

# SÉMINAIRE HENRI CARTAN

ICHIRO SATAKE

## Caractérisation de l'espace des spitzenformen

*Séminaire Henri Cartan*, tome 10, n° 1 (1957-1958), exp. n° 9 bis, p. 32-38

[http://www.numdam.org/item?id=SHC\\_1957-1958\\_\\_10\\_1\\_A10\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SHC_1957-1958__10_1_A10_0)

© Séminaire Henri Cartan  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1957-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

CARACTÉRISATION DE L'ESPACE DES SPITZENFORMEN

par Ichiro SATAKE

On se propose de donner ici une démonstration du lemme utilisé dans l'exposé 9 (p. 9-07). On fera usage de notations et de résultats d'exposés suivants, notamment les exposés 12, 14 et 16.

Soit  $\Gamma'$  un groupe commensurable au groupe modulaire  $\Gamma$  ; nous avons défini un produit scalaire de  $f, g \in \mathcal{H}_{\Gamma'}(\mu, \rho)$  par

$$(1) \quad \langle f, g \rangle_{\Gamma'} = \int_{\Gamma' \backslash \mathbb{S}_n} \langle \rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f(Z), \rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ g(Z) \rangle dZ \\ = \int_{\Gamma' \backslash \mathbb{S}_n} \text{Tr}(g(Z)^* \circ \rho(Y) \circ f(Z)) dZ,$$

où l'adjoint  $*$  est défini par rapport aux produits scalaires adaptés de  $F_{\mu}$  et de  $F_{\rho}$  ; et  $dZ = \det(Y)^{-n-1} dX dY$  est la mesure invariante de  $\mathbb{S}_n$  ; de même, nous avons défini les normes de  $f \in \mathcal{H}_{\Gamma'}(\mu, \rho)$  par

$$(2) \quad \|f\|_{\Gamma', p} = \left( \int_{\Gamma' \backslash \mathbb{S}_n} \|\rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f(Z)\|^p dZ \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$$

$$(3) \quad \|f\|_{\Gamma', \infty} = \sup_{\Gamma' \backslash \mathbb{S}_n} \|\rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f(Z)\|$$

et posé

$$(4) \quad \mathcal{H}_{\Gamma'}^p(\mu, \rho) = \{f ; f \in \mathcal{H}_{\Gamma'}(\mu, \rho), \|f\|_{\Gamma', p} < \infty\} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

En outre on désigne par  $\mathcal{S}_{\Gamma'}(\mu, \rho)$  l'espace des "Spitzenformen" d'espèce  $(\mu, \rho)$  pour  $\Gamma'$ .

Il est trivial de  $\mathcal{H}_{\Gamma'}^{\infty} \subset \mathcal{H}_{\Gamma'}^p \subset \mathcal{H}_{\Gamma'}^1$ , ( $\mathcal{H}_{\Gamma'}^p$  est une fonction croissante de  $p$ ) ; on sait d'ailleurs que

$$(5) \quad \mathcal{S}_{\Gamma'}(\mu, \rho) \subset \mathcal{H}_{\Gamma'}^{\infty}(\mu, \rho)$$

et que l'égalité a lieu si  $\alpha_n = 0$  (Exposé 7, n° 3, corollaire 1 au théorème 1 et théorème 2 ; ce résultat démontré pour  $\Gamma' = \Gamma$  s'étend facilement au cas de  $\Gamma'$  général). On se propose maintenant de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Soit  $0 \leq p < \infty$ . Si  $p \alpha_n \geq 2n$ , on a

$$(6) \quad \mathcal{H}_r^p(\mu, \rho) = \mathcal{S}_r^p(\mu, \rho) ;$$

si  $p \alpha_n < 2n$  et si  $\rho$  est de dimension 1,  $\mathcal{H}_r^p(\mu, \rho)$  est le sous-espace de  $\mathcal{H}_r^p(\mu, \rho)$  formé des  $f$  telles que

$$(7) \quad \oint_{p \alpha_n - n - 1}^n f = 0 \quad \text{pour tout } \lambda$$

(il revient au même de dire que  $\oint_{p \alpha_n - n - 1}^n (f|M) = 0$  pour toute  $M \in \tilde{\Gamma}$ ; on notera d'ailleurs que cette condition n'a pas de sens lorsque  $p \alpha_n \leq n$ ). Pour la notation  $\oint_q^n$ , voir Exposé 14.

DEMONSTRATION. - D'abord on va considérer le cas du groupe modulaire. Soit  $f \in \mathcal{H}_r^p(\mu, \rho)$ ; pour que  $f$  appartienne à  $\mathcal{H}_r^p(\mu, \rho)$ , il faut et il suffit que l'intégrale figurant dans (2) soit convergente dans un voisinage  $U$  de chaque point  $x$  de  $r \setminus \mathcal{S}_n^*$  (puisque ceci est compact!), i.e. que

$$\int_{U \cap r \setminus \mathcal{S}_n^*} \|\rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f(Z)\|^p dZ < \infty ;$$

ceci équivaut à

$$\int_{\pi_r^{*-1}(U) \cap \Omega_n} \|\rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f(Z)\|^p dZ < \infty ,$$

ou encore, en prenant  $x = \pi_r^*(Z_0)$ ,  $Z_0 \in \Omega_r$ ,

$$(8) \quad \int_{V^{(n)}(U_r, K)} \|\rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f(Z)\|^p dZ < \infty ,$$

où  $V^{(n)}(U_r, K)$  désigne l'ensemble des  $Z \in \Omega_n$  telles que  $Z = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_{12} \\ t_{Z_{12}} & Z_2 \end{pmatrix} = X + iY$

$Y = {}^t W D W$ ,  $D = (d_i \delta_{ij})$  avec  $Z_1 \in U_r$ ,  $d_{r+1} > K$ ,  $U_r$  étant un voisinage de  $Z_0$  dans  $\Omega_r$ . (Cf. exposé 12).

Il est clair que, pour  $U_r$  borné et pour  $K$  suffisamment grand,  $V^{(n)}(U_r, K)$  est un produit direct d'un ensemble borné dans l'espace de  $(X, W, D_1)$  et de l'ensemble

$$(9) \quad \mathcal{O}_r(K) = \left\{ (d_{r+1}, \dots, d_n) ; d_i < u d_{i+1} (r+1 \leq i \leq n-1), d_{r+1} > K \right\} .$$

D'autre part, on a

$$dZ = dX dW \prod_{i=1}^n d_i^{-i-1} d d_i ,$$

où  $dX, dW, d d_i$  sont des mesures euclidiennes.

Ceci dit, démontrons la première partie du théorème. Soient  $p \alpha_n \geq 2n$ ,  $f \in \mathcal{H}_r^p(\mu, \rho)$  et supposons que  $\int_{n-1}^n f = f_{n-1}$  ne soit pas identiquement nulle. Si l'on pose

$$Z = \begin{pmatrix} z_1^{(n-1)} & z_{12} \\ t_{z_{12}} & z_n \end{pmatrix}, \quad z_n = x_n + y_n i ,$$

on a

$$\| \rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f_{n-1}(z_1) \| \leq \| \rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f(z) \|$$

$$+ \| \rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ (f(z) - f_{n-1}(z_1)) \| ;$$

on voit facilement que  $\|f(z) - f_{n-1}(z_1)\| \leq c_1 e^{-c_2 y_n}$  dans  $V^{(n)}(U_{n-1}, K)$  (exposé 4, n° 4, proposition 2) et que

$$\| \rho(Y^{\frac{1}{2}}) \| \leq c_3 e^{c_2/2 \operatorname{Tr}(Y)} \det(Y)^{\frac{\alpha_n}{2}}$$

(exposé 6, n° 1, lemme 1), avec  $c_1, c_2, c_3 > 0$ , d'où il résulte que

$$\| \rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ (f(z) - f_{n-1}(z_1)) \|$$

est borné dans  $V^{(n)}(U_{n-1}, K)$ ; par conséquent, on a

$$\int_{V^{(n)}(U_{n-1}, K)} \| \rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f_{n-1}(z_1) \|^p dz < \infty .$$

Mais, comme  $f_{n-1}(z_1) \in \operatorname{Hom}(F_{\mu^{(n-1)}}, F_{\rho^{(n-1)}})$ , on a

$$\begin{aligned} \| \rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f_{n-1}(z_1) \|^2 &= \operatorname{Tr}(f_{n-1}(z_1)^* \circ \rho(Y) \circ f_{n-1}(z_1)) \\ &= \operatorname{Tr}(f_{n-1}(z_1)^* \circ \rho(t_W) \circ \rho^{(n-1)}(D_1 W_1) \circ d_n^{\alpha_n} f_{n-1}(z_1)) . \end{aligned}$$

qui est  $\geq c_4 d_n^{\alpha_n}$  dans  $V^{(n)}(U_{n-1}, K)$  pour  $Z_0 \in \Omega_{n-1}$  telle que  $f_{n-1}(Z_0) \neq 0$ , où  $c_4$  est une constante positive. Donc la convergence de l'intégrale ci-dessus entraîne que

$$\int_K^\infty \frac{p \frac{\alpha_n}{2} - n - 1}{d_n} d d_n < \infty ,$$

ce qui est une contradiction pour  $p \alpha_n \geq 2n$ . Ainsi pour  $p \alpha_n \geq 2n$ ,  $f \in \mathcal{K}_r^p(\mu, \rho)$  entraîne  $f \in \mathcal{S}_r(\mu, \rho)$ . (La réciproque est déjà connue).

Passons à la démonstration de la deuxième partie du théorème. Supposons  $p \alpha_n < 2n$  et  $\dim \rho = 1$ ; soit  $f \in \mathcal{K}_r^p(\mu, \rho)$  et supposons que  $\Phi_r^n f = f_r$  ne soit pas identiquement nulle. Si  $f_r(Z_0) \neq 0$ ,  $Z_0 \in \Omega_r$ , on peut prendre  $U_r, K$  tels que

$$\|f(Z)\| \geq \varepsilon \quad \text{dans } V^{(n)}(U_r, K) ;$$

alors il est clair que la convergence de l'intégrale (8) entraîne la convergence de

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{O}_r(K)} \prod_{i=r+1}^n \frac{p \frac{\alpha_n}{2} - i - 1}{d_i} d d_i \\ &= \int_K^\infty \frac{p \frac{\alpha_n}{2} - r - 2}{d_{r+1}} \int_{n^{-1} d_{r+1}}^\infty \frac{p \frac{\alpha_n}{2} - r - 3}{d_{r+2}} \dots \int_{n^{-1} d_{n-2}}^\infty \frac{p \frac{\alpha_n}{2} - n}{d_{n-1}} \int_{n^{-1} d_{n-1}}^\infty \frac{p \frac{\alpha_n}{2} - n - 1}{d_n} \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$i(p \frac{\alpha_n}{2} - n) + \frac{i(i-1)}{2} < 0 \quad (1 \leq i \leq n-r) ,$$

i.e.

$$r > p \alpha_n - n - 1 .$$

Réciproquement, il est facile de voir que, si  $r > p \alpha_n - n - 1$ , l'intégrale (8) est toujours convergente; il nous reste à affirmer la convergence de celle-là pour  $0 \leq r \leq p \alpha_n - n - 1$ , sous l'hypothèse que  $\Phi_{p \alpha_n - n - 1}^n f = 0$ . Supposons donc  $p \alpha_n > n$ ,  $\Phi_{p \alpha_n - n - 1}^n f = 0$ ; alors, par le raisonnement de la démonstration de la proposition 2 de l'exposé 4, on constate facilement que

$$\|f(Z)\| \leq c_1 e^{-c_2 (d_1 + \dots + d_{p \alpha_n - n})} \quad \text{dans } \Omega_n ,$$

de sorte que l'intégrale (8) pour  $Z_0 \in \Omega_r$  ( $0 \leq r \leq p \alpha_n - n - 1$ ) est majorée par

$$\int_{\mathbb{Q}_r(\mathbb{K})} e^{-c_2 \sum_{i=r+1}^{p\alpha_n - n} d_i} \prod_{i=r+1}^n d_i^{p \frac{\alpha_n}{2} - i - 1} d d_i$$

dont on voit immédiatement la convergence. La démonstration du théorème 1, dans la cas du groupe modulaire, est donc achevée.

Soit maintenant  $\Gamma'$  un groupe commensurable à  $\Gamma$ , et soient

$$(10) \quad \Gamma'' = \Gamma \cap \Gamma', \quad \Gamma = \bigcup_{i=1}^k \Gamma'' M_i.$$

Comme on l'a fait dans la démonstration du théorème 3 de l'exposé 16, on peut faire correspondre, d'une façon canonique, à  $f' \in \mathcal{H}_{\Gamma'}(\mu', \rho')$  une forme  $f \in \mathcal{H}_{\Gamma}(\mu, \rho)$  où  $\mu$  est un multiplicateur de  $\Gamma$  "induit" par un multiplicateur  $\mu'$  de  $\Gamma'$  (plus précisément, par la restriction de  $\mu'$  à  $\Gamma''$  et par la décomposition (10));  $f$  est définie par

$$(11) \quad f(Z) : a = (a_i) \rightarrow \sum_{i=1}^k (f' | M_i)(Z) a_i,$$

où  $a_i \in F^{\mu_{M_i}}$  ( $1 \leq i \leq k$ ).

Soient  $f', g' \in \mathcal{H}_{\Gamma'}(\mu', \rho')$  et soient  $f, g$  les éléments correspondants de  $\mathcal{H}_{\Gamma}(\mu, \rho)$ ; alors on a

$$(12) \quad \begin{aligned} \langle \rho(Y^{\frac{1}{2}}) f(Z), \rho(Y^{\frac{1}{2}}) g(Z) \rangle &= \text{Tr}(g(Z)^* \circ \rho(Y) \circ f(Z)) \\ &= \sum_i \text{Tr}((g' | M_i)(Z)^* \circ \rho(Y) \circ (f' | M_i)(Z)) \\ &= \sum_i \text{Tr}(g(M_i Z)^* \circ \rho(Y_{M_i Z}) \circ f(M_i Z)) \\ &= \sum_i \langle \rho(Y_{M_i Z}^{\frac{1}{2}}) \circ f'(M_i Z), \rho(Y_{M_i Z}^{\frac{1}{2}}) \circ g'(M_i Z) \rangle, \end{aligned}$$

d'où, en désignant par  $F$  un domaine fondamental de  $\Gamma$ , on déduit

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{\Gamma} &= \int_F \langle \rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f(Z), \rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ g(Z) \rangle dZ \\ &= \int_F \sum_i \langle \rho(Y_{M_i Z}^{\frac{1}{2}}) \circ f'(M_i Z), \rho(Y_{M_i Z}^{\frac{1}{2}}) \circ g'(M_i Z) \rangle dZ \\ &= \int_{\bigcup_i M_i F} \langle \rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f'(Z), \rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ g'(Z) \rangle dZ \\ &= \langle f', g' \rangle_{\Gamma''}, \end{aligned}$$

parce que  $\bigcup_{\mathbf{I}} M_{\mathbf{I}}F$  est un domaine fondamental de  $\Gamma''$ ; ce dernier étant visiblement égal à  $[\Gamma' : \Gamma''] \langle f', g' \rangle_{\Gamma'}$ , on obtient la relation suivante

$$(13) \quad \langle f, g \rangle_{\Gamma} = [\Gamma' : \Gamma''] \langle f', g' \rangle_{\Gamma'} .$$

Or, d'après (12), on a

$$\|\rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f(Z)\|^2 = \sum_{\mathbf{I}} \|\rho(Y_{M_{\mathbf{I}}Z}) \circ f'(M_{\mathbf{I}}Z)\|^2 ,$$

d'où

$$\|\rho(Y_{M_{\mathbf{I}}Z}) \circ f'(M_{\mathbf{I}}Z)\| \leq \|\rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f(Z)\| \leq \sum_{\mathbf{I}} \|\rho(Y_{M_{\mathbf{I}}Z}) \circ f'(M_{\mathbf{I}}Z)\| .$$

On en conclut que  $f' \in \mathcal{H}_{\Gamma'}^p(\mu', \rho)$  si et seulement si  $f \in \mathcal{H}_{\Gamma}^p(\mu, \rho)$ ; en effet, si  $f' \in \mathcal{H}_{\Gamma'}^p(\mu', \rho)$ , on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f'(Z)\|^p < \infty , \\ \bigcup_{\mathbf{I}} M_{\mathbf{I}}F \end{array} \right.$$

et par suite

$$\sum_{\mathbf{I}} \int_{F} \|\rho(Y_{M_{\mathbf{I}}Z}) \circ f'(M_{\mathbf{I}}Z)\|^p < \infty ,$$

d'où (inégalité de Minkowski)

$$\int_{F} \|\rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f(Z)\|^p < \infty ,$$

i.e.  $f \in \mathcal{H}_{\Gamma}^p(\mu, \rho)$ ; réciproquement, si  $f \in \mathcal{H}_{\Gamma}^p(\mu, \rho)$ , on a

$$\int_{F} \|\rho(Y_{M_{\mathbf{I}}Z}) \circ f'(M_{\mathbf{I}}Z)\|^p < \infty$$

pour chaque  $\mathbf{i}$ , d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\rho(Y^{\frac{1}{2}}) \circ f'(Z)\|^p < \infty , \\ \bigcup_{\mathbf{I}} M_{\mathbf{I}}F \end{array} \right.$$

donc  $f' \in \mathcal{H}_{\Gamma'}^p(\mu', \rho)$ , (nous avons supposé  $p < \infty$ ; mais la conclusion ci-dessus est évidemment vraie pour  $p = \infty$  aussi).

D'autre part, il est clair, d'après (12), que  $f'$  est une Spitzenform pour  $\Gamma'$  si et seulement si  $f$  est une Spitzenform pour  $\Gamma$  ; plus généralement, on a  $\Phi_{r,\lambda}^n f' = 0$  pour tout  $\lambda$  si et seulement si  $\Phi_r^n f = 0$ . On a ainsi réduit la démonstration du théorème 1 au cas du groupe modulaire, ce qui achève la démonstration.

---