H. Cartan

Sur la théorie de Kan

Séminaire Henri Cartan, tome 9 (1956-1957), exp. n° 1, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1956-1957__9__A1_0>

SUR LA THÉORIE DE KAN

(Exposés de H. CARTAN, les 10.12.1956 et 17.12.1956)

Bibliographie : Daniel M. KAN, Notes aux Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 42 (1956), p. 419-421 et p. 542-546.
En outre, quelques "papiers secrets" de KAN.
Voir aussi les Notes de cours de J.C. MOORE, Princeton 1955-56.

1.- Catégorie avec structure simpliciale.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On lui associe une nouvelle catégorie $\mathcal{C}^S$ comme suit : un objet de $\mathcal{C}^S$ est défini par la donnée d'une suite (K_n) (n entier $\geqslant 0$) d'objets de $\mathcal{C}$, et, pour chaque n , de deux suites d'applications

$$d_i : K_n \longrightarrow K_{n-1} \qquad (0 \leqslant i \leqslant n, \quad n \geqslant 1)$$
$$s_i : K_n \longrightarrow K_{n+1} \qquad (0 \leqslant i \leqslant n, \quad n \geqslant 0)$$

qui sont des "morphismes" de la catégorie $\mathcal{C}$. Les d_i ("opérateurs de face") et les s_i ("opérateurs de dégénérescence") sont en outre assujettis aux relations suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} d_i d_j = d_{j-1} d_i & \text{pour } i < j \\ s_i s_j = s_{j+1} s_i & \text{pour } i \leqslant j \\ d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i & \text{pour } i < j \\ \text{identité} & \text{pour } i = j \text{ et pour } i = j+1 \\ s_j d_{i-1} & \text{pour } i > j+1 . \end{cases} \end{cases}$$

On achève de définir la catégorie $\mathcal{C}^S$ en définissant les "morphismes" de cette catégorie : un morphisme $(K_n) \longrightarrow (K'_n)$ est une suite de morphismes $f_n : K_n \longrightarrow K'_n$ de la catégorie $\mathcal{C}$, tels que

$$d_i f_n = f_{n-1} d_i \qquad \text{pour } 0 \leqslant i \leqslant n \quad , \quad n \geqslant 1 ,$$
$$s_i f_n = f_{n+1} s_i \qquad \text{pour } 0 \leqslant i \leqslant n \quad , \quad n \geqslant 0 .$$

Par exemple, si $\mathcal{C}$ est la catégorie des ensembles et des applications ensemblistes, $\mathcal{C}^S$ sera la catégorie des ensembles simpliciaux (appelés souvent, dans la littérature, complexes semi-simpliciaux, ou C.S.S.-complexes). Si $\mathcal{C}$ est la catégorie des groupes (non nécessairement abéliens) et des homomorphismes de groupes, $\mathcal{C}^S$ sera la catégorie des groupes simpliciaux. On définit de même les monoïdes simpliciaux (avec éléments neutres).

La définition de la catégorie $\mathcal{C}^S$ peut encore se formuler de la manière suivante. Considérons la catégorie Δ définie comme suit : les objets de forment une suite $\Delta_o , \ldots , \Delta_n , \ldots$; Δ_n est la suite des entiers $(0 , 1 , \ldots , n)$. Les morphismes de Δ sont les applications croissantes (au sens large) $\Delta_p \longrightarrow \Delta_q$.

On notera que tout morphisme s'obtient par composition des morphismes identiques $\Delta_n \longrightarrow \Delta_n$, des morphismes

$$\delta_i : \Delta_n \longrightarrow \Delta_{n+1} \quad (\text{tel que } \delta_i(p) = p \text{ pour } p < i , \ \delta_i(p) = p+1 \text{ pour } p \geqslant i)$$

et $$\sigma_i : \Delta_n \longrightarrow \Delta_{n-1} \quad (\text{tel que } \sigma_i(p) = p \text{ pour } p \leqslant i , \ \sigma_i(p) = p-1 \text{ pour } p > i) .$$

Alors un objet de $\mathcal{C}^S$ n'est pas autre chose qu'un foncteur contravariant T de la catégorie Δ dans la catégorie $\mathcal{C}$; et un morphisme de la catégorie $\mathcal{C}^S$ est simplement une application naturelle $T \to T'$ de foncteurs contravariants. Les relations (1) se déduisent par transposition de relations évidentes entre les δ_i et les σ_i .

Les relations (1) permettent d'écrire sous une forme canonique toute $K_p \to K_q$ composée d'applications de la forme d_i ou s_i ; à savoir

$$s_{i_1} \ldots s_{i_k} d_{j_1} \ldots d_{j_h} \quad , \text{avec } i_1 > \ldots > i_k , \ j_1 < \ldots < j_h .$$

Sur K_n , cette application est définie si $j_h \leqslant n$, $i_1 < n-h+k$, et c'est alors une application $K_n \to K_{n-h+k}$. Lorsque les K_n ont une structure ensembliste, un élément $x \in K_n$ est "dégénéré" s'il appartient à l'image d'une application s_i ; tout $x \in K_n$ s'écrit d'une seule manière $s_{i_1} \ldots s_{i_k} y$, où y est non-dégénéré, et $i_1 > \ldots > i_k$ (k pouvant être nul).

2.- Groupes d'homotopie.

Un ensemble simplicial (K_n) satisfait à la condition d'extension de Kan si, pour tout $n \geqslant 0$, et tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant n+1$, la donnée d'une suite d'éléments $x_i \in K_n$ $(0 \leqslant i \leqslant n+1,\ i \neq k)$ tels que $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ quels que soient i et j tous deux $\neq k$, (avec $i < j$) entraîne l'existence d'au moins un $x \in K_{n+1}$ tel que $d_i x = x_i$ pour tout $i \neq k$. (Autrement dit, on peut se donner arbitrairement toutes les faces sauf une d'un élément de K_{n+1}, pourvu que ces faces satisfassent aux relations de compatibilité évidentes). Un ensemble simplicial $K = (K_n)$ satisfaisant à la condition d'extension s'appelle un complexe de Kan. Tout groupe simplicial est un complexe de Kan (voir un exposé de MOORE au séminaire 1954-55, p. 18-04).

Si $K = (K_n)$ est un complexe de Kan, on peut définir les groupes d'homotopie $\pi_n(K)$ (voir une exposition détaillée dans les notes de MOORE citées au début). Dans le cas particulier d'un groupe simplicial $G = (G_n)$, les groupes d'homotopie $\pi_n(G)$ peuvent être calculés comme suit (cf. Sém. 1954-55, Exposé 16, paragraphe 4) : soit $\widetilde{G}_n = \bigcap_{0 < i \leqslant n} \operatorname{Ker} d_i$; alors d_o induit un homomorphisme $\delta_n : \widetilde{G}_n \to \widetilde{G}_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$, et on a ainsi une suite d'homomorphismes

$$(2) \qquad \cdots \to \widetilde{G}_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} \widetilde{G}_n \xrightarrow{\delta_n} \widetilde{G}_{n-1} \to \cdots \to \widetilde{G}_1 \to \widetilde{G}_o$$

tel que le composé de deux homomorphismes consécutifs soit "neutre". De plus, il est immédiat que $\operatorname{Im} \delta_{n+1}$ est un sous-groupe invariant de $\operatorname{Ker} \delta_n$; on peut donc considérer le groupe quotient

$$\operatorname{Ker} \delta_n / \operatorname{Im} \delta_{n+1}, \quad \text{noté } H_n(\widetilde{G}) ;$$

les $H_n(\widetilde{G})$ peuvent être appelés les groupes d'homologie du "complexe" $\widetilde{G}$ défini par la suite (2).

On voit facilement que $H_n(\widetilde{G})$ est naturellement isomorphe au groupe d'homotopie $\pi_n(G)$. Vérifions que les $H_n(\widetilde{G})$ sont abéliens pour $n \geqslant 1$: soient x et $y \in G_n$ $(n \geqslant 1)$ tels que $d_i x = 1$ (élément neutre de G_{n-1}), $d_i y = 1$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$; considérons

$$z = (s_o x)(s_o y)(s_o x)^{-1}(s_o y)^{-1}(s_1 y)(s_o x)(s_1 y)^{-1}(s_o x)^{-1} ;$$

on a $d_o z = xyx^{-1}y^{-1}$ et $d_i z = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n+1$; donc la classe de $xyx^{-1}y^{-1}$ dans le groupe $H_n(\tilde{G})$ est la classe neutre.

Envisageons maintenant le cas où le groupe simplicial G est <u>abélien</u> (i.e : les G_n sont abéliens ; on les note additivement). Définissons un homomorphisme $d : G_n \to G_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$ par $d = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} (-1)^i d_i$. On a $dd = 0$, et on peut considérer le "complexe" (noté encore G) :

$$\dots \longrightarrow G_{n+1} \xrightarrow{d} G_n \xrightarrow{d} G_{n-1} \dashrightarrow \dots \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_o ,$$

dont les groupes d'homologie seront notés $H_n(G)$. Le complexe $\tilde{G}$ s'identifie évidemment à un sous-complexe du complexe G, et on a donc des homomorphismes $H_n(\tilde{G}) \to H_n(G)$, ou, ce qui revient au même, $\pi_n(G) \to H_n(G)$.

<u>PROPOSITION 1</u>.- <u>Le groupe simplicial</u> G <u>étant toujours supposé abélien, les homomorphismes</u> $\pi_n(G) \longrightarrow H_n(G)$ <u>sont des isomorphismes</u>.

<u>DÉMONSTRATION</u>.- Pour chaque entier $p \geqslant 0$, soit $F^p(G_n)$ le sous-groupe des $x \in G_n$, tels que $d_i x = 0$ pour $\sup(0, n-p) < i \leqslant n$; on a

$$F^o(G_n) = G_n , \quad F^{p+1}(G_n) = F^p(G_n) \quad \text{pour} \quad p \geqslant n .$$

Pour un p donné, les $F^p(G_n)$, quand n varie, forment un sous-complexe $F^p(G)$ du complexe G ; d'où une filtration

$$G = F^o(G) \supset F^1(G) \supset \dots \supset F^p(G) \supset \dots ,$$

et l'intersection des $F^p(G)$ est visiblement $\tilde{G}$.

On va définir un projecteur $f^p : F^p(G) \longrightarrow F^{p+1}(G)$. Pour $x \in F^p(G_n)$, soit $S^p(x)$ l'élément de G_{n+1} égal à

$$\begin{cases} (-1)^{n-p+1} s_{n-p} x & \text{si } n \geqslant p ; \\ 0 & \text{si } n < p . \end{cases}$$

$S^p(x) \in F^p(G_{n+1})$, car $d_i s_{n-p} = s_{n-p} d_{i-1}$ pour $i > n+1-p$. On a

$$dS^p x + S^p dx = \begin{cases} s_{n-p-1} d_{n-p} x & \text{si } n \geqslant p+1 \\ 0 & \text{si } n < p+1 . \end{cases}$$

Si $x \in F^{p+1}(G_n)$, ceci est nul. Donc l'application f^p définie par

$$f^p(x) = x - dS^p x - S^p dx$$

envoie $F^p(G)$ dans lui-même et laisse fixes les éléments de $F^{p+1}(G)$; de plus, f^p prend ses valeurs dans $F^{p+1}(G)$, car si $n > p$, on a

$$d_{n-p}(x - s_{n-p-1}\, d_{n-p}\, x) = 0 \text{ , puisque } d_{n-p}\, s_{n-p-1} \text{ est l'identité.}$$

Ainsi f^p est bien un projecteur $F^p(G) \to F^{p+1}(G)$, et la forme de f^p montre que le composé de f^p et de l'injection $F^{p+1}(G) \to F^p(G)$ définit l'application identique des groupes d'homologie de $F^p(G)$. Il en résulte que l'injection $F^{p+1}(G) \to F^p(G)$ induit un isomorphisme des groupes d'homologie ; par composition, l'injection $\widetilde{G} \to G$ induit un isomorphisme des groupes d'homologie. La proposition est démontrée.

COROLLAIRE.- Soit K un ensemble simplicial, et soit $C(K)$ le groupe abélien simplicial qu'il engendre : $C_n(K)$ est le groupe abélien libre ayant pour base les éléments de K_n , $d_i : C_n(K) \to C_{n-1}(K)$ est l'application induite par $d_i : K_n \to K_{n-1}$. Les groupes d'homologie $H_n(C(K))$ sont classiquement notés $H_n(K)$, et appelés les groupes d'homologie de K . La proposition 1 donne donc un isomorphisme naturel

$$(4) \qquad \pi_n(C(K)) \approx H_n(K)$$

valable pour tout ensemble simplicial K .

Choisissons maintenant un sommet $k_o \in K_o$ (analogue du "point-base" d'un espace topologique) ; pour chaque entier n identifions $(s_o)^n k_o$ à l'élément neutre de $C_n(K)$; par cette identification, on obtient un complexe $\widetilde{C}(K)$, quotient de $C(K)$. La relation (4) entraîne aussitôt

$$(5) \qquad \pi_n(\widetilde{C}(K)) \approx \widetilde{H}_n(K) ,$$

où les $\widetilde{H}_n(K)$ sont les groupes d'homologie réduits de K , c'est-à-dire $\widetilde{H}_n(K) = H_n(K)$ pour $n > 0$, $\widetilde{H}_o(K)$ étant le sous-groupe des éléments de $H_o(K)$ qui sont annulés par l'augmentation $C_o(K) \to Z$.

La relation (5) est l'équivalent simplicial du théorème de DOLD et THOM (voir Comptes Rendus, 242, 1956, p. 1680) relatif aux groupes d'homotopie de la "puissance symétrique" (infinie) d'un espace topologique X avec point-base : ici, K joue le rôle de l'espace X , et $\widetilde{C}(K)$ le rôle de la "puissance symétrique" de X .

3.- Réalisation géométrique.

(Cf. J. MILNOR, The geometric realization of a semi-simplicial complex ; Lecture Notes, Princeton 1955-56).

Soit K un ensemble simplicial. À chaque $x \in K_n$ associons un exemplaire A_x du simplexe affine-type de dimension n .

Considérons l'espace-somme

$$Y = \sum_x A_x ,$$

la sommation étant étendue aux éléments de toutes dimensions de K . À chaque application $d_i : K_n \to K_{n-1}$ et à chaque $x \in K_n$ associons l'application affine $A_{d_i x} \to A_x$ qui envoie $A_{d_i x}$ sur la i-ième face de A_x ; à chaque application $s_i : K_n \to K_{n+1}$ et à chaque $x \in K_n$ associons l'application affine $A_{s_i x} \to A_x$ qui envoie les sommets d'ordres $0 , 1 , \dots , n+1$ de $A_{s_i x}$ sur les sommets d'ordres $0 , 1 , \dots , n$ de A_x , le i-ième sommet de A_x étant recouvert deux fois. Toutes les applications précédentes engendrent une relation d'équivalence dans Y : on identifie chaque point d'un $A_{d_i x}$ (resp. d'un $A_{s_i x}$) à son image par l'application en question. L'espace quotient de Y par cette relation d'équivalence sera noté $|K|$, et appelé la réalisation géométrique de K .

Pour chaque $x \in K_n$, l'injection du n-simplexe affine-type A^n dans Y qui applique A^n sur A_x , définit par passage au quotient une application continue notée $|x|$:

$$|x| \; : \; A^n \longrightarrow |K| \; ;$$

$|x|$ n'est pas autre chose qu'un n-simplexe singulier de l'espace $|K|$. L'application qui, à chaque x , associe $|x|$, est une injection naturelle de l'ensemble simplicial K dans le complexe singulier $S(|K|)$; on la notera $i(K)$.

REMARQUE.- L'espace $|K|$ est réunion des images des $|x|$ relatifs aux x non-dégénérés ; si x est non-dégénéré, l'application $|x|$ induit un homéomorphisme de l'intérieur de A^n sur son image dans $|K|$, image dont l'adhérence est l'image du simplexe singulier $|x|$. On voit que l'on a une "décomposition cellulaire" de $|K|$, qui est ainsi un CW-complexe.

$|K|$ est un foncteur covariant de K : toute application simpliciale $\varphi : K \to L$ définit de manière évidente une application continue $|\varphi| : |K| \to |L|$; le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\varphi} & L \\ \downarrow{\scriptstyle i(K)} & & \downarrow{\scriptstyle i(L)} \\ S(|K|) & \xrightarrow{|\varphi|} & S(|L|) \end{array}$$

Le calcul classique des groupes d'homologie d'un "complexe cellulaire" montre que l'homomorphisme des groupes d'homologie

$$H(K) \longrightarrow H(S(|K|))$$

défini par l'injection $i(K)$, est un isomorphisme.

Il reste à comparer les groupes d'homotopie de K et de $S(|K|)$ s'ils existent. Comme bien connu, le complexe singulier $S(|K|)$ satisfait à la condition d'extension de Kan ; il a donc des groupes d'homotopie, qui ne sont autres que les groupes d'homotopie de l'espace $|K|$ (par définition si l'on veut). Si K satisfait lui-même à la condition de Kan, $i(K)$ définit des homomorphismes $\pi_n(K) \longrightarrow \pi_n(|K|)$. Si l'on peut prouver que ce sont des isomorphismes, il sera licite de définir les groupes d'homotopie $\pi_n(K)$ (même lorsque K ne satisfait pas à la condition de Kan) comme étant les groupes $\pi_n(|K|)$.

Dans sa Note citée J. MILNOR affirme (page 10) que $\pi_n(K) \to \pi_n(|K|)$ est un isomorphisme pour tout n ; il ne donne la démonstration que pour $n = 1$, et dit que le cas général s'en déduit par un théorème d'Hurewicz relatif. Nous admettrons le résultat de MILNOR.

Soient maintenant K et K' deux ensembles simpliciaux. On définit classiquement l'ensemble simplicial $K \times K'$: on a $(K \times K')_n = K_n \times K'_n$ (produit ensembliste), et

$$d_i(x,x') = (d_i x, d_i x') , \quad s_i(x,x') = (s_i x, s_i x') \qquad \text{pour} \quad x \in K_n , \quad x' \in K'_n .$$

En remontant à la définition des espaces $|K \times K'|$ et $|K| \times |K'|$, on définit d'une manière évidente une bijection

$$\Phi : |K \times K'| \longrightarrow |K| \times |K'|$$

qui est continue (regarder une relation d'équivalence dans un produit d'espaces topologiques, et appliquer le paragraphe 8 du chapitre I de Topologie Générale de BOURBAKI). L'application réciproque Φ^{-1} n'est continue que sous certaines hypothèses restrictives ; par exemple, il suffit que K et K' soient <u>dénombrables</u>. Dans tous les cas, la restriction de Φ^{-1} à tout compact de $|K| \times |K'|$ est un homéomorphisme sur son image.

Supposons alors que K soit un <u>monoïde simplicial</u> ; on a donc une application simpliciale $K \times K \to K$, d'où une application continue $|K \times K| \to |K|$. En composant Φ^{-1} et cette application, on trouve une application

$$|K| \times |K| \longrightarrow |K|$$

qui est continue sous certaines hypothèses (par exemple : K dénombrable), et en tous cas sa restriction aux compacts de $|K| \times |K|$ est continue. On peut donc dire que $|K|$ est un <u>monoïde topologique</u>, en un sens un peu large.

Si de plus K est un <u>groupe simplicial</u>, $|K|$ est un <u>groupe topologique</u> (dans un sens large, comme ci-dessus).

4.- <u>Fibrés</u>.

Soient X et B deux ensembles simpliciaux, et soient $p : X \to B$ une application simpliciale. On dit que p <u>satisfait à la condition de Kan</u> (ou encore que p est <u>fibrée au sens de Kan</u>, ou simplement que p est <u>fibrée</u>) si, pour tout $n > 0$, et pour tout système d'éléments

$b \in B_n$, $x_i \in X_{n-1}$ $(0 \leqslant i \leqslant n$, $i \neq k$ où k est un entier $\geqslant 0$ et $\leqslant n)$

satisfaisant à

$$p(x_i) = d_i b \quad \text{pour tout } i, \quad d_i x_j = d_{j-1} x_i \quad \text{pour } i < j,$$

il existe au moins un $x \in X_n$ tel que

$$p(x) = b, \quad d_i x = x_i \quad \text{pour tout } i.$$

Cette condition est analogue à la condition topologique posée par Serre pour ses espaces fibrés généraux ; d'une façon précise, dire qu'une application simpliciale correspondante des complexes singuliers est fibrée au sens de Kan.

<u>REMARQUE</u>.- Dire que X est un complexe de Kan (paragraphe 1) revient à dire que l'application de X sur un "complexe ponctuel" (ensemble simplicial formé des dégénérés d'un sommet) est fibrée au sens de Kan.

On ne développera pas ici la théorie générale des fibrés simpliciaux. Signalons que, lorsque B_o a un seul sommet, on peut définir les opérations du groupe fondamental $\pi_1(B)$ dans la fibre F (ensemble des éléments de X dont l'image est un dégénéré de l'unique sommet de B_o), ou plutôt dans les groupes d'homotopie et les groupes d'homologie de F . L'on peut aussi développer la théorie de la suite spectrale d'homologie des fibrés.

Soit $p : X \to B$ un fibré simplicial. Choisissons un sommet $b_o \in B_o$, et soit F la fibre au-dessus de b_o. C'est évidemment un complexe de Kan ; on voit facilement : pour que X soit un complexe de Kan, il faut et il suffit que B soit un complexe de Kan (Cf. Notes de MOORE). Supposons qu'il en soit ainsi ; on montre facilement que l'application de $\pi_n(X,F)$ (groupe d'homotopie relatif) dans $\pi_n(B,b_o)$ est un isomorphisme. On en déduit la suite exacte d'homotopie des fibrés simpliciaux :

$$(6) \qquad \cdots \to \pi_n(F) \to \pi_n(X) \to \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F) \to \cdots$$

Lorsque X et B ne sont pas des complexes de Kan, la suite exacte précédente est encore valable (à condition, bien entendu, que l'application p soit fibrée au sens de Kan). On le prouve en utilisant le foncteur Ex^{∞} défini par Kan (1ère des Notes citées) , qui à chaque ensemble simplicial X associe un ensemble simplicial $Ex^{\infty}(X)$ satisfaisant à la condition de Kan ; on a une application simpliciale naturelle $X \to Ex^{\infty}(X)$, et on montre que l'application correspondante des complexes singuliers $S(|X|) \to S(|Ex^{\infty}(X)|)$ définit un isomorphisme des groupes d'homotopie ; compte tenu du résultat de MILNOR cité plus haut, il s'ensuit que $X \to Ex^{\infty}(X)$ définit un isomorphisme des groupes d'homotopie. D'autre part, on montre que le foncteur Ex^{∞} transforme un fibré en un fibré ; alors la suite exacte d'homotopie de l'application fibrée $Ex^{\infty}(X) \to Ex^{\infty}(B)$, de fibre $Ex^{\infty}(F)$, donne la suite exacte d'homotopie (6).

Désormais on va s'intéresser à une classe spéciale de fibrés simpliciaux, analogue simplicial de la classe des fibrés principaux.

Soit F un groupe simplicial ; supposons que F opère à gauche dans un ensemble simplicial X , c'est-à-dire que l'on ait une application simpliciale

$$g : F \times X \to X$$

telle que $g(1_n,x) = x$ (pour $x \in X_n$, et en notant 1_n l'élément neutre de F_n), et que $g(u,g(v,x)) = g(uv,x)$ pour u , $v \in F_n$ et $x \in X_n$. Notons désormais $u.x$ l'élément $g(u,x)$. Considérons la relation d'équivalence, dans X , définie par F : deux éléments x , $y \in X_n$ sont équivalents s'il existe $u \in F_n$ tel que $y = u.x$. Le quotient de X par cette relation est un ensemble simplicial B ; soit $p : X \to B$ l'application de X sur son quotient. Faisons maintenant l'hypothèse :

$$u \in F_n \ , \ x \in X_n \quad \text{et} \quad u.x = x \quad \text{entraîne} \quad u = 1_n \ ;$$

on dira alors que X est un <u>fibré principal</u> de base B et de <u>groupe structural</u> F . Cette dénomination est justifiée par la proposition suivante :

<u>PROPOSITION 2</u>.- <u>Sous les hypothèses ci-dessus, l'application</u> $p : X \to B$ <u>est fibrée au sens de Kan.</u>

<u>DÉMONSTRATION</u>.- Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n$ $(n > 0)$; soient donnés $b \in B_n$ et des $x_i \in X_{n-1}$ $(0 \leq i \leq n \ , \ i \neq k)$ tels que

$$p(x_i) = d_i b \quad , \quad d_i x_j = d_{j-1} x_i \qquad \text{pour} \quad i < j \ .$$

Choisissons $x \in X_n$ tel que $p(x) = b$; alors x_i et $d_i x$ ont même image par p , donc il existe, pour chaque $i \neq k$, un unique $u_i \in F_{n-1}$ tel que $d_i x = u_i . x_i$. Pour $i < j$, on a

$$d_i(u_j . x_j) = d_{j-1}(u_i . x_i) \ , \text{ d'où (en vertu de l'unicité)}$$

$$d_i u_j = d_{j-1} u_i \ .$$

Puisque F est un complexe de Kan, il existe un $v \in F_n$ tel que $d_i v = u_i$ pour $i \neq k$; alors $y = v^{-1}.x$ satisfait à

$$p(y) = b \ , \quad d_i y = x_i \quad \text{pour } i \neq k \ ,$$

ce qui montre que l'application p est fibrée au sens de Kan.

Soit à nouveau $p : X \to B$ un fibré principal de groupe structural F . Utilisant le fait que p satisfait à la condition de Kan , on montre facilement l'existence d'un <u>relèvement</u> $\rho : B \to X$ (c'est-à-dire d'une suite d'applications $\rho_n : B_n \to X_n$ telles que $p_n \rho_n =$ identité), qui est compatible avec tous les opérateurs s_i sans exception, et avec tous les opérateurs d_i pour $i \geqslant 1$. Soit

$$\tilde{\rho} : F \times B \longrightarrow X$$

l'application définie par $\tilde{\rho}(u,b) = u.\rho(b)$.

Il est immédiat que $\tilde{\rho}$ est une bijection ; identifions X à $F \times B$ par cette bijection : alors les opérateurs s_i et d_i , sur $F \times B$, ont la forme suivante :

$$(7)\quad \begin{cases} s_i(x,y) = (s_i x, s_i y) & \text{pour } i \geqslant 0 \quad (x \in F_n\ ,\ y \in B_n)\ , \\ d_i(x,y) = (d_i x, d_i y) & \text{pour } i \geqslant 1\ , \\ d_o(x,y) = ((d_o x)(\tau y)\ ,\ d_o y)\ , & \end{cases}$$

où $\tau : B_n \to F_{n-1}$ est une application qui doit satisfaire à certaines conditions. On les obtient en exprimant que les s_i et les d_i définis par (7) satisfont aux relations (1). Il vient

$$(8)\quad \begin{cases} \tau s_o y = 1_n & \text{pour } y \in B_n\ , \\ s_i \tau = \tau s_{i+1} & \text{pour } i \geqslant 0\ , \\ d_i \tau = \tau d_{i+1} & \text{pour } i \geqslant 1\ , \\ (d_o \tau y)(\tau d_o y) = \tau d_1 y\ . & \end{cases}$$

Réciproquement, soient données des applications $\tau : B_n \to F_{n-1}$ satisfaisant à (8) , et définissons, sur le produit $F \times B$, des opérations s_i et d_i par les formules (7). Alors $F \times B$ est muni d'une structure d'ensemble simplicial, dans lequel le groupe F opère à gauche par $u.(x,y) = (ux,y)$ (pour $u,x \in F_n$ et $y \in B_n$) . L'application $p : F \times B \to B$ définie par $p(x,y) = y$ identifie B au quotient de $F \times B$ par les opérations de F , et fait de $F \times B$ un fibré principal de groupe structural F . Pour éviter toute confusion, on notera $F \times_\tau B$ le produit $F \times B$ muni des opérateurs s_i et d_i définis par (7) à partir de τ (τ satisfaisant à (8)). On dira que $F \times_\tau B$ est le <u>produit cartésien tordu</u> défini par τ .

5.- La construction de Kan.

Soit donné un ensemble simplicial K . On définit un groupe simplicial $F(K)$ et une application τ comme suit : soit $G_n(K)$ le <u>groupe libre</u> engendré par les éléments de K_{n+1} (c'est-à-dire le groupe libre engendré par les éléments y , z , ... $\in K_{n+1}$ et leurs inverses formels y^{-1} , z^{-1}, ...) . Introduisons, dans le groupe $G_n(K)$, les relations

$$s_o y = 1_n \qquad \text{pour} \quad y \in K_n \ .$$

Le groupe quotient $F_n(K)$ ainsi obtenu est encore un <u>groupe libre</u>. Pour $y \in K_{n+1}$, notons $\tau y \in F_n(K)$ la classe du générateur y de $G_n(K)$. Ceci définit l'application $\tau : K_{n+1} \longrightarrow F_n(K)$. La collection $F(K)$ des $F_n(K)$ est munie d'une structure de <u>groupe simplicial</u> en posant, pour $y \in K_{n+1}$:

$$(9) \qquad \begin{cases} s_i \tau y = \tau s_{i+1} y & \text{pour} \quad i \geqslant 0 \ , \\ d_i \tau y = \tau d_{i+1} y & \text{pour} \quad i \geqslant 1 \ , \\ d_o \tau y = (\tau d_1 y)(\tau d_o y)^{-1} \end{cases}$$

En effet, on vérifie que ces formules sont licites, c'est-à-dire compatibles avec la relation d'équivalence définissant $F_n(K)$ à partir de $G_n(K)$; de plus, les s_i (resp. d_i) ainsi définis sur les générateurs du groupe libre $F_n(K)$ se prolongent d'une seule manière en homomorphismes de $F_n(K)$ dans $F_{n+1}(K)$ (resp. $F_{n-1}(K)$). Il est clair que τ satisfait à (8) ; on obtient donc un produit cartésien tordu $F(K) \times_{\tau} K$, qui est un fibré principal de base K , de groupe structural $F(K)$.

La suite exacte d'homotopie des fibrés donne des homomorphismes

$$(10) \qquad \pi_n(F(K)) \longrightarrow \pi_{n+1}(K) \ .$$

Le théorème fondamental de Kan est le suivant :

<u>THÉORÈME 1</u>.- <u>Si</u> K_o <u>n'a qu'un élément, les homomorphismes</u> (10) <u>sont des isomorphismes, pour tout entier</u> $n \geqslant 0$.

Pour le prouver, il suffit, compte tenu de la suite exacte d'homotopie des fibrés, de prouver

$$(11) \qquad \pi_n(F(K) \times_{\tau} K) = 0 \qquad \text{pour} \quad n \geqslant 0 \ .$$

La démonstration, un peu délicate, va suivre. Auparavant, observons que le théorème 1 donne un procédé théorique de "calcul" des groupes d'homotopie $\pi_{n+1}(K)$ de n'importe quel ensemble simplicial K , tel que K_o soit réduit à un seul élément (Kan sait d'ailleurs réduire le cas général à ce cas particulier, en utilisant un "arbre maximal").

On observe aussi que $F(K) \times_\tau K$ joue le rôle de l'espace des chemins d'origine fixée ; $F(K)$ joue le rôle d'espace des lacets, mais en fait $|F(K)|$ est un groupe topologique.

DÉMONSTRATION.- On va montrer successivement

$$\tilde{H}_n(F(K) \times_\tau K) = 0 \quad \text{(groupes d'homologie réduits)},$$

$$\pi_1(F(K) \times_\tau K) = 0 .$$

Il en résultera que la réalisation géométrique $|F(K) \times_\tau K|$ est connexe et simplement connexe, et que ses groupes d'homologie H_n sont nuls pour $n \geqslant 2$; d'après le théorème classique de Hurewicz, ses groupes d'homotopie π_n sont tous nuls, ce qui prouve (11), et par suite le théorème.

DÉMONSTRATION de $\tilde{H}_n(F(K) \times_\tau K) = 0$.- Soit k_o l'unique élément de K_o ; notons $k_n = (s_o)^n k_o$. Pour $x_n \in F_n(K)$, $y_{n+1} \in K_{n+1}$, notons $\{x_n, y_{n+1}\}$ l'élément de $C_n(F(K) \times_\tau K)$ (groupe abélien libre engendré par les éléments de $F_n(K) \times K_n$) que voici :

$$\{x_n, y_{n+1}\} = (x_n(\tau y_{n+1}), d_o y_{n+1}) - (x_n, k_n) .$$

On a donc

$$\{x_n , k_{n+1}\} = 0 .$$

LEMME.- Les $\{x_n, y_{n+1}\}$ tels que $y_{n+1} \neq k_{n+1}$ et l'élément $(1_n, k_n)$ forment une Z-base de $C_n(F(K) \times_\tau K)$.

Pour le voir, observons que

$$(12) \qquad (x_n, y_n) = \{x_n, s_o y_n\} + (x_n, k_n) .$$

Donc tout élément de la base naturelle de $C_n(F(K) \times_\tau K)$ est congru, modulo le sous-groupe engendré par les $\{x_n, y_{n+1}\}$, à un élément de la forme (x_n, k_n) . D'autre part

$$(13) \qquad (x_n(\tau y_{n+1})^{-1}, k_n) = (x_n, d_o y_{n+1}) - \{x_n(\tau y_{n+1})^{-1}, y_{n+1}\} \quad ;$$

$$(14) \qquad (x_n(\tau y_{n+1}), d_o y_{n+1}) = (x_n, k_n) + \{x_n, y_{n+1}\} \quad .$$

Donc tout élément (x_n, k_n) est congru à un (x'_n , k_n) , où x'_n a une "longueur" strictement plus petite que la longueur de x_n (la longueur de x_n désigne le nombre d'éléments de la forme τy ou $(\tau y)^{-1}$ dont x_n est le produit).

Par récurrence sur la longueur de x_n , on voit donc que tout (x_n,k_n) est congru à un élément de la forme $(1_n,k_n)$. Ainsi les éléments de la forme $\{x_n,y_{n+1}\}$ et l'élément $(1_n,k_n)$ engendrent le groupe $C_n(F(K)\times_\tau K)$. Il reste à prouver que tous ces éléments sont linéairement indépendants. Pour chaque entier $u \geqslant 0$, considérons l'ensemble G_u des éléments que voici :

$$(1_n,k_n)$$

les $\{x_n,s_o y_n\}$ tels que $y_n \neq k_n$, long. $(x_n) \leqslant u$,

les $\{x_n,y_{n+1}\}$ tels que long. $(x_n(\tau\, y_{n+1})) = \text{long.}(x_n)+1 \leqslant u$

les $\{x_n(\tau\, y_{n+1})^{-1},y_{n+1}\}$ tels que long. $(x_n(\tau\, y_{n+1})^{-1}) = \text{long.}(x_n)+1 \leqslant u$.

Il suffit de montrer, par récurrence sur u , que ces éléments sont linéairement indépendants. Or c'est vrai pour $u = 0$, car les éléments

$$(1_n,k_n) \quad \text{et} \quad \{1_n,s_o y_n\} = (1_n,y_n) - (1_n,k_n)$$

sont linéairement indépendants. Il reste à voir que, pour $u \geqslant 1$, les éléments de $G_u - G_{u-1}$ sont linéairement indépendants modulo le sous-groupe engendré par G_{u-1} ; on doit donc prouver que les éléments suivants sont linéairement indépendants :

$(x_n,y_n) - (x_n,k_n)$ tels que $y_n \neq k_n$, long. $(x_n) = u$,

$(x_n(\tau\, y_{n+1}),d_o y_{n+1})$ tels que long. $(x_n(\tau\, y_{n+1})) = \text{long.}(x_n)+1 = u$,

$(x_n(\tau\, y_{n+1})^{-1},k_n)$ tels que long. $(x_n(\tau\, y_{n+1})^{-1} = \text{long.}(x_n)+1 = u$.

La vérification est immédiate. Le lemme est ainsi établi.

On va maintenant utiliser la base de $C_n(F(K)\times_\tau K)$ fournie par le lemme. Pour calculer avec cette base, il est commode d'observer que :

(15) $$s_i\{x_n,y_{n+1}\} = \{s_i x_n,s_{i+1}y_{n+1}\}$$

(16) $$d_i\{x_n,y_{n+1}\} = \{d_i x_n,d_{i+1}y_{n+1}\}$$

Pour montrer la nullité des $\widetilde{H}_n(F(K)\times_\tau K)$, on va définir une application linéaire S qui envoie $C_n(F(K)\times_\tau K)$ dans $C_{n+1}(F(K)\times_\tau K)$ et est telle que $dS + Sd$ soit l'identité sur tous les éléments de base, sauf sur $(1_o,k_o)$ (sur lequel $dS + Sd$ s'annule). On pose

$$S(1_n,k_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ (1_{n+1},k_{n+1}) & \text{si } n \text{ est impair. On a bien} \end{cases}$$

$$dS(1_o,k_o) + Sd(1_o,k_o) = 0 ,$$

$$dS(1_n,k_n) + Sd(1_n,k_n) = (1_n,k_n) \quad \text{pour } n \geqslant 1 .$$

On pose ensuite

$$S\left\{x_n,y_{n+1}\right\} = \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i \left\{s_i x_n, (s_o)^{i+1}(d_1)^i y_{n+1}\right\} ,$$

qui est bien nul si $y_{n+1} = k_{n+1}$. On vérifie que

$$dS\left\{x_n,y_{n+1}\right\} + Sd\left\{x_n,y_{n+1}\right\} = \left\{x_n,y_{n+1}\right\} ,$$

et S est donc bien l'opérateur d'homotopie cherché.

<u>DÉMONSTRATION</u> de $\pi_1(F(K) \times_\tau K) = 0$.- La réalisation géométrique $X = |F(K) \times_\tau K|$ est un complexe cellulaire, dont le groupe fondamental se calcule classiquement à l'aide du 2-squelette. Pour montrer que X est simplement connexe, il suffit de prouver deux choses :

1°) Toute arête est homotope à un produit d'arêtes dont chacune a l'une des formes $(s_o x_o, y_1)$ ou $(s_o x_o, y_1)^{-1}$;

2°) les arêtes de la forme $(s_o x_o, y_1)$, où y_1 n'est pas dans l'image de s_o , forment un <u>arbre</u> (maximal).

Démonstration de 1°) : le bord de la 2-cellule $(s_1 x_1 , s_o y_1)$ montre que l'arête (x_1,y_1) est homotope au produit (x_1,k_1) $(s_o d_o x_1 , y_1)$; le bord de la 2-cellule $(s_o x_1, y_2)$ montre que l'arête $(x_1, d_1 y_2)$ est homotope au produit $(s_o d_1 x_1, d_2 y_2)(x_1(\tau y_2), d_o y_2)$. A l'aide de ces deux relations, on montre par récurrence sur la longueur de x_1 que toute arête (x_1,y_1) est homotope à un produit d'arêtes (consécutives) dont chacune a la forme $(s_o x_o, z_1)$, ou $(s_o x_o, z_1)^{-1}$, ou $(1_1 , k_1)$, ou $(1_1,k_1)^{-1}$; or $(1_1,k_1) = s_o(1_o,k_o)$ est une arête ponctuelle.

Démonstration de 2°) : les deux extrémités de l'arête $(s_o x_o, y_1)$ sont

$$d_o(s_o x_o, y_1) = (x_o(\tau y_1), k_o)$$

$$d_1(s_o x_o, y_1) = (x_o, k_o) .$$

Il en résulte que deux sommets quelconques peuvent être joints <u>d'une seule</u>

manière par une suite de telles arêtes (deux arêtes consécutives étant toujours distinctes et non ponctuelles).

Ceci achève enfin la démonstration du théorème 1 .

6.- Relations entre groupes d'homotopie et groupes d'homologie.

Soit $[F_n(K),F_n(K)]$ le groupe des commutateurs du groupe libre $F_n(K)$, et soit

$$A_n(K) = F_n(K)/[F_n(K),F_n(K)]$$

le groupe $F_n(K)$ rendu abélien. Le groupe $A_n(K)$ est un groupe abélien libre. Il est clair que les homomorphismes $s_i : F_n(K) \to F_{n+1}(K)$ et d_i : $F_n(K) \to F_{n-1}(K)$ passent aux quotients ; donc la collection des $A_n(K)$ est un groupe (abélien) simplicial $A(K)$. L'application naturelle $F(K) \to A(K)$ définit des homomorphismes des groupes d'homotopie :

$$\pi_n(F(K)) \to \pi_n(A(K)) \ . \tag{17}$$

D'ailleurs, d'après la proposition 1 , les $\pi_n(A(K))$ sont naturellement isomorphes aux groupes d'homologie $H_n(A(K))$. Explicitons ces derniers : on a

$$A_n(K) = C_{n+1}(K)/s_o C_n(K) \ ,$$

et l'opérateur $d : A_n(K) \to A_{n-1}(K)$ est induit par $\sum_{0 \leqslant i \leqslant n} (-1)^{i+1} d_i$.

Ouvrons une parenthèse : si G est un groupe abélien simplicial, on a $ds_o + s_o d = s_o d_o$ sur les éléments de G_n $(n \geqslant 1)$, donc

$ds_o(s_o x) + s_o d(s_o x) = s_o x$ pour $x \in G_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$; cela prouve que le sous-groupe $s_o G$ est stable pour d , et que son homologie est nulle. Donc $H_n(G) = H_n(G/s_o G)$ pour tout n .

Dans le cas présent, on voit que $H_n(A(K)) = H_{n+1}(C(K))$, c'est-à-dire $H_{n+1}(K)$.

Finalement, on a trouvé des isomorphismes naturels

$$\pi_n(A(K)) \approx H_{n+1}(K) \qquad (n \geqslant 0) \ ,$$

et d'autre part le théorème 1 donnait des isomorphismes naturels

$$\pi_n(F(K)) \approx \pi_{n+1}(K) \qquad (n \geqslant 0) \ .$$

Observons que le fibré $F(K) \times_{\tau} K$ s'envoie naturellement dans le fibré $A(K) \times_{\tau} K$; il en résulte que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(F(K)) & \approx & \pi_{n+1}(K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_n(A(K)) & \approx & H_{n+1}(K) \end{array}$$

On pourra étudier les relations entre homotopie et homologie de K en regardant la suite exacte d'homotopie du fibré $A(K) \times_{\tau} K$:

$$\cdots \to H_{n+1}(K) \to \pi_n(A(K) \times_{\tau} K) \to \pi_n(K) \to H_n(K) \to \pi_{n-1}(A(K) \times_{\tau} K) \to \cdots$$

(comparer cette suite exacte à celle de J.H.C. Whitehead, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 36, 1950, p. 55-60).

7.- Un cas particulier : groupes d'homotopie de la suspension.

(Voir J. MILNOR, The construction FK , Lecture Notes, Princeton 1955-1956]

Soit J un ensemble simplicial ; choisissons un sommet $j_o \in J_o$ (point-base), et possons $j_n = (s_o)^n j_o$. On va définir un nouvel ensemble simplicial EJ , appelé suspension de J relative au point-base j_o . Par définition :

$(EJ)_o$ se compose d'un unique élément u_o

$(EJ)_{n+1}$ se compose des symboles $(s_o)^i Ej$, où $j \in J_{n-i}$

(i prenant toutes les valeurs entières $\geqslant 0$ et $\leqslant n$) . Dans $(EJ)_{n+1}$, on identifie $(s_o)^i Ej_{n-i}$ et Ej_n . Les opérateurs s_i et d_i sont définis comme suit :

$$\begin{cases} s_o u_o = Ej_o , \\ s_o Ej_n = Ej_{n+1} , \\ s_o((s_o)^i Ej) = (s_o)^{i+1} Ej \quad \text{pour tout } j , \\ s_{i+1}(Ej) = Es_i j , \\ d_{i+1}(Ej) = Ed_i j \quad \text{si } j \text{ est de dimension } \geqslant 1 , \\ d_o(Ej) = (s_o)^n u_o \quad \text{si } j \text{ est de dimension } n \geqslant 0 , \\ d_1(Ej) = u_o \quad \text{si } j \text{ est de dimension } 0 , \end{cases}$$

et enfin les $s_i((s_o)^k Ej)$ et les $d_i((s_o)^k Ej)$, pour $k \geqslant 1$, se calculent à partir des relations (1) et des formules précédentes.

On vérifie que EJ est bien un ensemble simplicial.

Il est facile de voir que la réalisation géométrique $|EJ|$ n'est pas autre chose que la suspension (réduite) de l'espace $|J|$. Cela justifie les définitions précédentes.

Faisons la construction de Kan $F(K)$ sur l'ensemble simplicial $K = EJ$. On interprète aussitôt $F_n(EJ)$: il s'identifie au groupe libre engendré par les éléments de J_n et leurs inverses formels, la seule relation imposée étant $j_n = 1_n$. Si on explicite les d_i et les s_i de $F(EJ)$, par les formules (9), on trouve que, sur les générateurs de $F_n(EJ)$, d_i et s_i sont les mêmes que dans J_n.

On notera $L(J)$ le groupe libre simplicial ainsi déduit d'un ensemble simplicial J (avec point-base choisi j_o).

Le groupe $L(J)$ rendu abélien n'est autre que $\tilde{C}(J)$ (notations du paragraphe 2). On a

$$\pi_n(\tilde{C}(J)) \approx \tilde{H}_n(J) \quad \text{d'après} \quad (5) .$$

Compte tenu des résultats du paragraphe 6, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\pi_n(L(J)) & \approx & \pi_{n+1}(EJ) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\pi_n(\tilde{C}(J)) & \approx & H_{n+1}(EJ) \\
\wr\wr & & \wr\wr \\
\tilde{H}_n(J) & \longleftrightarrow & \tilde{H}_n(J)
\end{array}$$

On notera que $L(J)$ joue le rôle d'un "reduced product space" (d'un espace X avec point-base ; cf. I.M. JAMES, Ann. of Math. 62, 1955, p. 170-197) ; le "reduced product space" de X a, on le sait, le même type d'homotopie que l'espace des lacets de la suspension de X ; c'est ce que met en évidence ici l'isomorphisme $\pi_n(L(J)) \approx \pi_{n+1}(EJ)$. Quant à $\tilde{C}(J)$, on sait déjà qu'il joue le rôle de la puissance symétrique ("reduced product space" rendu abélien) La réalisation géométrique $|L(J)|$ est un "reduced product space" qui possède une structure de groupe.

L'injection $J \to L(J)$ correspond au plongement canonique d'un espace X dans l'espace des lacets de la suspension de X. Cette injection définit un homomorphisme

$$\pi_n(J) \to \pi_n(L(J)) \approx \pi_{n+1}(EJ)$$

qui n'est autre chose que la <u>suspension des groupes d'homotopie</u>.

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(J) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(EJ) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{H}_n(J) & \approx & H_{n+1}(EJ) \end{array}$$

8.- <u>A nouveau les relations entre groupes d'homotopie et groupes d'homologie</u>.

On signale ici des résultats encore inédits de Kan. On a vu (paragraphe 6) que les relations entre les $\pi_n(K)$ et les $H_n(K)$ s'obtiennent en comparant les groupes d'homotopie du groupe libre simplicial $F(K)$ et ceux du groupe abélien libre simplicial $A(K)$ (à savoir $F(K)$ rendu abélien). Ceci suggère d'étudier, en général, la situation suivante :

Soit F un <u>groupe libre simplicial</u> (sans aucune hypothèse sur la nature particulière des opérateurs s_i et d_i). Soit $A = F/[F,F]$ le groupe abélien libre simplicial qui lui correspond. On a des homomorphismes

$$\pi_n(F) \longrightarrow \pi_n(A) \simeq H_n(A) .$$

D. KAN démontre les deux théorèmes suivants :

<u>THÉORÈME 2.-</u> $\pi_0(F) \longrightarrow \pi_0(A)$ <u>est un épimorphisme, dont le noyau est le groupe des commutateurs de</u> $\pi_0(F)$.

<u>THÉORÈME 3.- Si</u> $\pi_i(F) = 0$ <u>pour</u> $i < n$ $(n \geqslant 1)$, <u>alors</u> $\pi_n(F) \longrightarrow \pi_n(A)$ <u>est un isomorphisme, et</u> $\pi_{n+1}(F) \longrightarrow \pi_{n+1}(A)$ <u>est un épimorphisme</u>.

(Ceci généralise des résultats classiques, connus pour les groupes d'homotopie et d'homologie d'un espace).