HENRI CARTAN

Formes modulaires

Séminaire Henri Cartan, tome 10, n^o 1 (1957-1958), exp. n^o 4, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_1_A4_0>

FORMES MODULAIRES

par Henri CARTAN.

1. Facteurs d'automorphie, formes automorphes.

Soit G un groupe d'automorphismes d'une variété analytique complexe $\mathcal{V}$. Soit d'autre part F un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, de dimension finie ; on note $GL(F)$ le groupe des automorphismes (linéaire-complexes) de F. On appelle facteur d'automorphie une fonction $R(M, z)$ définie sur le produit $G \times \mathcal{V}$, à valeurs dans $GL(F)$, holomorphe en $z \in \mathcal{V}$, et telle que

(1) $$R(MM', z) = R(M, M'z).R(M', z) .$$

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathcal{V}$, à valeurs dans F ; on dit que f est une forme automorphe (relativement au groupe G et au facteur d'automorphie R) si

(2) $$f(Mz) = R(Mz).f(z) .$$

Ces formes automorphes constituent évidemment un espace vectoriel complexe.

On s'intéressera au cas suivant : $\mathcal{V}$ est l'espace de Siegel $\mathcal{S}_n$ (cf. Exp. 2 et 3) et G est un sous-groupe du groupe symplectique $Sp(n, \mathbb{R})$. Considérons d'abord le cas où $F = \mathbb{C}^n$; à chaque matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

de $Sp(n, \mathbb{R})$, et à chaque $z \in \mathcal{S}_n$, associons

$$R(M, z) = cz + d \in GL(n, \mathbb{C}) .$$

On vérifie aussitôt que c'est bien un facteur d'automorphie.

Soit maintenant F un espace vectoriel complexe, et ρ une représentation (analytique-complexe) $GL(n, \mathbb{C}) \longrightarrow GL(F)$; alors

$$R(M, z) = \rho(cz + d)$$

est un facteur d'automorphie pour G.

Le cas classique est celui où $F = \mathbb{C}$, et où

$$\rho(cz + d) = (\det(cz + d))^k , \qquad k \text{ entier.}$$

Les formes automorphes correspondantes s'appellent alors formes de poids k.

Revenant au cas d'une représentation ρ quelconque, supposons que G soit le groupe modulaire $Sp(n, \mathbb{Z})$; les formes automorphes f (à valeurs dans F) satisfaisant à

(3) $$f(Mz) = \rho(cz + d).f(z)$$

pour $M \in Sp(n, \mathbb{Z})$, prennent le nom de <u>formes modulaires</u> d'espèce ρ. Plus généralement, si G est un groupe paramodulaire Γ_δ (cf. Exp. 3, p. 3-11), on parlera de <u>formes paramodulaires</u> d'espèce ρ.

Soit f une forme modulaire. Le groupe modulaire $SL(n, \mathbb{Z})$ opérant dans $\mathfrak{S}_n$ contient le sous-groupe des translations

$$z \longrightarrow z + h, \qquad \text{(h symétrique à termes entiers)},$$

correspondant au cas où $a = 1_n$, $b = h$, $c = 0$, $d = 1_n$; alors $\rho(cz + d) = 1$ (élément neutre de $GL(F)$), donc on doit avoir

(4) $$f(z + h) = f(z) \quad \text{pour } h \text{ symétrique entière.}$$

Toute fonction f satisfaisant à (4) sera dite périodique <u>à périodes entières</u>.

Plus généralement, si f est forme paramodulaire, on doit avoir $f(z + h) = f(z)$ pour toute matrice symétrique h telle que $h\delta^{-1}$ soit à éléments entiers. En particulier, on aura $f(z + h) = f(z)$ pour toute h symétrique dont les éléments sont des multiples d'un entier fixe.

2. <u>Généralités sur les fonctions holomorphes à périodes entières</u>.

Ce qui précède nous amène à étudier les fonctions f(z) holomorphes dans l'espace de Siegel $\mathfrak{S}_n$, et périodiques à périodes entières.

L'espace $\mathfrak{S}_n$ est un cas particulier des "tubes" : un <u>tube</u> T, dans un espace $\mathbb{C}^p$, est un ouvert stable par toutes les translations $z \longrightarrow z + h$, où h est <u>réel</u>. Soit f(z) une fonction holomorphe dans T, et telle que $f(z + h) = f(z)$ chaque fois que h est à coordonnées <u>entières</u>. Au point $z = (z_k)$ associons le point de $\mathbb{C}^p$ de coordonnées

$$t_k = \exp(2\pi i z_k) .$$

L'image du tube T par cette application est un ouvert H stable par le groupe de transformations $t_k \longrightarrow \lambda_k t_k$ ($|\lambda_k| = 1$) ; autrement dit, H est un "domaine de Reinhardt". Dans H existe une unique fonction holomorphe g(t) telle que $g(\exp(2\pi i z_k)) = f(z)$, puisque f est périodique à périodes entières. Il est classique que, dans H, g(t) admet un unique "développement de Laurent"

$$g(t) = \sum_{j_1,\dots,j_p} b_{j_1 \dots j_p} \, t_1^{j_1} \dots t_p^{j_p}$$

qui converge normalement sur tout compact de H (les entiers $j_1, \dots, j_p$ sont $\geqslant 0$ ou $\leqslant 0$). Donc $f(z)$ admet un unique développement de la forme

$$(5) \qquad f(z) = \sum_{j_1,\dots,j_p} b_{j_1 \dots j_p} \exp 2\pi i \left(\sum_k j_k z_k\right)$$

qui converge normalement sur tout compact du tube T.

C'est un développement du type Fourier, dont les coefficients sont donnés par les formules (où $z_k = x_k + iy_k$, x_k et y_k réels) :

$$(6) \qquad b_{j_1 \dots j_p} \exp\left(-2\pi \sum_k j_k y_k\right) = \int_{|x_k| \leqslant 1/2} f(x + iy) \exp\left(-2\pi i \sum_k j_k x_k\right) dx$$

dx désignant le volume euclidien dans l'espace des variables x_k.

Revenons à l'espace de Siegel $\mathcal{S}_n$; alors $p = n(n+1)/2$, et l'indice k parcourt l'ensemble des couples d'entiers (ℓ, m) tels que $1 \leqslant \ell \leqslant m \leqslant n$. La somme $\sum_k j_k z_k$ devient

$$\sum_{\ell, m} s_{\ell m} z_{\ell m} = \mathrm{Tr}(sz) ,$$

où la matrice <u>symétrique</u> $s = (s_{\ell m})$ est telle que $2 s_{\ell m}$ et s_{mm} soient des <u>entiers</u>. Une telle matrice symétrique s est dite <u>demi-entière</u> ; on notera que les matrices demi-entières ne sont autres que les matrices (symétriques) s telles que la produit scalaire $\langle su, u \rangle$ soit entier pour tout vecteur u à coordonnées entières.

Ainsi, le développement d'une $f(z)$ holomorphe dans $\mathcal{S}_n$ et à périodes entières s'écrit

$$(7) \qquad f(z) = \sum_s a(s) \exp(2\pi i \, \mathrm{Tr}(sz)) ,$$

la sommation étant étendue à toutes les matrices s symétriques et demi-entières ; cette série est normalement convergente sur tout compact de $\mathcal{S}_n$, et ses coefficients dont donnés par

$$(8) \quad a(s) \exp(-2\pi \, \mathrm{Tr}(sy)) = \int_{|x_{\ell m}| \leqslant 1/2} f(x + iy) \exp(-2\pi i \, \mathrm{Tr}(sx)) \, dx .$$

On notera que, puisque la série converge absolument en tout point, et en particulier au point $z = \frac{i}{2\pi} 1_n$, on a

$$(9) \qquad |a(s)| \leqslant K \exp(\mathrm{Tr}(s)) ,$$

où le nombre $K > 0$ est indépendant de s ; la notation $|a(s)|$ désigne la norme de $a(s)$ (point de l'espace vectoriel F, qu'on suppose muni d'une norme).

REMARQUE. - Si $f(z)$ holomorphe dans $\mathfrak{S}_n$ est invariante par les translations d'un lattice réel Λ, on a un développement analogue à (7), la sommation étant cette fois étendue aux s symétriques réelles telles que le produit scalaire $\langle su , u \rangle$ soit entier pour tout $u \in \Lambda$.

3. Le théorème de Koecher.

On doit à Koecher un théorème qui, sous sa forme la plus générale, peut être énoncé comme suit

THÉORÈME 1. - *Soit γ un sous-groupe du groupe $SL(n , \mathbb{Z})$, d'indice fini ; soit ρ une représentation de γ dans $GL(F)$, F désignant un espace vectoriel complexe de dimension finie. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans l'espace de Siegel $\mathfrak{S}_n$, à valeurs dans F, à périodes entières, et telle que*

$$(10) \qquad f(uz\,{}^t u) = \rho(u).f(z) \quad \text{pour tout } u \in \gamma .$$

Alors, si $n \geqslant 2$, les coefficients $a(s)$ du développement (7) sont nuls lorsque s n'est pas $\geqslant 0$ (i.e : positive au sens large).

DÉMONSTRATION. - Dans (7), remplaçons z par $uz\,{}^t u$, et observons que

$$\mathrm{Tr}(suz\,{}^t u) = \mathrm{Tr}({}^t usuz) ;$$

remplaçant ${}^t usu$ par s, on voit que

$$f(uz\,{}^t u) = \sum_s a({}^t u^{-1}\, su^{-1}) \quad \exp(2\pi i\, \mathrm{Tr}(sz)) \quad ;$$

pour que (10) ait lieu, il faut et il suffit (compte tenu de l'unicité du développement (7)) que

$$(11) \qquad a({}^t usu) = \rho(u^{-1}).a(s) \quad \text{pour tout } u \in \gamma .$$

Supposons qu'il en soit ainsi. Si dans (9) on remplace s par ${}^t usu$, on obtient, compte tenu de (11),

$$(12) \qquad |a(s)| \leqslant K\|\rho(u)\|.\ \exp(\mathrm{Tr}({}^t usu)) ,$$

où $\|\rho(u)\|$ désigne la norme de la transformation linéaire $\rho(u)$ de l'espace F. Or on va voir que l'inégalité (12), valable pour tous les u d'un sous-groupe γ d'indice fini de $SL(n , \mathbb{Z})$, entraîne la nullité de $a(s)$ lorsque s n'est pas $\geqslant 0$.

Soit donc s une matrice symétrique demi-entière et non $\geqslant 0$. Il existe un vecteur $x \in \mathbb{Q}^n$ tel que le produit scalaire $\langle sx , x \rangle$ soit < 0 ; on peut même supposer

$x \in \mathbb{Z}^n$. Notons (e_i) la base canonique de $\mathbb{Z}^n$, et soit $x = \sum_i x_i e_i$, avec par exemple $x_1 \neq 0$. Puisque $n \geq 2$, on peut définir un endomorphisme v de $\mathbb{Z}^n$ en posant :

$$v(e_1) = x_2\, x \ , \quad v(e_2) = -x_1\, x \ , \quad v(e_k) = 0 \quad \text{pour} \quad k > 2 \ .$$

Alors $v(x) = 0$, et, pour tout $y \in \mathbb{Z}^n$, $v(y)$ est un multiple de x . On a donc $v^2 = 0$, et il est immédiat que $\mathrm{Tr}(v) = 0$; De plus

$$\mathrm{Tr}({}^t vsv) = \sum_i \langle sve_i\ ,\ ve_i \rangle = (x_1^2 + x_2^2)\langle sx\ ,\ x \rangle = -c\ ,$$

où c est un entier > 0 . Soit alors

$$u = 1 + v = \exp(v) \quad ;$$

on a $\det(u) = \exp(\mathrm{Tr}(v)) = 1$. Puisque le sous-groupe γ est d'indice fini dans $SL(n\ ,\ \mathbb{Z})$, il existe une puissance u^q qui appartient à γ . On a $u^q = 1 + qv$; remplaçant v par qv , on peut donc supposer que $u \in \gamma$. Alors, pour tout entier $p > 0$, on a $u^p = 1 + pv$, d'où

$$\mathrm{Tr}({}^t(u^p)su^p) = \mathrm{Tr}(s) + 2p\ \mathrm{Tr}(sv) + p^2\ \mathrm{Tr}({}^t vsv) = a + 2bp - cp^2\ ,$$

l'entier c étant > 0 . Portons ceci dans (12), où u serait remplacé par u^p ; il vient

$$|a(s)| \leq K\|\rho(u)\|^p \exp(a + 2bp - cp^2)\ .$$

Lorsque l'entier p augmente indéfiniment, le second membre tend vers zéro, d'où $a(s) = 0$.

C.Q.F.D.

REMARQUE. - Le théorème est évidemment en défaut pour $n = 1$, car alors l'hypothèse (10) est trivialement remplie pour toute $f(z)$ holomorphe à périodes entières.

EXEMPLES d'application du théorème 1. - Il s'applique dans le cas où $f(z)$ est une forme modulaire d'espèce ρ (ρ étant une représentation holomorphe de $GL(n\ ,\ \mathbb{C})$ dans $GL(F)$). Plus généralement, soit Γ_δ un groupe paramodulaire, et soit $f(z)$ une forme paramodulaire d'espèce ρ ; il existe un entier q tel que $f(qz)$ soit périodique à périodes entières ; prenant pour γ le sous-groupe des $u \in SL(n\ ,\ \mathbb{Z})$ tels que

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & {}^t u^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma_\delta \quad ,$$

on peut appliquer le théorème 1 à la fonction $f(qz)$, et on obtient donc un développement

(13) $$f(z) = \sum_{s \geqslant 0} a(s) \exp(\frac{2\pi i}{q} \operatorname{Tr}(sz)) ,$$

la sommation étant étendue aux matrices s symétriques demi-entières et $\geqslant 0$).

Est également justiciable du théorème 1 le cas envisagé explicitement par KOECHER : q étant un entier, on note $\Gamma(q)$ le sous-groupe des $M \in Sp(n , \underset{\sim}{Z})$ telles que $M \equiv \pm 1 \pmod q$; soit K un groupe tel que $\Gamma(q) \subset K \subset Sp(n , \underset{\sim}{Z})$, et soit v un caractère de K égal à 1 sur $\Gamma(q)$. Si $f(z)$ satisfait à

$$f(Mz) = v(M)\ \rho(cz + d).f(z)$$

pour

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K ,$$

le théorème 1 est applicable à la fonction $f(qz)$, et par suite $f(z)$ admet un développement de la forme (13).

4. Diverses majorations.

Dans ce numéro on étudie les fonctions $f(z)$ holomorphes dans $\underset{\sim}{\mathcal{S}}_n$, à périodes entières, qui admettent un développement (normalement convergent sur tout compact) de la forme

(14) $$f(z) = \sum_{s \geqslant 0} a(s) \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(sz)) ,$$

la sommation étant étendue à toutes les matrices s symétriques, demi-entières et $\geqslant 0$.

PROPOSITION 1. - Soit c une constante > 0 ; lorsque $y \geqslant c.1_n$, $|f(z)|$ reste borné, et la série (14) est normalement convergente (y désigne toujours la partie imaginaire de z).

En effet, la série (14) converge absolument pour $z = ic.1_n$; de plus, si $\operatorname{IM}(z') \geqslant \operatorname{Im}(z)$, on a

$$|\exp(2\pi i \ \operatorname{Tr}(sz'))| \leqslant |\exp(2\pi i \ \operatorname{Tr}(sz))| ,$$

car les relations $y' - y \geqslant 0$, $s \geqslant 0$ entraînent

$$\operatorname{Tr}(s(y' - y)) \geqslant 0 ,$$

d'où

$$\exp(- 2\pi \operatorname{Tr}(sy')) \leqslant \exp(- 2\pi \operatorname{Tr}(sy)) ,$$

ce qui établit la proposition. (On s'est appuyé sur le résultat suivant : si s et

y sont des matrices symétriques $\geqslant 0$, on a $\mathrm{Tr}(sy) \geqslant 0$. Pour la voir, on écrit $y = v^2$, v étant symétrique $\geqslant 0$; alors $\mathrm{Tr}(sy) = \mathrm{Tr}(vsv)$; or vsv est symétrique et $\geqslant 0$, donc sa trace est $\geqslant 0$).

REMARQUE. - Le proposition 1 admet une réciproque. Si $f(z)$ est holomorphe dans $\mathfrak{S}_n$ et à périodes entières, et si $|f(z)|$ est borné pour $y \geqslant c.1_n$ (pour un $c > 0$), alors $f(z)$ admet un développement de la forme (14). Il suffit de montrer que, dans le développement (7), tous les coefficients $a(s)$ relatifs aux s non $\geqslant 0$ sont nuls ; or si $a(s) \neq 0$, la formule (8) montre que $\exp(-2\pi \,\mathrm{Tr}(sy))$ est borné pour $y \geqslant c.1_n$; or ceci n'est possible que si $s \geqslant 0$, car soit u une matrice orthogonale telle que $u^{-1} su = \delta$ soit diagonale ; on a

$$\mathrm{Tr}(u^{-1} suy) = \mathrm{Tr}(suyu^{-1}) ,$$

et si $y \geqslant c.1_n$, on a aussi $uyu^{-1} \geqslant c.1_n$; puisque $\mathrm{Tr}(\delta y)$ est borné inférieurement pour $y \geqslant c.1_n$, la matrice diagonale δ doit avoir tous ses termes $\geqslant 0$. Ainsi $s \geqslant 0$, comme annoncé.

COROLLAIRE de la proposition 1. - Dans tout ouvert fondamental $\Omega(u)$ pour le groupe modulaire (cf. Exp. 3, p 3-07), toute $f(z)$ de la forme (14) reste bornée en module.

PROPOSITION 2. - Supposons que, dans le développement (14), tous les coefficients $a(s)$ relatifs aux s non $\gg 0$ soient nuls. Soient c et c' des constantes > 0 ; supposons que $z = x + iy$ varie dans $\mathfrak{S}_n$ de manière que :

1° les termes diagonaux y_{ii} restent $\geqslant c'$;

2° $y \geqslant c.[y_{11}, \ldots, y_{nn}]$, où $[y_{11}, \ldots, y_{nn}]$ désigne la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont ceux de y. Alors on a

$$|f(z)| \leqslant K \exp(-2\pi c \,\mathrm{Tr}(y)) , \tag{15}$$

où la constante K ne dépend que de f, c et c'.

DÉMONSTRATION. - Sous les hypothèses faites sur y, on a

$$\begin{aligned} |a(s) \exp(2\pi i \,\mathrm{Tr}(sz))| &= |a(s)| \exp(-2\pi \,\mathrm{Tr}(sy)) \\ &\leqslant |a(s)| \exp(-2\pi c (\textstyle\sum_i s_{ii} y_{ii})) \\ &\leqslant |a(s)| \exp(-2\pi cc' \,\mathrm{Tr}(s)) \exp(-2\pi c \textstyle\sum_i s_{ii}(y_{ii} - c')) . \end{aligned}$$

Si $s \gg 0$, tous les entiers s_{ii} sont $\geqslant 1$; donc l'expression précédente est majorée par

$$|a(s)| \exp(-2\pi cc' \operatorname{Tr}(s)) \quad \exp(-2\pi c(\operatorname{Tr}(y)-nc')) ,$$

et si on somme par rapport aux $s \gg 0$, on trouve

$$|f(z)| \leqslant \exp(2\pi ncc')(\sum_{s\gg 0} |a(s)| \exp(-2\pi cc' \operatorname{Tr}(s)).\exp(-2\pi c \operatorname{Tr}(y)) ,$$

ce qui établit (15).

COROLLAIRE. - Si z reste dans un ouvert fondamental $\Omega(u)$ (cf. Exp. 3, p. 3-07), toute $f(z)$ holomorphe dans $\mathfrak{S}_n$, à périodes entières, et dont tous les coefficients $a(s)$ sont nuls pour s non $\gg 0$, satisfait à une inégalité de la forme (15) (avec des constantes c et K convenables) ; en particulier, une telle fonction est de carré sommable dans le "domaine fondamental" du groupe modulaire.

5. Propriétés asymptotiques.

Toute matrice symétrique demi-entière s (à n lignes et n colonnes) s'écrit

$$\begin{pmatrix} s_1 & u \\ {}^t u & s_{nn} \end{pmatrix} ,$$

où s_1 est une matrice symétrique demi-entière à $n-1$ lignes et $n-1$ colonnes, $2u$ est une matrice entière à $n-1$ lignes et une colonne, et s_{nn} un nombre entier. On dira que s est spéciale si $u = 0$, $s_{nn} = 0$. De même, tout $z \in \mathfrak{S}_n$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} z_1 & v \\ {}^t v & z_{nn} \end{pmatrix}$$

où $z_1 \in \mathfrak{S}_{n-1}$, $\operatorname{Im}(z_{nn}) = y_{nn} > 0$, et où $w = \operatorname{Im}(v)$ satisfait notamment aux inégalités

(16) $$|w_k| \leqslant (y_{kk}\, y_{nn})^{1/2} \qquad \text{pour } 1 \leqslant k \leqslant n-1 .$$

THÉORÈME 2. - Soit $f(z)$ holomorphe dans $\mathfrak{S}_n$ et admettant un développement de la forme (14). Si z varie de manière que :

(i) y reste $\geqslant c.1_n$ (c constante >0) ,

(ii) z_1 tende vers une limite z' ,

(iii) $\lim y_{nn} = +\infty$,

alors $f(z)$ converge vers la fonction (holomorphe pour $z' \in \mathfrak{S}_{n-1}$)

$$\sum_s a(s) \quad \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(s_1 z')) ,$$

la sommation étant étendue aux s *spéciales. La convergence est uniforme vis-à-vis de* z' *(la constante* c *restant fixe).*

DÉMONSTRATION. - D'après la proposition 1, la convergence de la série $f(z)$ est normale. Il suffit donc de montrer que chacun des termes $a(s)\exp(-2\pi\,\mathrm{Tr}(sy))$ tend 0 lorsque s n'est pas spéciale. Cela va résulter du

LEMME. - *Si* $z \in \mathfrak{S}_n$ *varie de manière que* $y \geqslant c.1_n$ $(c$ constante $>0)$, $y_1 = \mathrm{Im}(z_1)$ *restant borné, et* y_{nn} *tendant vers* $+\infty$, *alors*

(17) $$\lim \exp(-2\pi\,\mathrm{Tr}(sy)) = 0$$

chaque fois que la matrice s *(symétrique, demi-entière et* $\geqslant 0)$ *n'est pas spéciale.*

En effet, avec les notations ci-dessus, on a

$$\mathrm{Tr}(sy) = \mathrm{Tr}(s_1\,y_1) + 2\,\mathrm{Tr}(u\,{}^t w) + s_{nn}\,y_{nn} \quad ;$$

en vertu de (16), on en déduit que (17) a lieu si $s_{nn} > 0$. Donc si (17) n'a pas lieu, on a $s_{nn} = 0$; comme $s \geqslant 0$, ceci exige $u = 0$, et par suite s est spéciale.

Le théorème 2 conduit à associer à chaque $f(z)$, holomorphe dans $\mathfrak{S}_n$ et admettant un développement de la forme (14), la fonction $\Phi f = f_1$, holomorphe pour $z' \in \mathfrak{S}_{n-1}$, définie par

$$f_1(z') = \sum_{s_1 \geqslant 0} a\begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp(2\pi i\,\mathrm{Tr}(s_1 z')) \ .$$

L'application Φ est évidemment linéaire. Le théorème 2 dit que $f(z')$ est la limite de $f(z)$ lorsque z_1 tend vers z' et que y_{nn} tend vers $+\infty$, y restant $\geqslant c.1_n$.

COMPLÉMENT au théorème 2. - *Sous les hypothèses du théorème 2, supposons de plus que l'on ait*

(18) $$f(uz\,{}^t u) = \rho(u).f(z) \qquad \text{pour toute } u \in SL(n\,,\,\mathbb{Z}) \ ,$$

ρ *étant une représentation de* $SL(n\,,\,\mathbb{Z})$ *dans* $GL(F)$. *Pour que* f *soit dans le noyau de* Φ , *il faut et il suffit que* $a(s) = 0$ *chaque fois que* s *n'est pas* $\gg 0$.

En effet, on sait déjà que $a(s) = 0$ quand s est spéciale. Soit maintenant s non $\gg 0$; il existe un $x \in \mathbb{Z}^n$, non nul tel que le produit scalaire $\langle sx\,,\,x\rangle = 0$. On peut supposer x primitif (i.e : le p.g.c.d. de ses coordonnées est égal à 1). Alors il existe une $u \in SL(n\,,\,\mathbb{Z})$ telle que $u(x) = e_n$ (dernier vecteur de la base canonique de $\underset{\sim}{Z}^n$). Donc ${}^t usu$ a son n-ième terme diagonal qui est nul, et par suite ${}^t usu$ est spéciale, d'où

$$a({}^t usu) = 0 .$$

Or l'hypothèse (18) entraîne $a(s) = \rho(u).a({}^t usu)$, d'où $a(s) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Le "complément au théorème 2" s'applique notamment à toute <u>forme modulaire</u> (pour $n \geqslant 2$).

On sait (Exp. 3, p. 3-11) que chaque matrice diagonale δ (à n lignes et n colonnes, les termes diagonaux étant des entiers > 0) définit un sous-groupe Γ_δ du groupe symplectique $Sp(n , \underset{\sim}{R})$. Considérons l'injection canonique φ : $Sp(n - 1 , \underset{\sim}{R}) \longrightarrow Sp(n , \underset{\sim}{R})$ qui, à chaque $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, associe $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad c = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad d = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Si à la matrice diagonale δ on associe la matrice diagonale δ' obtenue par suppression de la dernière ligne et de la dernière colonne, il est clair que l'injection φ : $Sp(n - 1 , \underset{\sim}{R}) \longrightarrow Sp(n , \underset{\sim}{R})$ applique $\Gamma_{\delta'}$ dans Γ_δ . D'autre part, pour chaque nombre $\lambda > 0$ nous avons une injection J_λ : $\mathfrak{S}_{n-1} \longrightarrow \mathfrak{S}_n$, qui envoie z_1 dans $\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & i\lambda \end{pmatrix}$. Les injections φ et J_λ sont <u>compatibles</u>, dans le sens suivant :

(19) $$J_\lambda (M_1 . z_1) = \varphi(M_1).J_\lambda(z_1) \quad \text{pour } M_1 \in Sp(n - 1 , \underset{\sim}{R}) \text{ et } z_1 \in \mathfrak{S}_{n-1} .$$

Considérons alors un facteur d'automorphie $R(M , z)$ pour le groupe paramodulaire Γ_δ , et supposons que $R(\varphi(M_1) , J_\lambda (z_1))$ soit <u>indépendant</u> du paramètre λ lorsque $M_1 \in \Gamma_{\delta'}$ et $z_1 \in \mathfrak{S}_{n-1}$. Alors ceci est évidemment un facteur d'automorphie $R_1(M_1 , z_1)$ pour le groupe $\Gamma_{\delta'}$.

Soit alors $f(z)$ une fonction holomorphe dans $\mathfrak{S}_n$ et admettant un développement de la forme (13) (avec un entier q convenable) ; en vertu du théorème 2 appliqué à $f(qz)$, on a, pour $z_1 \in \mathfrak{S}_{n-1}$:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} f(J_\lambda(z_1)) = f_1(z_1) ,$$

avec $f_1(z_1) = \sum_{s_1 \gg 0} a\begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp(\frac{2\pi i}{q} \; Tr(s_1 \; z_1))$.

Si $f(z)$ admet le facteur d'automorphie $R(M , z)$, alors un passage à la limite dans la relation

$$f(J_\lambda (M_1 . z_1)) = R(\varphi(M_1) , J_\lambda (z_1)).f(J_\lambda (z_1))$$

donne

$$f_1(M_1 . z_1) = R_1(M_1 , z_1).f_1(z_1) .$$

Ainsi la fonction limite $f_1(z_1)$ admet le facteur d'automorphie $R_1(M_1 , z_1)$.

Ce qui précède s'applique aux formes paramodulaires d'espèce ρ ; en effet, si ρ est une représentation $GL(n , \mathbb{C}) \longrightarrow GL(F)$, soit ρ_1 la représentation $GL(n - 1 , \mathbb{C}) \longrightarrow GL(F)$ égale à la composée de l'injection $GL(n-1,\mathbb{C}) \longrightarrow GL(n,\mathbb{C})$ (définie par $z_1 \longrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) et de ρ . Si on pose $R(M , z) = \rho(cz + d)$, alors

$$R(\varphi(M_1) , J_\lambda (z_1)) = \rho_1(c_1 \; z_1 + d_1) \;;$$

ceci est indépendant de λ . D'où le

THÉORÈME 3. - Si une forme paramodulaire $f(z)$ d'espèce ρ (relative au groupe Γ_δ) admet un développement de la forme (13), alors la fonction $\Phi f = f_1$ est , dans l'espace $\mathfrak{S}_{n-1}$, une forme paramodulaire d'espèce ρ_1 (pour le groupe $\Gamma_{\delta'}$)

Nous terminerons par une propriété particulière au groupe modulaire $Sp(n , \mathbb{Z})$:

PROPOSITION 3. - Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans $\mathfrak{S}_n$ et invariante par le groupe modulaire $Sp(n , \mathbb{Z})$. Supposons de plus, dans le cas $n = 1$, que $|f(z)|$ soit borné pour $\operatorname{Im} z \geqslant 1$. Alors $f(z)$ est constante.

Il suffit de le prouver pour une f à valeurs scalaires. On procède par récurrence sur n , l'assertion étant triviale pour $n = 0$. La fonction $f(z)$ étant à périodes entières admet un développement de la forme (7) ; les seuls coefficients $a(s)$ non nuls sont relatifs aux $s \geqslant 0$: pour $n = 1$, cela résulte de l'hypothèse selon laquelle $|f(z)|$ est borné pour $\operatorname{Im} z \geqslant 1$; pour $n \geqslant 2$, cela résulte du théorème 1. La fonction Φf est une fonction holomorphe dans $\mathfrak{S}_{n-1}$ et satisfait aux hypothèses de l'énoncé pour $n - 1$; d'après l'hypothèse de récurrence, c'est une constante. En retranchant de f cette constante, on voit que f est dans le noyau de l'application Φ ; donc (complément au théorème 2) on a

$$f(z) = \sum_{s \gg 0} a(s) \exp(2\pi i \; Tr(sz)) .$$

Il en résulte (corollaire de la proposition 2) que, dans le domaine fondamental, $f(z)$ satisfait à l'inégalité (15). Si $f(z)$ n'était pas identiquement nulle, la borne supérieure de $|f(z)|$ dans le domaine fondamental serait atteinte en un point à distance finie, parce que l'ensemble des points du domaine fondamental où $\mathrm{Tr}(y)$ est $\leqslant$ à un nombre donné, est compact. Comme f est invariante par le groupe modulaire, $|f(z)|$ atteindrait son maximum en un point intérieur à $\mathfrak{S}_n$, ce qui contredit le classique "principe du maximum".

On laisse de côté, pour des exposés ultérieurs, les théorèmes d'existence relatifs aux formes d'espèce ρ, et la majoration de la dimension de l'espace vectoriel des formes d'espèce ρ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KOECHER (M.). - Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades, Math. Z., t. 59, 1954, p. 399-416 ; et t. 61, 1955, p. 455-466.

[2] SIEGEL (C.L.). - Symplectic geometry, Amer. J. Math., t. 65, 1943, p. 1-86.

Voir aussi :

HERVÉ (Michel). - Travaux de Köcher sur les formes modulaires, Séminaire Bourbaki, t. 8, 1955/56.