurde puisque $G_0(0 ; y)$ n'est pas nul. Les fonctions $b_{\lambda\nu}$ sont donc holomorphes sur $V$. On peut démontrer, de la même manière, que les $a_\nu$ sont holomorphes sur $V$. Posons

$$H_0(u , v) = 1 + \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu(v) M_\nu(u) , \qquad H_\lambda(u , v) = \sum_{\nu=0}^{q_\lambda} b_{\lambda\nu}(v) M_\nu(u)$$

pour $1 \leq \lambda \leq r$ . On a alors

$$H_o(u, v)\, F_\lambda(u, v) = H_\lambda(u, v) \qquad (1 \leq \lambda \leq r) .$$

Il en résulte qu'on a pour chaque $v_1 \in V$

$$G_o(u ; v_1)\, H_\lambda(u, v_1) = G_\lambda(u ; v_1)\, H_o(u, v_1) \qquad (1 \leq \lambda \leq r) ;$$

comme $G_o(u ; v_1), \ldots, G_r(u ; v_1)$ sont premiers entre eux, on voit que $H_o(u, v_1)$ est un multiple de $G_o(u ; v_1)$ . Le polynôme $G_o(u ; v_1)$ est d'ordre $d$ , et $H_o(u, v_1)$ est un polynôme autre que $0$ , d'ordre $\leq d$ ; on en déduit qu'il existe un nombre $\gamma(v_1) \neq 0$ tel que

$$G_o(u ; v_1) = \gamma(v_1)\, H_o(u, v_1) ;$$

on a alors $G_\lambda(u ; v_1) = \gamma(v_1)\, H_\lambda(u, v_1)$ pour tout $\lambda$ ; ce qui complète la démonstration du lemme 7.

## 6. Systèmes analytiques de variétés algébriques.

Soient $U$ et $S$ deux ouverts connexes respectivement de $\mathbb{C}^n$ et de $\mathbb{C}^m$ ; soient $f_i(u, s)$ , pour $0 \leq i \leq N$ , $N + 1$ fonctions holomorphes sur $U \times S$ , où $u$ et $s$ désignent respectivement les points de $U$ et de $S$ . Nous considérons les propriétés suivantes pour les fonctions $f_i$ :

(S1) On a rang $\begin{bmatrix} f_o(u, s) & f_1(u, s) & \ldots & f_N(u, s) \\ \frac{\partial f_o}{\partial u_1}(u, s) & \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(u, s) & \ldots & \frac{\partial f_N}{\partial u_1}(u, s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_o}{\partial u_n}(u, s) & \frac{\partial f_1}{\partial u_n}(u, s) & \ldots & \frac{\partial f_N}{\partial u_n}(u, s) \end{bmatrix} = n + 1$ partout sur $U \times S$ .

S'il en est ainsi, il n'y a aucun point $(u, s)$ de $U \times S$ tel qu'on ait $f_i(u, s) = 0$ pour $0 \leq i \leq N$ . On peut alors considérer

$$(f_o(u, s), \ldots, f_N(u, s))$$

comme un point de l'espace projectif $P^N$ de dimension $N$ ; on le désignera par $f(u, s)$ .

(S2) <u>Pour chaque point</u> $s$ <u>de</u> $S$ , <u>il existe une variété algébrique</u> $V(s)$ <u>dans l'espace projectif</u> $P^N$ <u>de dimension</u> $N$ <u>tel que l'ensemble</u>

$$B(s) = \{f(u\ ,\ s)\ |\ u \in U\}$$

<u>soit un ouvert de</u> $V(s)$ <u>au sens de Zariski</u>.

D'après la condition (S1), la dimension de $V(s)$ est $n$ .

(S3) <u>Le degré des variétés projectives</u> $V(s)$ <u>ne dépend pas du point</u> $s \in S$ .

On désignera ce degré par $d$ .

THÉORÈME 3. - <u>Soient les notations comme ci-dessus</u> ; <u>supposons que les</u> $f_i$ <u>satisfassent aux conditions</u> (S1 - 3). <u>Alors, pour tout point</u> $s_o$ <u>de</u> $S$ , <u>il existe un voisinage</u> $W$ <u>de</u> $s_o$ <u>et des fonctions holomorphes</u> $\Phi_o(s)\ ,\ \ldots\ ,\ \Phi_k(s)$ <u>sur</u> $W$ <u>tels que</u> $(\Phi_o(s)\ ,\ \ldots\ ,\ \Phi_k(s))$ <u>soit le point de Chow de</u> $V(s)$ <u>pour tout</u> $s \in W$ .

Nous allons rappeler, avant de démontrer ce théorème, la définition du point de Chow d'une variété algébrique.

Soit $V$ une variété algébrique de dimension $n$ , de degré $d$ , dans l'espace projectif $P^N$ de dimension $N$ , et soit $k$ un corps de définition pour $V$ . Soient $t^{(i)}{}_j$ , pour $1 \leq i \leq n$ , $0 \leq j \leq N$ , $n(N + 1)$ variables indépendantes sur $k$ ; soit $L$ la variété linéaire de dimension $N - n$ définie par les équations

$$\sum_{j=o}^{N} t^{(i)}{}_j\, X_j = 0 \qquad (1 \leq i \leq n)\ ,$$

où les $X_j$ désignent les coordonnées de $P^N$ . On obtient alors $d$ points $(x_o{}^{(i)}\ ,\ \ldots\ ,\ x_N{}^{(i)})$ $(1 \leq i \leq d)$ comme les points de l'intersection $V \cap L$ ; on peut supposer que les $(x_o{}^{(i)}\ ,\ \ldots\ ,\ x_N{}^{(i)})$ sont les conjugués algébriques de $(x_o{}^{(1)}\ ,\ \ldots\ ,\ x_N{}^{(1)})$ sur $k(t)$ non seulement comme points de $P^N$ , mais comme points de l'espace affine de dimension $N + 1$ . Soient $t^{(o)}{}_j$ , pour $0 \leq j \leq N$ , $N + 1$ variables indépendantes sur $k(t)$ ; et $M_p(t^{(o)})$ , pour $1 \leq p \leq \alpha$, les monômes en $(t^{(o)}{}_j)$ à coefficient 1, de degré $d$ . On voit alors facilement qu'il existe un élément $\xi$ de $k(t^{(1)}\ ,\ \ldots\ ,\ t^{(n)})$ tel que l'on ait

$$\xi \prod_{i=1}^{d} \Big(\sum_{j=o}^{N} t^{(o)}{}_j\, x_j{}^{(i)}\Big) = \sum_{p=1}^{\alpha} F_p(t^{(1)}\ ,\ \ldots\ ,\ t^{(n)})\, M_p(t^{(o)})\ ,$$

où les $F_p$ sont des polynômes à coefficients dans $k$ , premiers entre eux.

On peut démontrer que le polynôme $\sum F_p(t^{(1)}, \ldots, t^{(n)}) M_p(t^{(o)})$ est un polynôme homogène en $(t^{(i)}_o, \ldots, t^{(i)}_N)$ de degré $d$, pour chaque $i$. Soient $M_q(t)$ pour $0 \leq q \leq \beta$ les monômes à coefficient 1 en $(t^{(o)}_o, \ldots, t^{(n)}_N)$, de degré $d$ en $(t^{(i)}_o, \ldots, t^{(i)}_N)$ pour chaque $i$. On a alors

$$\sum_{p=1}^{\alpha} F_p(t^{(1)}, \ldots, t^{(n)}) M_p(t^{(o)}) = \sum_{q=o}^{\beta} a_q M_q(t),$$

où les $a_q$ sont des éléments de $k$ ; le point $(a_o, \ldots, a_\beta)$ de l'espace projectif de dimension $\beta$ ne dépend que de la variété $V$ et non du choix de $k$ et de $(t)$. On appellera ce point le <u>point de Chow</u> de $V$ et on le désignera par $c(V)$ ; le polynôme $\sum_{q=o}^{\beta} a_q M_q(t)$ s'appellera la <u>forme de Chow</u> de $V$ en les variables $(t^{(i)}_j)$.

Nous allons maintenant démontrer le théorème 3. Nous désignerons par $L(t)$ la variété linéaire de dimension $N - n$ définie par

$$\sum_{j=o}^{N} t_{ij} X_j = 0 \qquad (1 \leq i \leq n)$$

où les $t_{ij}$ sont des nombres complexes. Fixons un point $s_o$ de $S$. Il existe un $(t')$ tel que l'intersection $L(t') \cap V(s_o)$ consiste en exactement $d$ points $p_1, \ldots, p_d$ de multiplicité 1 et que les $p_\alpha$ soient contenus dans $B(s_o)$ ; on peut supposer, sans perdre la généralité, que la première coordonnée de $p_\alpha$ soit $\neq 0$ pour tout $\alpha$. On fixe un tel $(t')$. D'après la définition de $B(s)$, il existe un point $u^1 \in U$ tel qu'on ait $p_1 = f(u^1, s_o)$. Posons

$$\varphi_i(t, u, s) = \sum_{j=o}^{N} t_{ij} f_j(u, s) \qquad (1 \leq i \leq n) ;$$

on a alors $\varphi_i(t', u^1, s_o) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$. Comme $p_1$ est un point de l'intersection $L(t') \cap V(s_o)$ de multiplicité 1, $L(t')$ est transversal à la variété linéaire tangente en $p_1$ à $V(s_o)$ ; on peut en déduire, en vertu de la condition (S1), qu'on a

$$\operatorname{rang}\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(t', u^1, s_o)\right]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq N}} = n$$

On obtient donc, d'après le théorème des fonctions implicites, $n$ fonctions $g_i(t, s)$ holomorphes en $(t', s_o)$ telles que l'on ait

$$u^1_i = g_i(t', s_o) \qquad (1 \leq i \leq n),$$

$$\sum_{j=0}^{N} t_{ij}\, f_j(g(t\,,\,s)\,,\,s) = 0 \qquad (1 \leq i \leq n)\,.$$

dans un voisinage de $(t'\,,\,s_o)$. Posons

$$h_j(t\,,\,s) = f_j(g(t\,,\,s)\,,\,s) \qquad (0 \leq j \leq N)\,.$$

On obtient, de la même manière, pour chaque point $p_\alpha$, un système de $N+1$ fonctions $h^{(\alpha)}{}_j(t\,,\,s)$ holomorphes en $(t'\,,\,s_o)$ telles que l'on ait

$$p_\alpha = (h^{(\alpha)}{}_o(t'\,,\,s_o)\,,\,\ldots\,,\,h^{(\alpha)}{}_N(t'\,,\,s_o))\,,$$

$$\sum_{j=0}^{N} t_{ij}\, h^{(\alpha)}{}_j(t\,,\,s) = 0 \qquad (1 \leq i \leq n)$$

dans un voisinage de $(t'\,,\,s_o)$. Désignons par $p_\alpha(t\,,\,s)$, pour chaque $\alpha$, le point de $P^N$ dont les coordonnées sont $h^{(\alpha)}{}_o(t\,,\,s)\,,\,\ldots\,,\,h^{(\alpha)}{}_N(t\,,\,s)$ ; $p_\alpha(t\,,\,s)$ est un point de l'intersection $V(s) \cap L(t)$. Comme les $p_\alpha$ sont distincts il existe un voisinage $Y$ de $(t'\,,\,s_o)$ tel que les $p_\alpha(t\,,\,s)$ soient tous distincts pour chaque $(t'\,,\,s)$ de $Y$. De plus, comme on a $h^{(\alpha)}{}_o(t'\,,\,s_o) \neq 0$ pour chaque $\alpha$, on peut prendre le voisinage $Y$ de telle façon que

$$h^{(\alpha)}{}_o(t'\,,\,s) \neq 0 \qquad (1 \leq \alpha \leq d)$$

pour tout $(t\,,\,s)$ de $Y$. Soient maintenant $z_j$, pour $0 \leq j \leq N$, $N+1$ indéterminées et $M_\lambda(z)$, pour $0 \leq \lambda \leq r$, les monômes $z_o^{e_o} \ldots z_N^{e_N}$ de degré $d$ ; on posera $M_o(z) = z_o^{\,d}$. On a alors

$$(1) \qquad \prod_{\alpha=1}^{d} \left( \sum_{j=0}^{N} z_j \frac{h^{(\alpha)}{}_j(t\,,\,s)}{h^{(\alpha)}{}_o(t\,,\,s)} \right) = \sum_{\lambda=0}^{r} F_\lambda(t\,,\,s)\, M_\lambda(z)\,,$$

où les $F_\lambda(t\,,\,s)$ sont des fonctions holomorphes sur $Y$ ; on a $F_o = 1$. Soient $T$ et $W$ deux voisinages ouverts connexes respectivement de $t'$ et de $s_o$ tels qu'on ait $T \times W \subset Y$. Soient $w$ un point de $W$ et $k$ un corps minimum de définition pour $V(w)$. Soit $x \in T$ un point tel que la spécialisation

$$(F_\lambda(t\,,\,w)\,,\,t_{ij}) \longrightarrow (F_\lambda(x\,,\,w)\,,\,x_{ij})$$

soit générique par rapport à $k$. En substituant $(x\,,\,w)$ à $(t\,,\,s)$ dans (1), on a

$$\prod_{\alpha=1}^{d} \left( \sum_{j=0}^{N} z_j \frac{h^{(\alpha)}{}_j(x\,,\,w)}{h^{(\alpha)}{}_o(x\,,\,w)} \right) = \sum_{j=0}^{r} F_\lambda(x\,,\,w)\, M_\lambda(z)\,.$$

On peut considérer $(x_{ij})$ comme un système de variables indépendantes par rapport à $k$. Soit $\sum_{\lambda=0}^{r} G_\lambda(x\,;\,w)\, M_\lambda(z)$ la forme de Chow de $V(w)$ en les variables $(z_j\,,\,x_{ij})$. Comme les $h^{(\alpha)}{}_j(x\,,\,w)$ sont les coordonnées des points $p_\alpha(x\,,\,w)$ de l'intersection $L(x) \cap V(w)$, on vérifie facilement

$$G_0(x\,;\,w) \sum_{\lambda=0}^{r} F_\lambda(x\,,\,w)\, M_\lambda(z) = \sum_{\lambda=0}^{r} G_\lambda(x\,;\,w)\, M_\lambda(z)\,;$$

d'où résulte qu'on a $G_0(x\,;\,w)\, F_\lambda(x\,,\,w) = G_\lambda(x\,;\,w)$. Comme les $G_\lambda(x\,;\,w)$ sont des polynômes à coefficients dans $k$, et comme $x$ est générique pour les $F_\lambda(t\,,\,w)$ et les $t_{ij}$ par rapport à $k$, on a

$$G_0(t\,;\,w)\, F_\lambda(t\,,\,w) = G_\lambda(t\,;\,w) \qquad (1 \leq \lambda \leq r)$$

dans $T$. D'après la propriété de la forme de Chow, les polynômes $G_0(t\,;\,w)\,,\,\ldots\,,\,G_r(t\,;\,w)$ sont premiers entre eux, et $G_0(t\,;\,w)$ est d'ordre $d^n$. On peut donc appliquer le lemme 7 à ces fonctions $F_\lambda(t\,,\,s)$ ; il existe alors des fonctions holomorphes $H_{\lambda\nu}(s)$ sur $W$ et un nombre $\gamma(w) \neq 0$ pour chaque $w \in W$, tels qu'on ait

$$G_\lambda(t\,;\,w) = \gamma(w) \sum_{\nu=0}^{p} H_{\lambda\nu}(w)\, M_\nu(t) \qquad (0 \leq \lambda \leq r)$$

où les $M_\nu(t)$ sont des monômes en $t$ à coefficient 1. Alors, le polynôme

$$\sum_{\lambda,\nu} H_{\lambda\nu}(w)\, M_\nu(t)\, M_\lambda(z)$$

donne la forme de Chow de $V(w)$ pour chaque $w \in W$ ; par suite les $H_{\lambda\nu}(w)$ sont les coordonnées du point de Chow de $V(w)$ pour chaque $w \in W$ ; ce qui démontre le théorème 3.

COROLLAIRE 1. - <u>Les notations et les hypothèses étant comme ci-dessus, il y a des fonctions méromorphes</u> $\Psi_1(s)\,,\,\ldots\,,\,\Psi_k(s)$ <u>sur</u> $S$ <u>telles que l'on ait</u>

$$c(V(s)) = (1\,,\,\Psi_1(s)\,,\,\ldots\,,\,\Psi_k(s))\,,$$

<u>(en changeant l'ordre des indices, s'il y a lieu)</u>, <u>chaque fois que les</u> $\Psi_i(s)$ <u>sont définis en</u> $s$.

Prenons un recouvrement ouvert $\{W_\lambda\}$ de $S$ tel que, pour chaque $W_\lambda$, il y ait des fonctions holomorphes $\Phi_0(s\,;\,\lambda)\,,\,\ldots\,,\,\Phi_k(s\,;\,\lambda)$ sur $W_\lambda$ pour lesquelles on a

$$c(V(s)) = (\Phi_0(s\,;\,\lambda)\,,\,\ldots\,,\,\Phi_k(s\,;\,\lambda))\,,$$

pour tout $s \in W$. On vérifie facilement que si $\Phi_i(s\,;\,\lambda)$ est identiquement nul dans $W_\lambda$ pour un $\lambda$, $\Phi_i(s\,;\,\lambda)$ est identiquement nul pour tous les $\lambda$, car $S$ est connexe. On voit que la valeur

$$\Phi_i(s\ ;\ \lambda)/\Phi_j(s\ ;\ \lambda)$$

ne dépend que de $s$ et non de $\lambda$ si $\Phi_j(s\ ;\ \lambda) \neq 0$ . Supposons que $\Phi_0(s\ ;\ \lambda)$ ne soit pas identiquement nul. On peut alors définir une fonction méromorphe $\Psi_i(s)$ sur $S$ par

$$\Psi_i(s) = \Phi_i(s\ ;\ \lambda)/\Phi_0(s\ ;\ \lambda)$$

pour chaque $i$ . Soit $s_0$ un point de $S$ tel que les $\Psi_i(s)$ soient définis en $s_0$ . Il existe un ouvert $W_\lambda$ contenant $s_0$ . Comme les $\Phi_i(s_0\ ;\lambda)$ donnent les coordonnées du point $c(V(s))$ , il existe un indice $j$ tel que $\Phi_j(s_0\ ;\ \lambda) \neq 0$ . D'après la relation

$$\Phi_j(s_0\ ;\ \lambda) = \Phi_0(s_0\ ;\ \lambda)\ \Psi_j(s_0)$$

on a $\Phi_0(s_0\ ;\ \lambda) \neq 0$ ; on en déduit que $(1\ ,\ \Psi_1(s_0)\ ,\ \ldots\ ,\ \Psi(s_0)) = c(V(s_0))$ .

COROLLAIRE 2. - <u>Les notations et les hypothèses étant comme ci-dessus, soit</u> $k$ <u>un sous-corps dénombrable de</u> $\mathbb{C}$ . <u>Soit</u> $s_0$ <u>un point générique de</u> $S$ <u>pour les</u> $\Psi_i(s)$ <u>par rapport à</u> $k$ . <u>Alors, pour tout point</u> $s$ <u>de</u> $S$ , $V(s)$ <u>est une spécialisation de</u> $V(s_0)$ <u>par rapport à</u> $k$ .

On se sert des mêmes notations que pour la démonstration du corollaire 1, et on suppose que $\Phi_0(s\ ;\ \lambda)$ ne soit pas identiquement nul. Soit $s'$ un point de $S$ , et soit $W$ un ouvert contenant $s'$ . Soit $s''$ un point générique de $W$ pour les $\Phi_i(s\ ;\ \lambda)$ par rapport à $k$ ; alors, $c(V(s'))$ est une spécialisation de $c(V(s''))$ par rapport à $k$ . Comme $s''$ est générique pour $\Phi_0(s\ ;\ \lambda)$ , $\Phi_0(s''\ ;\ \lambda)$ n'est pas nul ; donc les $\Psi_i(s)$ sont définis en $s''$ . Par suite, si $s_0$ est générique pour les $\Psi_i$ par rapport à $k$ , $c(V(s''))$ est une spécialisation de $c(V(s_0))$ par rapport à $k$ , de sorte que $c(V(s'))$ est une spécialisation de $c(V(s_0))$ par rapport à $k$ ; ce qui démontre le corollaire.