ROGER GODEMENT

Séries d' Eisenstein

Séminaire Henri Cartan, tome 10, n^o 1 (1957-1958), exp. n^o 9, p. 1-31
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_1_A9_0>

SÉRIES D'EISENSTEIN

par Roger GODEMENT.

1. Définition des séries d'Eisenstein.

Dans cet exposé on désigne par Γ le groupe modulaire de Siegel, par ρ une représentation holomorphe irréductible de $GL(n, \underline{C})$ [1] dans un espace vectoriel complexe F_ρ de dimension finie, enfin par μ un multiplicateur de Γ (i.e. une représentation de Γ dans un espace F_μ de dimension finie, représentation dont le noyau est supposé d'indice fini dans Γ). On se propose, moyennant des hypothèses sur le plus haut poids

(1.1) $$\alpha(h) = \prod_{i=1}^{i=n} \Delta_i(h)^{\alpha_i}$$

de ρ , de construire à l'aide de développements en série des formes modulaires d'espèce $(\mu ; \rho)$, i.e. des fonctions holomorphes $f(z)$, à valeurs dans

(1.2) $$F = \mathrm{Hom}(F_\mu , F_\rho) ,$$

et vérifiant

(1.3) $$f(Mz) = \rho(cz + d)\, f(z)\, \mu(M)^{-1} \quad \text{pour} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma .$$

Le principe général est le suivant. Dans l'ensemble des fonctions $f(z)$ à valeurs dans F , faisons opérer le groupe Γ en attachant à tout $M \in \Gamma$ l'opérateur $L_{\mu,\rho}(M)$ donné par

(1.4) $$L_{\mu,\rho}(M)^{-1} : \ f(z) \rightarrow \rho(cz + d)^{-1} f(Mz)\, \mu(M) \ ;$$

alors, pour toute fonction $f(z)$, la série

(1.5) $$\sum_{M \in \Gamma} L_{\mu,\rho}(M)\, f(z)$$

représente une forme modulaire d'espèce $(\mu ; \rho)$, si toutefois la série en question veut bien converger ... Si par exemple la fonction $f(z)$ est déjà

---

[1] Dans les exposés de R. GODEMENT, les lettres soulignées d'un trait rectiligne ont la même signification que les lettres soulignées d'un trait ondulé dans les autres exposés de ce Séminaire : elles apparaitraient en caractères gras en typographie.

invariante par un sous-groupe <u>infini</u> Γ_C de Γ, il faudra évidemment remplacer la somme (1.5) par

$$\sum_{M.\Gamma_0} L_{\mu,\rho}(M)\ f(z) \tag{1.6}$$

dans laquelle on somme seulement sur les classes $M.\Gamma_0$ modulo Γ_0 ce qui ne veut naturellement pas dire que cette modification soit suffisante pour faire converger la série (1.5).

L'étude des séries (1.5) pour un groupe discontinu Γ arbitraire ne nous intéressera pas pour le moment, c'est la théorie bien connue des <u>séries de Poincaré</u> qu'on peut faire pour tout groupe discontinu dans toute variété analytique complexe ; voir le Séminaire H. CARTAN 1953/1954, Exposé 1 ; voir aussi le présent Séminaire, Exposé 10 .

Nous utiliserons au contraire ici la structure du groupe Γ, et plus particulièrement la présence dans Γ du sous-groupe des <u>translations entières</u> ; cela est justifié par le fait que si, dans la série (1.5), on somme d'abord sur les translations entières, on remplace la fonction $f(z)$ par une fonction <u>périodique</u> (ou quasi-périodique : il faut tenir compte de μ), de sorte qu'on est alors ramené à une série (1.6) avec Γ_0 = groupe des translations entières. Or toute fonction $f(z)$ quasi-périodique est une somme de fonctions $f(z)$ "élémentaires", i.e. proportionnelles à

$$\exp(2\pi i\ \mathrm{Tr}(sz)) \quad ; \tag{1.7}$$

on est donc ramené, heuristiquement tout au moins, à étudier les séries (1.6) qui correspondent à des fonctions (1.7) : ce sont les <u>séries d'Eisenstein</u> (appelées souvent, en Allemagne, séries de Poincaré).

Pour préciser les coefficients dont nous affecterons les fonctions (1.7) - ce point est capital, malgré les apparences, si l'on veut parvenir à des séries convergentes- partons d'une fonction $f(z)$ et calculons la somme

$$\sum L_{\mu,\rho}(M)\ f(z) = f'(z)$$

où M décrit l'ensemble des <u>translations entières</u> ; on a évidemment

$$f'(z) = \sum f(z + n)\ \mu(n)$$

où n décrit l'ensemble des matrices symétriques entières, et où l'on pose

$$\mu(n) = \mu\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

comme dans les précédents exposés. De là résulte aussitôt que

$$f'(z+n) = f'(z)\,\mu(n)^{-1} \quad ; \tag{1.7}$$

par suite il est raisonnable d'affecter l'exponentielle (1.7) d'un coefficient ω tel que la fonction ainsi obtenue vérifie (1.7) ; or

$$f'(z) = \exp(2\pi i\ \mathrm{Tr}(sz)).\omega \quad , \quad \omega \in \mathrm{Hom}(F_\mu\ ,\ F_\rho) \tag{1.8}$$

vérifie (1.7) si et seulement si l'on a

$$\omega \circ \mu(n)^{-1} = \exp(2\pi i\ \mathrm{Tr}(sn))\omega \quad ; \tag{1.9}$$

si $\omega \neq 0$ cela signifie déjà que le caractère $n \longrightarrow \exp(-2\pi i\ \mathrm{Tr}(sn))$ intervient dans la représentation $n \longrightarrow \mu(n)$, donc que la matrice s est rationnelle ; et (1.9) exprime alors que ω est nul sur les composantes irréductibles de μ autres que $n \longrightarrow \exp(-2\pi i\ \mathrm{Tr}(sn))$.

Choisissons donc une solution $\omega \neq 0$ de (1.9) et considérons la fonction (1.8) ; elle est déjà "invariante" par le sous-groupe de Γ formé des translations entières ; mais il peut arriver que les $M \in \Gamma$ qui laissent fixe (1.8) forment en fait un sous-groupe beaucoup plus grand ; ce sous-groupe est formé des M tels que

$$\exp(2\pi i\ \mathrm{Tr}(s.Mz))\omega = \exp(2\pi i\ \mathrm{Tr}(sz))\ \rho(cz+d) \circ \omega \circ \mu(M)^{-1} \quad ;$$

si en particulier $c = 0$, i.e. si

$$M = \begin{pmatrix} u & un \\ 0 & \check{u} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n = n' & \text{entière} \\ u & \text{entière unimodulaire} \end{cases} \tag{1.10}$$

la relation précédente s'écrit

$$\exp(2\pi i\ \mathrm{Tr}(u'su(z+n)))\omega = \exp(2\pi i\ \mathrm{Tr}(sz))\ \rho(\check{u}) \circ \omega \circ \mu(M)^{-1}$$

et sera vérifiée (dans le cas $\omega \neq 0$) si et seulement si l'on a les relations

$$u'su = s \tag{1.11}$$

$$\rho(\check{u}) \circ \omega \circ \mu(M)^{-1} = \exp(2\pi i\ \mathrm{Tr}(sn))\omega \quad ; \tag{1.12}$$

ces conditions impliquent sur ω des restrictions tout à fait sérieuses dans le cas où s est une matrice positive non définie comme on va le voir.

Si $u = 1$ dans la matrice (1.10) il est clair que (1.12) se réduit à (1.9) ; il suffit donc d'examiner le cas où $n = 0$, i.e. où l'on a

$$M = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \check{u} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad u'su = s \quad ;$$

posant comme dans les exposés précédents $\mu(M) = \mu(u)$ la relation (1.12) s'écrit alors

$$\rho(\check{u}) \circ \boldsymbol{\omega} \circ \mu(u)^{-1} = \omega$$

i.e.

$$\rho(u') \circ \boldsymbol{\omega} \circ \mu(u) = \boldsymbol{\omega} \quad \text{pour} \quad u'su = s \ ,$$

ou, en remplaçant u par u' :

(1.13) $$\rho(u) \circ \omega \circ \mu(u') = \boldsymbol{\omega} \quad \text{pour} \quad usu' = s \text{ , i.e. } u \in U(s) \ ,$$

groupe des unités de s . Or les solutions de cette équation ont été étudiées dans l'exposé 7 , n° 4 ; on a vu alors que (1.13) est vérifié par $\hat{f}(s)$ si f est une forme modulaire d'espèce $(\mu \ ; \rho)$, et les raisonnements exposés alors s'appliquent évidemment à la situation présente sans changement. On trouve ainsi le résultat suivant en supposant (ce qui ne restreint pas la généralité) que

$$s = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $s_1 \gg 0$ de degré $r < n$: considérons dans F_ρ le sous-espace $F_\rho^{(r)}$ formé des vecteurs $\underline{a}$ qui sont invariants par $\rho(g)$ pour

$$g = \begin{pmatrix} 1_r & g_{12} \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}, \quad \det(g_{22}) = 1 \ ;$$

(cf. exposé 8 , n° 1) ; alors (1.13) implique que ω <u>applique</u> F_μ <u>dans le sous-espace</u> $F_\rho^{(r)}$ <u>de</u> F_ρ . Bien entendu cela ne suffit pas à entraîner (1.13) ; en fait $U(s)$ contient comme sous-groupe d'indice fini le groupe

$$U_\infty(s) \ : \ \text{matrices } u = \begin{pmatrix} 1_r & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} u_{12} & \text{entière} \\ u_{22} \in SL(n-r, \underline{Z}) \end{cases}$$

et comme $\rho(u) \circ \omega = \omega$ pour $u \in U_\infty(s)$ d'après ce qui précède on voit que (1.13) exige encore que l'on ait

(1.14) $$\omega \circ \mu(u') = \omega \quad \text{pour} \quad u' \in U_\infty(s) \ ;$$

mais comme le noyau de μ est d'indice fini dans Γ , ceci n'impose qu'un nombre fini de conditions à ω , et finalement on voit que <u>si</u> ω <u>applique</u> F_μ <u>dans</u> $F_\rho^{(r)}$ <u>les</u> $u \in U(s)$ <u>pour lesquels la condition</u> (1.13) <u>est vérifiée forment dans</u> $U(s)$ <u>un sous-groupe d'indice fini</u>.

On est donc conduit pour toute matrice $s \geqslant 0$ à introduire dans Γ le sous-groupe

$$\Gamma_\infty(s) \;:\; \text{matrices} \begin{pmatrix} u & n \\ 0 & \check{u} \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} n = n' & \text{entière} \\ u \in U_\infty(s) \end{cases}$$

(qui, lorsque s est définie, se réduit au sous-groupe Γ_∞ des translations entières) ; pour définir les séries d'Eisenstein associées à s on prend une application

$$\omega \;:\; F_\mu \longrightarrow F_\rho$$

vérifiant (1.9) et

$$\rho(u) \circ \omega \circ \mu(u') = \omega \quad \text{pour} \quad u \in U_\infty(s) \quad ,$$

ce qui implique, comme on l'a vu, que ω applique F_μ dans $F_\rho^{(r)}$ dans le cas non défini ; alors la fonction $\exp(2\pi i \operatorname{Tr}(sz))\omega$ est invariante par le sous-groupe $\Gamma_\infty(s)$, et ceci fait on pose

$$E_{s;\omega}(z) = \sum_{\Gamma_\infty(s).M} \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(s.Mz)) \, \rho(cz + d)^{-1} \circ \omega \circ \mu(M) \quad ;$$

ce sont, par définition, les séries d'Eisenstein.

En ce qui concerne la restriction $s \geqslant 0$ il va de soi qu'elle a pour but de rendre les séries convergentes ! Comme on le verra le comportement des séries précédentes est très différent suivant que s est définie ou non, le premier cas étant beaucoup plus simple que le second. Comme on va le voir, dans le cas $s \gg 0$ les séries d'Eisenstein, dans la mesure où elles convergent, convergent au sens de l'espace $\mathcal{H}^1_\Gamma(\mu ; \rho)$; l'explication de ce phénomène sera donnée dans le prochain exposé, quand nous aurons montré l'existence (pour $\alpha_n > 2n$) de fonctions holomorphes non nulles <u>intégrables dans le demi-plan de Siegel</u>. Par contre le cas où s n'est pas définie n'a pas été suffisamment étudié jusqu'à présent pour que toute obscurité en soit disparue, et il y a lieu de croire qu'on pourrait grandement améliorer les résultats que nous donnerons à ce sujet au n° 4 .

2. <u>Séries d'Eisenstein</u> : <u>cas où</u> s <u>est définie</u>.

Le théorème fondamental dans ce cas est le suivant :

THÉORÈME 1. - Soient s une matrice rationnelle $\gg 0$ et ω un homomorphisme de F_μ dans F_ρ vérifiant

(2.1) $$\omega \circ \mu(n) = \exp(-2\pi i \operatorname{Tr}(sn))\,\omega$$

pour toute matrice $n = n'$ entière. Soit Γ_∞ le sous-groupe de $\Gamma = Sp(n, \underline{Z})$ formé des translations entières. Si l'on a

$$\alpha_n > 2n$$

la série

(2.2) $$E_{s;\omega}(z) = \sum_{\Gamma_\infty . M} \rho(cz+d)^{-1} \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(s.Mz))\omega.\mu(M)$$

converge et représente une Spitzenform d'espèce $(\mu ; \rho)$.

Posons

(2.3) $$J_\rho(M, z) = \rho(cz+d) \quad , \quad I_\rho(z) = \rho(y^{1/2}) \quad ;$$

en choisissant sur F_ρ un produit scalaire adapté à ρ et en posant

(2.4) $$J'_\rho(M, z) = I_\rho(Mz)\, J_\rho(M, z)\, I_\rho(z)^{-1} \quad ,$$

ce qui remplace le "facteur d'automorphie" $J_\rho(M, z)$ par un facteur d'automorphie équivalent, on constate immédiatement que les opérateurs $J'_\rho(M, z)$ sont unitaires :

(2.5) $$J'_\rho(M, z)^* J'_\rho(M, z) = 1 \; .$$

Comme (2.2) s'écrit encore sous la forme

$$\sum I_\rho(z)^{-1} J'_\rho(M, z)^{-1} I_\rho(Mz) \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(s.Mz))\omega.\mu(M)$$

(on supprime à nouveau, pour l'agrément de la dactylo, le signe o qui indique le produit de deux homomorphismes), on voit qu'en posant

(2.6) $$\varphi(z) = I_\rho(z) \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(sz))\,\omega$$

on est ramené à étudier la convergence de la série

(2.7) $$\sum_{\Gamma_\infty . M} J'_\rho(M, z)^{-1} \varphi(Mz)\, \mu(M) = \rho(y^{1/2})\, E_{s;\omega}(z) \; .$$

Comme il s'agit, au facteur $\rho(y^{+1/2})$ près, de fonctions holomorphes, il suffit pour établir que (2.7) converge uniformément sur tout compact de prouver que l'intégrale

$$\int_{z \bmod \Gamma} \sum_{\Gamma_\infty . M} \| J'_\rho(M\ ,\ z)^{-1}\, \varphi(Mz)\, \mu(M) \| \, dz$$

(où $dz = \det(y)^{-n-1}\, dx\, dy$ est la mesure invariante du demi-plan de Siegel) converge ; or puisque les facteurs $J'_\rho(M\ ,\ z)$ et $\mu(M)$ sont unitaires celle-ci s'écrit

$$\int_{z \bmod \Gamma} \sum_{\Gamma_\infty . M} \| \varphi(Mz) \| \, dz = \int_{z \bmod \Gamma_\infty} \| \varphi(z) \| \, dz$$

$$= \int_{z \bmod \Gamma_\infty} \| \rho(y^{1/2})\, \omega \| \exp(-\, 2\, \pi \mathrm{Tr}(sy)) \det(y)^{-n-1}\, dx\, dy$$

$$= \int_{y \gg 0} \| \rho(y^{1/2}) \omega \| \exp(-\, 2\, \pi \mathrm{Tr}(sy)) \det(y)^{-n-1}\, dy \quad ;$$

on est ainsi ramené à une <u>intégrale de Siegel</u>, et la réponse est donnée par le théorème 2 de l'exposé 6 .

Le fait que (2.2) représente une forme modulaire d'espèce $(\mu\, ;\, \rho)$ est trivial. De plus la démonstration précédente prouve la convergence de l'intégrale

$$\int_{z \bmod \Gamma} \| \rho(y^{1/2})\ E_{s;\omega}(z) \| \, dz \quad ,$$

de sorte qu'on a

$$E_{s;\omega} \in \mathcal{H}^1_\Gamma(\mu\, ;\, \rho) \quad ;$$

le fait que $E_{s;\omega}$ soit une Spitzenform résulte alors du

LEMME de Satake. - <u>Soit</u> Γ <u>le groupe modulaire de Siegel</u> ; <u>pour tout multiplicateur</u> μ <u>de</u> Γ <u>et toute représentation holomorphe irréductible</u> ρ <u>de</u> $GL(n\ ,\ \underline{C})$, <u>on a</u>

$$\mathcal{H}^p_\Gamma(\mu\, ;\, \rho) = \mathcal{S}_\Gamma(\mu\ \ ;\, \rho) \qquad \underline{\text{dès que}}\quad p.\alpha_n > 2n\ .$$

Comme ce résultat ne peut s'obtenir qu'en faisant usage, au moins partiellement, de la théorie de la "compactification" de Satake, nous l'admettrons ; il sera bien entendu démontré (et précisé de façon à avoir, pour $p\alpha_n \leq 2n$, une description <u>complète</u> de l'espace $\mathcal{H}^p_\Gamma(\mu\, ;\, \rho)$ en termes de l'opérateur Φ) quand les préliminaires requis auront été exposés.

THÉORÈME 2 (PETERSSON). - <u>Soit</u> $f(z)$ <u>une Spitzenform d'espèce</u> $(\mu\, ;\, \rho)$; <u>on a alors la relation</u>

(2.8) $$< f , E_{s;\omega} >_{\Gamma} = \mathrm{Tr}\,[\,\omega^{*}\, H_{\rho}(4s)\ \hat{f}(s)\,]$$

où

$$H_{\rho}(s) = \int_{y \gg 0} \rho(y)\ \exp(-\pi\,\mathrm{Tr}(sy))\ \det(y)^{-n-1}\, dy\ .$$

On a en effet

$$< f , E_{s;\omega} >_{\Gamma} = \int_{z \bmod \Gamma} \mathrm{Tr}(E_{s;\omega}(z)^{*}\ \rho(y)\ f(z))\ dz$$

et comme

$$E_{s;\omega}(z)^{*}\ \rho(y^{1/2}) = [\,\rho(y^{1/2})\ E_{s;\omega}(z)\,]^{*}$$

$$= \sum \mu(M)^{-1}\ \varphi(Mz)^{*}\ J'_{\rho}(M\ ,\ z)$$

en vertu de (2.7) il vient

$$\begin{aligned}< f , E_{s;\omega} >_{\Gamma} &= \int_{z \bmod \Gamma} \sum_{\Gamma_{\infty}\cdot M} \mathrm{Tr}(\mu(M)^{-1}\ \varphi(Mz)^{*}\ J'_{\rho}(M,,\ z)\ \rho(y^{1/2})\ f(z))\ dz \\ &= \int_{z \bmod \Gamma} \sum_{\Gamma_{\infty}\cdot M} \mathrm{Tr}(\varphi(Mz)^{*}\ I_{\rho}(Mz)\ J_{\rho}(M\ ,\ z)\ f(z)\ \mu(M)^{-1})\ dz \\ &= \int_{z \bmod \Gamma} \sum_{\Gamma_{\infty}\cdot M} \mathrm{Tr}(\varphi(Mz)^{*}\ I_{\rho}(Mz)\ f(Mz))\ dz\end{aligned}$$

puisque f est une forme d'espèce $(\mu\ ;\ \rho)$; finalement

$$< f , E_{s;\omega} >_{\Gamma} = \int_{z \bmod \Gamma_{\infty}} \mathrm{Tr}(\varphi(z)^{*}\ I_{\rho}(z)\ f(z))\ dz$$

d'où

(2.9) $$< f , E_{s;\omega} >_{\Gamma} = \int_{z \bmod \Gamma_{\infty}} \mathrm{Tr}(\omega^{*}\ \rho(y)\ f(z))\ \exp(-2\pi i\ \mathrm{Tr}(s\bar{z}))\ \det(y)^{-n-1}\ dx\, dy\ .$$

Or puisque ω vérifie la relation

$$\omega.\mu(n) = \exp(-2\pi i\ \mathrm{Tr}(sn))\,\omega$$

il est clair qu'en posant

$$\mu(n) = \sum_{s \bmod 1} \hat{\mu}(s)\ \exp(-2\pi i\ \mathrm{Tr}(sn))$$

("décomposition spectrale" de la représentation $n \longrightarrow \mu(n)$) on a

$$\omega.\hat{\mu}(s) = \omega$$

et donc

$$\hat{\mu}(s)\omega^* = \omega^* \quad ,$$

puisque $\hat{\mu}(s)$ est un opérateur de projection orthogonale, donc hermitien. Il vient alors dans (2.9)

$$\begin{aligned} \langle f , E_{s;\omega} \rangle_\Gamma &= \int_{z \bmod \Gamma_\infty} \mathrm{Tr}(\omega^* \rho(y) f(z) \hat{\mu}(s)) \exp(-2\pi i \, \mathrm{Tr}(s\bar{z})) \, dz \\ &= \int_{y \gg 0} \exp(-4\pi \, \mathrm{Tr}(sy)) \det(y)^{-n-1} \, dy \\ &\quad \int_{x \bmod 1} \mathrm{Tr}(\omega^* \rho(y) f(z) \hat{\mu}(s)) \exp(-2\pi i \, \mathrm{Tr}(sz)) \, dx \\ &= \int_{y \gg 0} \mathrm{Tr}(\omega^* \rho(y) \hat{f}(s)) \exp(-4\pi \mathrm{Tr}(sy)) \det(y)^{-n-1} \, dy \\ &= \mathrm{Tr}(\omega^* H_\rho(4s) \hat{f}(s)) \end{aligned}$$

en vertu de l'exposé 6 , n° 3 , formule (4) . Ceci achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE. - <u>Supposons</u> $\alpha_n > 2n$; <u>alors toute Spitzenform d'espèce</u> $(\mu ; \rho)$ <u>est une combinaison linéaire des séries d'Eisenstein</u> $E_{s;\omega}$ $(s \gg 0 \ , \ \omega \circ \hat{\mu}(s) = \omega)$.

Il suffit de montrer qu'une Spitzenform f orthogonale aux séries d'Eisenstein est nulle ; or on a alors

$$\mathrm{Tr}(H_\rho(4s) \hat{f}(s)\omega^*) = 0$$

pour toute matrice $s \gg 0$ et toute application ω de F_μ dans F_ρ vérifiant $\omega \circ \hat{\mu}(s) = \omega$; comme parmi ces applications figure $\hat{f}(s)$ (Exposé 7 , formule (2.4)) il vient

$$\mathrm{Tr}(\hat{f}(s)^* H_\rho(4s) \hat{f}(s)) = 0 \quad ;$$

comme $H_\rho(4s)$ est hermitien $\gg 0$ (Exposé 6 , théorème 3) il s'ensuit que $\hat{f}(s) = 0$, d'où le corollaire.

REMARQUE 1. - Bien que la relation

$$\langle f , E_{s;\omega} \rangle_\Gamma = \mathrm{Tr}(H_\rho(4s) \hat{f}(s)\omega^*) \quad ,$$

établie lorsque f est une Spitzenform, ait encore un sens pour <u>toute</u> forme modulaire f (ceci parce que $E_{s;\omega}$ est une Spitzenform, de sorte que le produit scalaire figurant au premier membre converge toujours), il ne faut pas espérer la démontrer pour f quelconque ; s'il en était ainsi en effet on aurait $\hat{f}(s) = 0$ pour $s \gg 0$ dès que f est orthogonale aux Spitzenformen, ce qui est déjà faux dans le cas classique d'une variable $(n = 1)$; en effet, dans ce cas, la relation $\hat{f}(s) = 0$ pour $s \gg 0$ signifie que la série de Fourier de f se réduit à son terme constant, i.e. que f est constante, et donc identiquement nulle puisque $\alpha_n > 2n = 2$; comme il est bien connu que la série d'Eisenstein

$$\sum (cz + d)^{-k} \qquad (k > 2) \tag{2.10}$$

est une forme modulaire de poids k qui n'est pas identiquement nulle et qui n'est pas une Spitzenform (on suppose pour simplifier le multiplicateur μ trivial), il existe nécessairement une forme modulaire de poids k, non nulle, orthogonale aux Spitzenformen (pour la simple raison que les formes linéaires sur un espace de dimension N constituent un espace de dimension N ...) ; d'où le contre-exemple cherché.

Noter que pour $n = 1$ et μ trivial, le quotient

$$\mathcal{H}_{\Gamma}(\mu ; \rho)/\mathcal{S}_{\Gamma}(\mu ; \rho)$$

est de dimension 1 -- appliquer l'opérateur Φ, i.e. associer à chaque $f \in \mathcal{H}_{\Gamma}(\mu ; \rho)$ le terme constant de sa série de Fourier. On en déduit que toute forme modulaire de poids k est somme d'une Spitzenform et d'une fonction proportionnelle à la série d'Eisenstein (2.10).

REMARQUE 2. - Le théorème 2 permet d'exprimer la fonction-noyau de l'espace des Spitzenformen (Exposé 8, n° 2) en fonction des séries d'Eisenstein. Nous allons le montrer en supposant $\mu = 1$ pour simplifier les calculs. Dans ce cas il est clair que dans (2.8) s est une matrice $\gg 0$ demi-entière, et ω un vecteur arbitraire dans F_ρ ; de plus

$$E_{s;\omega}(z) = E_s(z)\,\omega$$

où

$$E_s(z) = \sum \rho(cz + d)^{-1} \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(s.Mz))$$

est une série d'opérateurs dans F_ρ. Enfin, (2.3) s'écrit

$$\int_{z \bmod \Gamma} \langle \rho(y)\, f(z), E_s(z)\omega \rangle \, dz = \langle \hat{f}(s) , H_\rho(4s)\omega \rangle$$

et comme ω est arbitraire cela veut dire encore que l'on a

$$\int_{z \bmod \Gamma} E_s(z)^* \rho(y)\, f(z)\, dz = H_\rho(4s)\, \hat{f}(s) .$$

Or on a aussi l'identité

$$f(z_1) = \sum_{s \gg 0} \hat{f}(s) \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(sz_1)) \quad ;$$

il vient donc

$$H_\rho(4s)\ f(z_1) = \sum_{s \gg 0} \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(sz_1)) \int_{z \bmod \Gamma} E_s(z)^* \rho(y)\ f(z)\ dz \quad ;$$

en désignant par $K^\Gamma_\rho(z_1\ ,\ z_2)$ la fonction-noyau de $\mathcal{S}_\Gamma(\rho) = \mathcal{H}_\Gamma(\rho)$ (lemme de Satake), qui est caractérisée par la relation

$$f(z_1) = \int_{z \bmod \Gamma} K^\Gamma_\rho(z_1\ ,\ z)\ \rho(y)\ f(z)\ dz$$

et le fait d'être une Spitzenform par rapport à z_1 , il est clair qu'on trouve

$$(2.10) \qquad \boxed{K^\Gamma_\rho(z_1\ ,\ z) = \sum_{s \gg 0} H_\rho(4s)^{-1}\ E_s(z)^* \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(sz_1))}$$

On remarquera que cette formule, si elle met en évidence le fait que $K^\Gamma_\rho(z_1\ ,\ z)^*$ est une forme modulaire par rapport à z , n'explique pas du tout pourquoi $K^\Gamma_\rho(z_1\ ,\ z)$ est aussi une forme modulaire par rapport à z_1 ... Ce mystère sera éclairci dans l'Exposé suivant, grâce à une certaine formule sommatoire.

3. Indications sur les coefficients de Fourier des séries d'Eisenstein $(s \gg 0)$.

Il est bien connu (HECKE) que les coefficients de Fourier des séries (2.10) sont donnés par des formules ayant une signification arithmétique simple (le coefficient de $\exp(2\pi inz)$ dans le développement de (2.10) est égal à

$$\sum_{d|n} d^{k-1}$$

à un facteur trivial près). Pour $n = 1$, on peut se proposer plus généralement de développer en série de Fourier les séries

$$(3.1) \qquad E_s(z) = \sum_{\Gamma_\infty . M} (cz + d)^{-k} \exp(2\pi i s.Mz) \quad ,$$

i.e. les séries d'Eisenstein étudiées au numéro précédent ; ce problème a été résolu depuis longtemps par PETERSSON, et ne présente pas de difficulté particulière ; il n'en est pas de même pour n quelconque comme nous allons le voir, et il serait extrêmement intéressant d'obtenir des résultats aussi explicites que possible dans le cas général, non seulement parce que des résultats explicites pourraient éventuellement être de quelque utilité en théorie analytique des nombres, mais aussi et surtout parce que, comme on le verra plus loin, on ne saurait résoudre le cas général sans étudier d'abord certaines fonctions spéciales qui, pour $n = 1$, se réduisent aux fonctions de Bessel J_ν , et n'ont encore fait l'objet d'aucune investigation pour n quelconque.

Considérons donc, pour n quelconque, la série

$$E_{s;\omega}(z) = \sum_{\Gamma_\infty . M} J_\rho(M, z)^{-1} \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(s.Mz))\, \omega . \mu(M) \quad ;$$

posant

$$E_{s;\omega}(z) = \sum_{t \gg 0} A(t) \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(tz))$$

il vient

$$A(t) = \int_{x \bmod \Gamma_\infty} E_{s;\omega}(z)\, \hat{\mu}(t) \exp(-2\pi i \operatorname{Tr}(tz))\, dx$$

$$= \int_{x \bmod \Gamma_\infty} \sum_{\Gamma_\infty . M} J_\rho(M, z)^{-1} \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(s.Mz) - 2\pi i \operatorname{Tr}(tz))\, \omega . \mu(M) \hat{\mu}(t)\, dx$$

pour simplifier cette sommation, on décompose la sommation étendue aux classes $\Gamma_\infty . M$ en sommations partielles, en mettant en évidence les doubles classes $\Gamma_\infty . M . \Gamma_\infty$; mais il faut prendre quelques précautions dues au fait que Γ_∞ possède dans Γ un normalisateur non trivial ! De façon précise, bloquons en une même somme les termes de la série précédente qui sont de la forme $\Gamma_\infty . MM_\infty$ (avec M donné, $M_\infty \in \Gamma_\infty$ variable) ; comme la relation

$$\Gamma_\infty . MM_\infty = \Gamma_\infty . M$$

signifie que $M \in \Gamma_\infty . MM_\infty$, i.e. que

$$M_\infty \in M^{-1} . \Gamma_\infty . M \cap \Gamma_\infty = \Gamma_\infty(M) \tag{3.2}$$

on voit que

$$\sum_{\Gamma_\infty . M} = \sum_{\Gamma_\infty . M . \Gamma_\infty} \ \sum_{\Gamma_\infty(M) . M_\infty}$$

et par suite il vient

$$(3.3)\ A(t)=\overline{\sum_{\Gamma_\infty . M . \Gamma_\infty}}\int_{x \bmod \Gamma_\infty}\overline{\sum_{\Gamma'_\infty(M).M_\infty}} J_\rho(MM_\infty, z)^{-1}\exp(2\pi i\,\mathrm{Tr}(s.MM_\infty z - tz))\,\omega.\mu(MM_\infty)\hat{\mu}(t)\,dx .$$

Or on a trivialement

$$J_\rho(MM_\infty\ ,\ z) = J_\rho(M\ ,\ M_\infty z)\quad ;$$

d'autre part on a

$$\mu(M_\infty)\ \hat{\mu}(t) = \exp(-\,2\pi i\ \mathrm{Tr}(tn)\ \hat{\mu}(t) \quad \text{pour} \quad M_\infty = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

de sorte que

$$\exp(-\,2\pi i\ \mathrm{Tr}(tz))\omega.\mu(MM_\infty)\ \hat{\mu}(t) = \exp(-\,2\pi i\ \mathrm{Tr}(t.M_\infty\ z))\omega.\mu(M)\ \hat{\mu}(t) \quad ;$$

le terme général de la série (3.3) s'écrit donc

$$\int_{x \bmod \Gamma_\infty}\overline{\sum_{\Gamma'_\infty(M).M_\infty}} J_\rho(M\ ,\ M_\infty\ z)^{-1}\ \exp(2\pi i\ \mathrm{Tr}(s.MM_\infty\ z\ -\ t.M_\infty z))\omega.\mu(M)\ \hat{\mu}(t)\ dx$$
$$= \int_{x \bmod \Gamma_\infty(M)} J_\rho(M\ ,\ z)^{-1}\ \exp(2\pi i\ \mathrm{Tr}(s.Mz\ -\ tz))\omega.\mu(M)\ \hat{\mu}(t)\ dx$$

et on a en définitive la formule

$$(3.4)\quad \boxed{A(t) = \overline{\sum_{\Gamma_\infty . M . \Gamma_\infty}}\int_{x \bmod \Gamma_\infty(M)} J_\rho(M,z)^{-1}\ \exp(2\pi i\ \mathrm{Tr}(s.Mz-tz))\omega.\mu(M)\ \hat{\mu}(t)\ dx} \ .$$

Pour aller plus loin il faudrait calculer les intégrales figurant dans ces formules, problème non trivial comme on va le voir, et qu'on ne sait résoudre complètement que pour $n = 1$. En fait nous allons d'abord raisonner dans le cas général, mais en faisant sur la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

l'hypothèse que c est <u>inversible</u> ; si $n = 1$ cette hypothèse est toujours vérifiée, <u>sauf</u> pour les classes $\Gamma_\infty.M.\Gamma_\infty$ correspondant aux matrices $M = +\,1$ et $M = -\,1$ et la contribution de ces classes dans (3.4) se calcule trivialement.

Comme c est supposé inversible, il est immédiat de vérifier que $\Gamma_\infty(M)$ se réduit à l'élément neutre de Γ_∞ ; tout revient donc à calculer l'intégrale

(3.5) $$I = \int J_\rho(M\,,\,z)^{-1} \exp(2\pi i\ \mathrm{Tr}(s.Mz - tz))\, dx \qquad (z = x + iy)$$

étendue à <u>toutes</u> les matrices $x = x'$ réelles. Dans ce qui suit on ne supposera pas M entière, et on supposera seulement s et t définies positives (non nécessairement rationnelles).

Tout d'abord l'hypothèse c inversible permet d'écrire

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\check{c} \\ c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_1\, M_0\, M_2$$

avec x_1 et x_2 symétriques réelles : il suffit de résoudre

(3.6) $$a = x_1\, c \quad , \quad d = c\, x_2 \quad .$$

(et les solutions x_1 , x_2 sont symétriques en vertu des identités

$$a'c = c'a \quad , \quad cd' = dc'$$

vérifiées par toute matrice symplectique). On a

$$J_\rho(M\,,\,z) = J_\rho(M_1\, M_0\, M_2\,,\,z) = J_\rho(M_0\,,\,M_2\, z)$$

car $J_\rho(M\,,\,z) = 1$ si M est une translation. Donc

$$I = \int J_\rho(M_0\,,\,M_2\, z)^{-1} \exp(2\pi i\ \mathrm{Tr}(s.M_1\, M_0\, M_2\, z - t.z))\, dx$$

$$= \int J_\rho(M_0\,,\,z)^{-1} \exp(2\pi i\ \mathrm{Tr}(s.M_1\, M_0\, z - t.M_2^{-1}\, z))\, dx \quad ;$$

comme on a évidemment

$$\exp(2\pi i\ \mathrm{Tr}(s.M_1\, z)) = \exp(2\pi i\ \mathrm{Tr}(sx_1)) \exp(2\pi i\ \mathrm{Tr}(sz))$$

il vient

$$I = \exp(2\pi i\ \mathrm{Tr}(sx_1 + tx_2)) \int J_\rho(M_0\,,\,z)^{-1} \exp(2\pi i\ \mathrm{Tr}(s.M_0\, z - tz))\, dx$$

d'où

$$\exp(-2\pi i\ \mathrm{Tr}(sx_1 + tx_2)) I =$$

$$= \int \rho(cz)^{-1} \exp(2\pi i\ \mathrm{Tr}(-s\check{c}z^{-1}\, c^{-1} - tz))\, dx$$

i.e.

$$\exp(-2\pi i\ \mathrm{Tr}(sx_1 + tx_2))\, I\, \rho(c) =$$

$$= \int \exp(-2\pi i\ \mathrm{Tr}(s\check{c}z^{-1}\, c^{-1} + tz))\, \rho(z)^{-1}\, dx \quad .$$

Effectuons maintenant dans cette intégrale (qui ne dépend pas de $\mathrm{Im}(z) = y$) le changement de variable

$$z = c^{-1} g^{-1} \zeta g'^{-1} c'^{-1}$$

avec une constante $g \in GL_+(n, \underline{R})$ que nous choisirons plus loin ; il vient immédiatement

$$\exp(-2\pi i \operatorname{Tr}(sx_1 + tx_2))\, I.\rho(c) =$$

$$= |\det(cg)|^{-n-1} \int \exp(-2\pi i \operatorname{Tr}(gsg'\zeta^{-1} + g'^{-1}c'^{-1}tc^{-1}g^{-1}\zeta)).\rho(c'g'\zeta^{-1}gc)\,d\zeta \;;$$

comme s et t sont $\gg 0$ et c inversible, on peut choisir g de telle sorte que l'on ait

$$gsg' = g'^{-1} c'^{-1} tc^{-1} g^{-1}$$

i.e.

$$g'gsg'g = c'^{-1} tc^{-1} \;; \tag{3.7}$$

d'ailleurs (3.7) s'écrit

$$(s^{1/2} g' g)^* (s^{1/2} g' g) = (t^{1/2} c^{-1})^* (t^{1/2} c^{-1})$$

et signifie donc que

$$s^{1/2} g' g = kt^{1/2} c^{-1} \qquad \text{avec} \quad k \in O_+(n) . \tag{3.8}$$

Cela fait, il vient

$$\begin{aligned} &\exp(-2\pi i \operatorname{Tr}(sx_1 + tx_2))I.\rho(c)|\det(cg)|^{n+1} = \\ &= \int \exp(-2\pi i \operatorname{Tr}(gsg'(\zeta + \zeta^{-1})))\, \rho(c'g'\zeta^{-1} gc)\, d\zeta \end{aligned} , \tag{3.9}$$

en sorte que I <u>s'exprime à l'aide de la fonction</u>

$$\boxed{J_\rho(s) = \int \exp(-2\pi i \operatorname{Tr}(s(z + z^{-1})))\, \rho(z)^{-1}\, dx} \; . \tag{3.10}$$

<u>Supposons maintenant</u> $n = 1$, $\rho(z) = z^k$ (k entier > 2) ; la fonction précédente s'écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi i s(z + z^{-1}))\, z^{-k}\, dx = \int_{iy-\infty}^{iy+\infty} \exp(-2\pi i s(z + z^{-1}))\, z^{-k}\, dz \;;$$

en observant que, vu $s > 0$, la fonction $\exp(-2\pi i s(z + z^{-1}))$ est bornée dans tout demi-plan $-\infty < y \leq y_0$ on transforme immédiatement l'intégrale précédente en l'intégrale analogue étendue au cercle $|z| = 1$, prise dans le sens négatif, de sorte qu'il vient

$$- i \int_0^{2\pi} \exp(- 4\pi is.\cos \theta) \exp((1 - k)i\theta)\, d\theta$$

$$= - i \int_0^{2\pi} \exp(- 4\pi is.\cos \theta) \cos((k - 1)\theta)\, d\theta$$

$$= - 2\pi i^k . J_{k-1}(- 4\pi s)$$

en vertu de la formule classique

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi i^n} \int_0^{\pi} \exp(iz.\cos \theta) \cos n\theta . d\theta \quad ,$$

valable pour n entier $\geqslant 0$, et z complexe quelconque. Ceci fait nous pouvons poursuivre le calcul jusqu'au bout dans le cas $n = 1$; la formule (3.9) s'écrit en effet alors

$$\exp(- 2\pi i(sx_1 + tx_2))\ Ic^k\ |cg|^2 = - 2\pi i^k\ |cg|^{2k}\ J_{k-1}(- 4\pi g^2 s)$$

et comme (3.7) donne (pour $n = 1$)

$$g^2 = |c|^{-1} \sqrt{t/s}$$

il vient, après des calculs triviaux,

$$I = - 2\pi i^k . |c|^{-1} (\tfrac{t}{s})^{\frac{k-1}{2}} . \exp(2\pi i\, \frac{as + dt}{c})\, J_{k-1}\ (- 4\pi \sqrt{\frac{st}{c^2}})$$

en tenant compte des relations (3.6). En portant dans (3.4) on obtiendra le résultat final pour les coefficients de Fourier des séries d'Eisenstein ; si l'on note que les classes $\Gamma_\infty . M . \Gamma_\infty$ pour lesquelles c a une valeur donnée s'obtiennent en faisant varier les entiers a et d modulo c , on trouve

$$(3.11)\quad A(t) = \delta(s,t)\omega - 2\pi i^k (\tfrac{t}{s})^{\frac{k-1}{2}} . \sum_{c \neq 0} |c|^{-1} J_{k-1}(-4\pi\sqrt{\frac{st}{c^2}}) \sum_{\substack{a,d \bmod c \\ ad \equiv 1 \bmod c}} e^{2\pi i\frac{as+dt}{c}} . \omega\mu(M)^{-1}\bar{\mu}(t)$$

avec

$$\delta(s\ ,\ t) = \begin{cases} 1 & \text{si}\quad s = t \\ 0 & \text{si}\quad s \neq t \end{cases} .$$

Le résultat précédent est dû à PETERSSON.

Pour μ trivial, auquel cas s et t sont entiers, on voit apparaître dans cette expression les sommes de Kloostermann

$$\sum_{\substack{a,d \bmod c \\ ad\equiv 1 (\mathrm{mod}\ c)}} \exp(2\pi i \frac{as+dt}{c}) \quad ,$$

qui jouent un rôle important dans certaines questions de théorie analytique des nombres.

Notons que, malgré la complexité apparente de la formule donnant les coefficients de Fourier $A(t)$, ceux-ci possèdent des propriétés remarquables du point de vue arithmétiques. En effet écrivons (on se borne au cas où μ est trivial)

$$E_s(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A(n) \exp(2\pi i n z)$$

et

(3.12) $$D_s(\alpha) = \int_0^{+\infty} E_s(iy)\, y^{\alpha-1}\, dy \quad ,$$

où α est un paramètre complexe ; comme la fonction $y^{k/2} E_s(iy)$ est bornée, car E_s est une Spitzenform, l'intégrale converge au moins pour

$$\mathcal{R}(\alpha) > k/2 \quad ;$$

comme on sait d'avance que

$$A(n) = O(n^{k/2})$$

(Exposé 7, corollaire 3 du théorème 1) on peut intégrer terme à terme et il vient

$$D_s(\alpha) = \sum_1^{\infty} A(n) \int_0^{+\infty} \exp(-2\pi n y) y^{\alpha-1}\, dy = (2\pi)^{-\alpha}\,\Gamma(\alpha) \sum \frac{A(n)}{n^{\alpha}} \quad ,$$

de sorte qu'à un facteur "trivial" près $D_s(\alpha)$ est la série de Dirichlet ayant pour coefficients les $A(n)$. Mais en utilisant le fait que f est une forme modulaire, i.e. l'équation

$$f(iy^{-1}) = (iy)^k f(iy) \quad ,$$

qui permet de ramener l'intégrale (3.12) à une intégrale étendue à l'intervalle $[1 , +\infty[$, on constate aussitôt que $D_s(\alpha)$ est en fait une fonction entière de α , satisfaisant l'équation fonctionnelle

$$D_s(k-\alpha) = i^k \, D_s(\alpha) \; ,$$

ce qui implique certainement, comme on l'a dit, des propriétés arithmétiques pour les coefficients $A(n)$ ... On montrera (peut-être) dans un exposé ultérieur comment on peut associer des séries de Dirichlet possédant une équation fonctionnelle à toute forme modulaire (pour le groupe de Siegel, et pas seulement pour le groupe $Sp(1\,,\,\underline{Z})$ bien entendu).

En ce qui concerne le calcul des coefficients de Fourier dans le cas général, on voit que la première chose à faire est d'étudier la fonction (3.10) ; il faudrait même, pour obtenir des résultats généraux, prendre dans la formule (3.10) une représentation multiforme de $GL(n\,,\,\underline{C})$, afin d'introduire dans la situation un paramètre complexe arbitraire α_n ; on peut même soupçonner que les représentations irréductibles de dimension infinie de $GL_+(n\,,\,\underline{R})$, ou de son revêtement universel, devraient intervenir dans la question. Pour ρ de dimension 1 , les fonctions (3.10) ont été étudiées par C.S. HERZ, qui a pu généraliser quelques-unes des propriétés classiques des fonctions de Bessel usuelles ; mais le cas étudié par Herz est évidemment beaucoup trop étroit pour qu'on puisse en déduire une idée des phénomènes généraux.

Pour obtenir des résultats complets, il faudrait encore sans doute mettre en évidence dans la formule (3.4) obtenue plus haut non seulement le sous-groupe Γ_∞ , mais aussi son normalisateur dans $Sp(n\,,\,\underline{Z})$, et en particulier le sous-groupe des matrices

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \check{u} \end{pmatrix} , \quad u \text{ entière unimodulaire ;} \tag{3.13}$$

c'est là que réside en effet la principale différence entre le cas $n = 1$ et le cas général. En particulier considérons dans $A(t)$ les classes $\Gamma_\infty.M.\Gamma_\infty$ pour lesquelles le coefficient c de M est nul ; il est visible qu'elles correspondent biunivoquement aux matrices (3.13), et que pour ces doubles classes on a $\Gamma_\infty(M) = \Gamma_\infty$; par suite on trouvera déjà dans $A(t)$ la série

$$\sum_u \int_{x \bmod 1} \rho(u') \exp(2\pi i\, Tr(u'suz - tz))\omega.\mu(M)\, \hat{\mu}(t)\, dx \; ; \tag{3.14}$$

si l'on suppose pour simplifier que μ est trivial, cette somme s'écrit

$$\sum_u \int_{x \bmod 1} \rho(u) \exp(2\pi i\, Tr((usu' - t)z))\, dx$$

et comme s et t sont entières elle se réduit à

(3.15) $$\sum_{usu'=t} \rho(u) \quad ;$$

bien que cette somme soit finie (puisque $s \gg 0$), il est peu probable qu'on puisse la calculer trivialement; pour ρ de dimension 1 on trouve au lieu de (3.15) le nombre de solutions de l'équation $usu' = t$.

4. Séries d'Eisenstein attachées à une matrice s non définie.

Nous allons maintenant étendre le théorème 1 au cas où la matrice $s \geqslant 0$ n'est pas définie ; on peut donc, par une substitution entière unimodulaire, supposer

(4.1) $$s = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $s_1 \gg 0$ de degré $r < n$. Comme on l'a vu au n° 1 , les séries d'Eisenstein correspondantes s'obtiennent comme suit (on suppose donnés un multiplicateur μ de $\Gamma = Sp(n , \underline{Z})$ et une représentation ρ de $GL(n , \underline{C})$) :

on considère dans F_ρ le sous-espace $F_\rho^{(r)}$ formé des vecteurs $\underline{a}$ qui vérifient

(4.2) $$\rho(g)\underline{a} = \det(g)^{\alpha_n}.\underline{a}$$

pour

(4.3) $$g = \begin{pmatrix} 1_r & g_{12} \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix} \in GL(n , \underline{C}) \quad ;$$

(on rappelle que si $r < n - 1$, on ne peut avoir $F_\rho^{(r)} \neq 0$ que si $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_{n-1} = 0$; cf. Exposé 7 , n° 4 et Exposé 8 , n° 1) ; cela dit, on considère dans $Sp(n , \underline{Z}) = \Gamma$ le sous-groupe

(4.4) $$\Gamma_\infty(s) \text{ : matrices } M = \begin{pmatrix} u & x \\ 0 & \check{u} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \begin{cases} x = x' & \text{entière} \\ u \in U_\infty(s) & , \end{cases}$$

où $U_\infty(s)$ est le sous-groupe de $SL(n , \underline{Z})$ formé des matrices

(4.5) $$u = \begin{pmatrix} 1_r & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \begin{cases} u_{12} & \text{entière} \\ u_{22} & \text{entière unimodulaire} \end{cases}$$

(on rappelle que $U_\infty(s)$ est d'indice fini dans le groupe $U(s)$ des unités de s) ; on sait que l'on a

(4.6) $$\exp(2\pi i \operatorname{Tr}(s.Mz)) = \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(sz)) \quad \text{pour } M \in \Gamma_\infty(s) \quad ;$$

enfin on choisit une application linéaire

$$\omega : F_\mu \longrightarrow F_\rho$$

vérifiant les conditions suivantes :

(4.7) ω applique F_μ dans $F_\rho^{(r)}$; $\omega\mu(u') = \omega$ si $u \in U_\infty(s)$;

(4.8) $\omega.\mu(M) = \exp(-2\pi i \, \mathrm{Tr}(sn))\omega$ pour $M = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty$.

(cf. n° 1 , formules (1.9) et (1.14)) ; cela fait, l'expression

$$\exp(2\pi i \, \mathrm{Tr}(s.Mz)) \, J_\rho(M , z)^{-1} \omega\mu(M)$$

ne change pas lorsqu'on multiplie M par un facteur $M_\infty \in \Gamma_\infty(s)$, et l'on pose

$$\text{(4.9)} \qquad \boxed{E_{s;\omega}(z) = \overline{\sum_{\Gamma_\infty(s).M}} \exp(2\pi i \, \mathrm{Tr}(s.Mz)) \, J_\rho(M , z)^{-1} \omega\mu(M)} \; .$$

THÉORÈME 3. - La série (4.9) converge normalement sur tout compact pour

$$\alpha_n > n + r + 1 \; ,$$

et représente une forme modulaire d'espèce $(\mu ; \rho)$.

La démonstration de ce théorème est assez différente de celle du théorème 3 , et comporte quelques calculs ; "on" s'excuse de les exposer en détail.

Introduisons comme au n° 2 les fonctions

$$I_\rho(z) = \rho(y^{1/2}) \quad , \quad J'_\rho(M , z) = I_\rho(Mz) \, J_\rho(M , z) \, I_\rho(z)^{-1} \; ;$$

on trouve, comme au n° 2 ,

$$\rho(y^{1/2}) \, E_{s;\omega}(z) = \overline{\sum_{\Gamma_\infty(s).M}} \exp(2\pi i \, \mathrm{Tr}(s.Mz)) \, J'_\rho(M , z)^{-1} \, I_\rho(Mz)\omega$$

de sorte qu'il vient

$$\text{(4.10)} \qquad \|\rho(y^{1/2}) \, E_{s;\omega}(z)\| \leqslant \overline{\sum_{\Gamma_\infty(s).M}} \|\varphi(Mz)\|$$

où

$$\varphi(z) = \exp(2\pi i \, \mathrm{Tr}(sz)) \, I_\rho(z)\omega \quad ; \tag{4.11}$$

Soit A une partie compacte du demi-plan de Siegel ; pour établir que la série converge normalement sur A il suffit, puisqu'il s'agit de fonctions holomorphes, d'établir que

$$\sum_{\Gamma_\infty(s).M} \int_A \|\varphi(Mz)\| \, dz \sim \int_{\Gamma_\infty(s)\setminus\Gamma(A)} \|\varphi(z)\| \, dz$$

est <u>fini</u> (2) .

Considérons l'ensemble $\Gamma(A)$, réunion des $M(A)$ pour $M \in \Gamma$. Comme A est <u>compact</u> il existe une constante finie c telle que

$$z \in \Gamma(A) \quad \text{implique} \quad \det(y) \leq c$$

(Exposé 3 , proposition 1 lorsque A se réduit à un seul point; le cas d'un compact quelconque se traite de même) ; considérant dans le demi-plan de Siegel S_n l'ensemble

$$S_n(c) \; : \; z \in S_n \quad \text{tels que} \quad \det(y) \leq c \quad , \tag{4.12}$$

lequel est évidemment stable par $\Gamma_\infty(s)$, il <u>suffit</u> donc d'établir que l'intégrale

$$I = \int_{\Gamma_\infty(s)\setminus S_n(c)} \|\varphi(z)\| \, dz = \iint_{\Gamma_\infty(s)\setminus S_n(c)} \|\varphi(x+iy)\| \det(y)^{-n-1} \, dx \, dy$$

est finie.

Le sous-groupe $\Gamma_\infty(s)$ est une extension du groupe Γ_∞ des translations entières par le sous-groupe des matrices

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \check{u} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad u \in U_\infty(s) \; . \tag{4.13}$$

On a d'autre part

$$S_n(c) = Y_n(c) \times X_n$$

---

(2) Le symbole $\sim$ signifie que les deux membres sont simultanément finis ou infinis (ce qui résulte du fait que les $M \in \Gamma$ tels que $M(A) \cap A$ ne soit pas vide sont en nombre <u>fini</u>).

où X_n est l'espace des matrices $x = x'$ réelles, et $Y_n(c)$ l'espace des $y = y' \gg 0$ de déterminant $\leqslant c$; comme Γ_∞ opère uniquement sur le facteur X_n, que les matrices (4.13) opèrent sur $Y_n(c)$ par $y \longrightarrow uyu'$, et que la fonction $\|\varphi(z)\|$ est invariante par $\Gamma_\infty(s)$, il est clair que

$$I = \int_{U_\infty(s)\setminus Y_n(c)} \det(y)^{-n-1}\, dy \int_{\Gamma_\infty \setminus X_n} \|\varphi(x + iy)\|\, dx \quad .$$

Or

$$\|\varphi(x + iy)\| = \exp(-2\pi \operatorname{Tr}(sy))\, \|\rho(y^{1/2})\omega\|$$

ne dépend pas de x ; donc

$$I = \int_{U_\infty(s)\setminus Y_n(c)} \|\rho(y^{1/2})\omega\| \exp(-2\pi \operatorname{Tr}(sy)) \det(y)^{-n-1}\, dy \quad .$$

Posant

$$y = g'g \quad , \quad g \in GL_+(n, \underline{R}) = G ,$$

il vient donc

$$I = \int_{\substack{G/U_\infty(s) \\ \det(g) \leqslant c}} \|\rho(g)\omega\| \exp(-2\pi \operatorname{Tr}(gsg')) \det(g)^{-n-1}\, dg \quad , \tag{4.14}$$

en changeant le nom de la constante c.

Considérons maintenant dans G, pour la décomposition en blocs $(r, n-r)$, les sous-groupes suivants :

$$T : \text{ matrices } t = \begin{pmatrix} h_1 & h_1 x \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x \text{ réelle} \\ h_1 \in GL_+(r, \underline{R}) \\ h_2 \in GL_+(n-r, \underline{R}) \end{cases}$$

$$X : \text{ matrices } x = \begin{pmatrix} 1_r & x \\ 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix}$$

$$H : \text{ matrices } h = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} h_1 \in GL_+(r, \underline{R}) = G_1 \\ h_2 \in GL_+(n-r, \underline{R}) = G_2 \end{cases} .$$

On a $U_\infty(s) \subset T$; d'autre part

$$G = O_+(n).T$$

et la fonction figurant dans (4.14) est invariante à gauche par $O_+(n)$; donc (Exposé 5, Appendice, formule (A 21))

$$I = \int_{\substack{T/U_\infty(s) \\ \det(t) \leqslant c}} \|\rho(t)\omega\| \exp(-2\pi \operatorname{Tr}(tst')) \det(t)^{-n-1} d_r t ,$$

où $d_r t$ est la mesure invariante <u>à droite</u> de T,

Tenant compte de la décomposition

$$T = H.X \quad , \quad H \cap X = e \quad ,$$

on trouve tout d'abord par des calculs faciles la formule d'intégration que voici :

$$(4.15) \qquad \int_T f(t)\, d_r t = \iint_{H \times X} f(hx) \det(h_1)^{n-r} \det(h_2)^{-r}\, dh\, dx$$

où dh et dx sont les mesures invariantes (et même bi-invariantes) de H et X (cf. Exposé 5, Appendice). D'autre part on sait que

$$U_\infty(s) : \text{ matrices } \begin{pmatrix} 1_r & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u_{12} & \text{entière} \\ u_{22} \in SL(n-r, \underline{Z}) \end{cases}$$

est extension du groupe des u_{12} entières par U_2 (que nous identifierons à un sous-groupe de H) ; il résulte de là et de (4.15) qu'on a la formule

$$(4.16) \qquad \int_{T/U_\infty(s)} f(t)\, d_r t = \iint_{\substack{H/U_{22} \\ X/U_{12}}} f(hx) \det(h_1)^{n-r} \det(h_2)^{-r}\, dh\, dx$$

où U_{12} est le groupe des $x \in X$ entières, et où U_{22} est le sous-groupe de H

$$U_{22} : \text{ matrices } \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad u_{22} \in SL(n-r, \underline{Z}) .$$

La formule (4.16) ne figure malheureusement pas dans l'Appendice à l'Exposé 5.

Il vient donc

$$I = \iint_{\substack{H/U_{22} \\ X/U_{12} \\ \det(h) \leqslant c}} \|\rho(hx)\omega\| \exp(-2\pi \operatorname{Tr}(hxsx'h')) \det(h_1)^{-r-1} \det(h_2)^{-n-r-1}\, dh\, dx .$$

Or, ω <u>applique</u> F_μ <u>dans le sous-espace</u> $F_\rho^{(r)}$ de F_ρ par hypothèse ; on a donc

$$\rho(x)\omega = \omega$$

et comme X/U_{12} est compact il reste

$$I = \int_{\substack{H/U_{22} \\ \det(h)\leqslant c}} \|\rho(h)\omega\| \exp(-2\pi \operatorname{Tr}(h_1 s_1 h_1')) \det(h_1)^{-r-1} \det(h_2)^{-r-n-1} dh$$

(tenir compte du fait que $\operatorname{Tr}(hxsx'h') = \operatorname{Tr}(h_1 s_1 h_1')$ est indépendant de x). Posons maintenant

$$\rho\begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & 1_{n-r}\end{pmatrix} = \rho_1(h_1) \quad ; \quad \rho\begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & h_2\end{pmatrix} = \rho_2(h_2) \quad ;$$

il vient donc, avec des notations évidentes,

$$I = \iint_{\substack{H_1\times(H_2/U_2) \\ \det(h_1)\det(h_2)\leqslant c}} \|\rho_1(h_1)\rho_2(h_2)\omega\| \exp(-2\pi\operatorname{Tr}(h_1 s_1 h_1'))\det(h_1)^{-r-1}\det(h_2)^{-n-r-1} dh_1 dh_2 \quad ;$$

mais comme ω <u>applique</u> F_μ <u>dans</u> $F_\rho^{(r)}$ on a

$$\rho_2(h_2)\omega = \det(h_2)^{\alpha_n}\omega \; ;$$

donc

$$(4.16)\quad I = \int_{H_1} \|\rho_1(h_1)\omega\| \exp(-2\pi\operatorname{Tr}(h_1 s_1 h_1'))\det(h_1)^{-r-1} dh_1 \times \int_{\substack{H_2/U_2 \\ \det(h_2)\leqslant c/\det(h_1)}} \det(h_2)^{\alpha_n - n-r-1} dh_2$$

L'intégrale suivant H_2 se calcule en posant

$$h_2 = \lambda . g_2 \qquad (\lambda > 0 \; , \quad g_2 \in SL(n-r, \underline{R}) \quad ,$$

ce qui donne

$$\int_{SL(n-r,\underline{R})/SL(n-r,\underline{Z})} dg_2 \int_0^{c.\det(h_1)^{-1/(n-r)}} \lambda^{(n-r)(\alpha_n - n-r-1)-1} d\lambda \quad ,$$

il ne peut y avoir convergence que si

$$\alpha_n > n + r + 1$$

et puisque $SL(n - r , \underline{R})/SL(n - r , \underline{Z})$ est de volume fini l'intégrale précédente est proportionnelle à

$$\det(h_1)^{n+r+1-\alpha_n} \quad ;$$

en conséquence il vient

$$I = \int_{H_1} \| \rho_1(h_1)\omega \| . \exp(- 2\pi \operatorname{Tr}(h_1 \, s_1 \, h_1')) \det(h_1)^{n-\alpha_n} \, dh_1 \quad .$$

Or comme ω applique F_μ dans $F_\rho^{(r)}$, et comme on sait (Exposé 7 , n° 4 et Exposé 8 , n° 1) que ρ_1 induit une représentation irréductible de

$$H_1 = GL(r , \underline{R})$$

dans $F_\rho^{(r)}$ l'intégrale précédente est une intégrale de Siegel du type étudié dans l'exposé 5 ; pour décider de sa convergence il est nécessaire et suffisant de connaître le plus haut poids de la représentation de H_1 dans $F_\rho^{(r)}$; or celui-ci, on le sait (Exposé 7 , n° 4) est la restriction à H_1 du plus haut poids de la représentation ρ de $GL_+(n , \underline{R})$ dans F_ρ , lequel est égal à

$$\Delta_1(g)^{\alpha_1} \ldots \Delta_r(g)^{\alpha_r} \, \Delta_n(g)^{\alpha_n} \quad ;$$

donc, dans le plus haut poids de ρ_1 , le déterminant de h_1 figure avec l'exposant $\alpha_r + \alpha_n$; par suite I converge si et seulement si l'on a

$$\alpha_r + \alpha_n + n - \alpha_n > r - 1$$

(Exposé 5 , théorème 2) ; comme α_r est un entier $\geqslant 0$, cette condition est absorbée par la condition $\alpha_n > n + r + 1$ déjà trouvée, et ceci termine la démonstration du théorème 3 .

5. Exemples.

On se borne jusqu'à nouvel ordre au cas d'un multiplicateur μ trivial, de sorte que la constante ω figurant dans les séries d'Eisenstein s'identifie à un élément de l'espace F_ρ .

(a). - Prenons tout d'abord ρ de dimension 1 , i.e.

$$\rho(g) = \det(g)^k \quad ;$$

il est évidemment inutile alors de mettre en évidence le vecteur ω et les séries d'Eisenstein se réduisent à

(5.1) $$E_s(z) = \sum_{\Gamma_\infty(s).M} \exp(2\pi i \, \mathrm{Tr}(s.Mz)) \det(cz+d)^{-k} .$$

Historiquement, c'est le cas où $s = 0$ qui a d'abord été étudié ; le sous-groupe $\Gamma_\infty(s)$ est alors formé de toutes les matrices

$$\begin{pmatrix} u & un \\ 0 & \check{u} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n = n' & \text{entière} \\ u & \text{entière unimodulaire} \end{cases}$$

et on trouve les séries

(5.2) $$\sum \det(cz+d)^{-k} ,$$

la sommation étant étendue à tous les couples (c , d) , distincts modulo $SL(n , \underline{Z})$ - pouvant figurer dans une matrice $M \in Sp(n , \underline{Z})$, il est facile de les caractériser directement ... D'après le théorème 3 la série (3.2) converge pour

$$k > n+1 ,$$

résultat dû à H. BRAUN. Notons qu'à côté de cette série de fonctions holomorphes, dans laquelle k est un paramètre entier, on peut considérer la série de fonctions non holomorphes

(5.3) $$\sum |\det(cz+d)|^{-s}$$

dans laquelle s est un paramètre complexe ; celle-ci converge bien entendu pour

$$\mathcal{R}(s) > n+1 ,$$

résultat qui englobe le précédent. Les séries (5.3) sont un cas très particulier d'une espèce plus générale de séries d'Eisenstein qu'on est amené à considérer pour construire des "fonctions sphériques" non holomorphes invariantes par $Sp(n , \underline{Z})$.

Nous montrerons dans le prochain exposé comment on calcule la série de Fourier de (5.2) - le problème dans ce cas peut en effet se résoudre complètement ; il en résultera que les séries (5.2) ne sont pas identiquement nulles, et en fait, admettent un "terme constant" non nul (ce qui est du reste évident directement).

Les séries (5.1) ont été étudiées par MAAS ; elles convergent pour

$$\begin{array}{ll} k > 2n & \text{si } s \gg 0 \\ k > n+r+1 & \text{si } \mathrm{rg}(s) = r < n . \end{array}$$

On ignore la nature de leur développement en série de Fourier.

(b). - Prenons maintenant pour ρ la plus simple des représentations de dimension > 1, à savoir la représentation

$$\rho(g) = \det(g)^k\, g$$

de $GL(n, \underline{C}) = GL(\underline{C}^n)$ dans l'espace $F_\rho = \underline{C}^n$ de dimension n. Le plus haut poids de ρ est visiblement

$$\Delta_1 . \Delta_n^k$$

i.e.

$$\alpha_1 = 1 , \quad \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0 , \quad \alpha_n = k \quad ;$$

les formes modulaires d'espèce ρ sont les applications holomorphes de S_n dans $\underline{C}^n$ vérifiant

$$f(Mz) = \det(cz + d)^k\,(cz + d)\, f(z) \quad \text{pour} \quad M \in \Gamma .$$

Si l'on part d'une matrice

$$s = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $s_1 \gg 0$ de degré r on doit cette fois introduire dans les séries d'Eisenstein un vecteur $\omega \in F_\rho^{(r)}$; si $(\underline{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la base canonique de $\underline{C}^n$ il est clair que $\underline{e}_1$ appartient au plus haut poids de ρ, donc que $F_\rho^{(r)}$ est soustendu par les vecteurs $g\underline{e}_1$ avec

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix} \quad ;$$

donc $F_\rho^{(r)}$ est le sous-espace de $\underline{C}^n$ engendré par les vecteurs de base $\underline{e}_1 , \dots , \underline{e}_r$, ce qui donne essentiellement r possibilités pour le vecteur ω ; on a donc à considérer r séries d'Eisenstein, à savoir

$$(5.3) \quad E_{s;i}(z) = \sum_{\overline{\Gamma_\infty(s).M}} \exp(2\pi i\, \mathrm{Tr}(s.Mz)) \det(cz + d)^{-k}\,(cz + d)^{-1}\, \underline{e}_i \quad (1 \leq i \leq r) \quad ;$$

ces séries convergent pour

$$\begin{array}{lll} k > 2n & \text{si} & s \gg 0 \\ k > n + r + 1 & \text{si} & \mathrm{rg}(s) = r < n \ . \end{array}$$

Noter qu'ici le cas $s = 0$ ne saurait se présenter, attendu que l'on a toujours $F_{\rho}^{(0)} = 0$ si ρ est de dimension > 1 ; le cas le plus simple est donc celui où s est de rang $r = 1$, ce qui donne une série (5.3), convergente pour $k > n + 2$ et dépendant d'un entier $s \geqslant 1$ arbitraire. "On" ignore si ces séries sont différentes de 0 ; mais, comme on verra dans le prochain exposé que pour α_n suffisamment grand l'espace $\mathcal{S}_{\Gamma}(\rho)$ n'est pas réduit à 0, il est certain que certaines séries (5.3) ne sont pas identiquement nulles !

(c). - Prenons pour F l'espace des matrices symétriques complexes

$$\delta z = \delta z'$$

(la notation δz a pour but de suggérer qu'on va se placer dans l'espace fibré des vecteurs tangents au demi-plan de Siegel ; ce fibré est bien entendu trivial) et faisons agir $GL(n, \underline{C})$ sur F par

$$\rho(g) : \delta z \longrightarrow \det(g)^k \, g.\delta z.g' \quad ; \tag{5.4}$$

on obtient une représentation irréductible dont le plus haut poids est

$$\Delta_1^2 \, \Delta_n^k \quad ;$$

les formes modulaires d'espèce ρ sont les fonctions $f(z)$, à valeurs symétriques complexes, holomorphes, et vérifiant

$$f(Mz) = \det(cz + d)^k \, (cz + d) \, f(z) \, (cz + d)' \quad .$$

Ici le vecteur appartenant au plus haut poids de ρ est la matrice

$$\delta z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1 = matrice unité à une ligne et une colonne), de sorte que $F_{\rho}^{(r)}$ est formé des matrices

$$\delta z = \begin{pmatrix} \delta z_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec δz_1 symétrique de degré r, ce qui permet d'expliciter si l'on y tient les séries d'Eisenstein dans ce cas : pour

$$s = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $s_1 \gg 0$ de degré r on trouve les séries de la forme

$$\sum_{\Gamma_{00}(s).M} \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(s.Mz)) \det(cz+d)^{-k} (cz+d)^{-1}.\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.(cz+d)'^{-1}$$

où a est une matrice symétrique complexe quelconque de degré r ; il y a donc au plus (pour s et k donnés) $r(r+1)/2$ séries linéairement indépendantes. La série précédente converge pour les valeurs habituelles ($k > 2n$ si $s \gg 0$, sinon $k > n + r + 1$).

On remarquera que pour $k = 0$ la représentation ρ correspond au fibré des vecteurs tangents au demi-plan de Siegel (il suffit d'examiner comment le stabilisateur du point $z = i$ du demi-plan opère sur les vecteurs tangents en i), et les formes modulaires correspondent alors aux champs de vecteurs (sur le demi-plan de Siegel) qui sont <u>invariants</u> par $Sp(n, \underline{Z})$; les séries d'Eisenstein ne sont évidemment d'aucune utilité pour les étudier. Il y a du reste lieu de penser qu'il n'existe aucun champ de vecteurs (holomorphe) invariant ... Il est triste de constater qu'on ne peut pas déduire ce résultat (s'il est exact) des théorèmes généraux, à savoir du théorème 3 de l'exposé 8 ; en prenant la représentation (5.3) le théorème 3 de l'exposé 8 donne en effet les renseignements suivants : $\mathcal{H}_\Gamma(\rho) = 0$ si $k < -2$, et $\mathcal{S}_\Gamma(\rho) = 0$ si $k < 0$; ce qui ne suffit pas à résoudre le problème posé.

Si l'on veut construire sur le demi-plan de Siegel des champs de vecteurs <u>méromorphes</u> invariants par $Sp(n, \underline{Z})$ il n'y a évidemment aucune difficulté ; il suffit de diviser une série d'Eisenstein correspondant à la représentation de plus haut poids

$$\Delta_1^2 \Delta_n^k$$

par une forme modulaire non nulle de poids k (il en existe dès que $k > n + 1$: série de H. Braun).

(d). – On laisse au lecteur, à titre d'exercice (et aussi parce que le rédacteur n'a rien de particulier à en dire ...), le soin d'examiner les représentations de plus haut poids

$$\Delta_{n-1}^2 \Delta_n^k \quad ;$$

ce sont les contragrédientes des représentations étudiées dans (c) ; pour $k = 0$ les formes modulaires sont donc les <u>formes différentielles holomorphes de degré</u> 1 sur le demi-plan de Siegel invariantes par $Sp(n, \underline{Z})$; noter (Exposé 7, théorème 3) qu'une telle forme ω vérifie forcément $\Phi(\Phi(\omega)) = 0$, i.e. $\Phi(\omega)$ est une Spitzenform. On aimerait connaître l'interprétation de ce phénomène dans la compactification de Satake. Le même résultat vaut naturellement pour les différentielles <u>méromorphes</u> invariantes qu'on obtiendrait comme quotient de deux séries d'Eisenstein associées aux représentations

$$\Delta_{n-1}^{2}\, \Delta_{n}^{k} \quad \text{et} \quad \Delta_{n}^{k} \quad .$$

Il resterait à savoir si, en prenant k assez grand, ce procédé brutal conduit à <u>toutes</u> les différentielles méromorphes de degré 1 . La même question se pose d'ailleurs pour <u>toute</u> représentation ρ : une solution <u>méromorphe</u> de

$$f(Mz) = \rho(cz + d)\, f(z)$$

peut-elle toujours s'obtenir comme quotient de deux formes modulaires (<u>holomorphes</u>) correspondant aux représentations

$$\det(g)^{k}\, \rho(g) \quad \text{et} \quad \det(g)^{k} \quad ,$$

avec k assez grand ? Pour ρ de dimension 1 la question vient d'être résolue affirmativement par BAILY, grâce à la compactification de SATAKE (cf. les exposés ultérieurs) ; il y a donc lieu de croire qu'il en est de même pour ρ quelconque ; tout revient d'ailleurs à construire une forme modulaire non identiquement nulle, de poids k assez grand, et multiple d'un diviseur donné invariant par $Sp(n , \underline{Z})$, à savoir le diviseur défini par la fonction donnée f .

BIBLIOGRAPHIE

Les séries d'Eisenstein, pour $Sp(n, \underline{Z})$ et ρ de dimension 1, μ trivial, ont été introduites dans :

MAAS (Hans). - Über die Darstellung der Modulformen n-ten Grades durch Poincarésche Reihen, Math. Annalen, t. 123, 1951, p. 125-151.

Voir aussi l'ouvrage suivant, qui contient par ailleurs un exposé d'ensemble de la théorie des fonctions modulaires selon SIEGEL, MAAS et KOECHER :

MAAS (Hans). - Lectures on Siegel's modular functions. - Bombay, Tata Institute of fundamental Research, 1954-55 (Tata Institute of fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics n° 3).

La série $\sum \det(cz + d)^{-k}$ apparaît dans :

SIEGEL (Carl L.). - Über die analytische Theorie der quadratischen Formen, Ann. of Math., t. 36, 1935, p. 527-606 ; voir p. 601, formule (143).

La convergence de cette série a été démontrée par :

BRAUN (Hel). - Konvergenz verallgemeinerter Eisensteinscher Reihen, Math. Z., t. 44, 1939, p. 387-397.

Le cas $n = 1$ est exposé avec simplicité dans :

PETERSSON (Hans). - Über eine Metrisierung der ganzen Modulformen, Jahresb. deutschen Math. Verein., t. 49, 1939, p. 49-75.

Les séries de Fourier des séries d'Eisenstein (pour $n = 1$) se trouvent dans :

PETERSSON (Hans). - Über die Entwicklungskoeffizienten der automorphen Formen, Acta Mathematica, t. 58, 1932, p. 169-215.

La série de Fourier de $\sum \det(cz + d)^{-k}$ (n quelconque) a été calculée par :

SIEGEL (Carl L.). - Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, Math. Annalen, t. 116, 1939, p. 617-657.

Les fonctions "de Bessel" (3.10), pour ρ de dimension 1, se trouvent dans :

HERZ (Carl S.). - Bessel functions of matrix argument, Ann. of Math., t. 61, 1955, p. 474-523.