C. CHEVALLEY

Erratum à l'exposé 6

Séminaire Henri Cartan, tome 8 (1955-1956), p. 1
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A8_0>

Séminaire E.N.S., 1955/56
(H. CARTAN et C. CHEVALLEY)

MORPHISMES ET ENSEMBLES CONSTRUCTIBLES (Suite)

(Exposé de H. CARTAN, le 16.1.1956)

ERRATUM à l'Exposé 6.

Page 6-03, la démonstration du lemme 4 doit être modifiée comme suit :

Il suffit de le prouver quand S est le schéma d'une algèbre affine $A = K[x_i]$. On doit montrer que, pour toute algèbre affine $B \subset L$, de schéma T, $U \cap T$ est ouvert dans T. Si $\underline{p}$ est un idéal premier de l'algèbre B, la condition $B_{\underline{p}} \in U$ équivaut à $B_{\underline{p}} \supset A$ (lemme 1), ce qui signifie que $x_i \in B_{\underline{p}}$ pour tout i. Soit $\underline{b}_i$ l'idéal des $y \in B$ tels que $yx_i \in B$; la relation $x_i \in B_{\underline{p}}$ équivaut à $\underline{p} \not\supset \underline{b}_i$, donc l'ensemble U_i des $B_{\underline{p}}$ tels que $x_i \in B_{\underline{p}}$ est ouvert dans T ; comme $U \cap T$ est l'intersection des U_i, $U \cap T$ est ouvert

---

1.- Morphismes d'un schéma complet.

Théorème 1.- Soit un morphisme (f, φ) d'un schéma S dans un schéma S'. Si S est complet, l'image, par f, de tout fermé de S est un fermé de S'.

Démonstration : compte tenu des propositions 1 et 5 de l'Exposé 6, tout revient à montrer que l'ensemble $\mathcal{S}(P)$ des spécialisations d'un $P \in S$ a pour image un fermé de S'. Soit T le schéma induit par S sur $\mathcal{S}(P)$ (Exposé 6, paragraphe 6) ; on cherche l'image du morphisme composé $T \longrightarrow S \xrightarrow{f} S'$. Or T est complet (Exposé 6, Théorème 3) ; écrivant de nouveau S au lieu de T, on est ramené à prouver ceci : si S est complet, l'image $f(S)$ est un fermé de S'. Eu égard à la décomposition canonique d'un morphisme (Exposé 7), il suffit de faire la démonstration quand $f : S \longrightarrow S'$ est une application de domination (S et S' étant des schémas d'un même corps, par exemple le corps des fractions F de S). Soit $M' \in S'$; il existe un anneau de valuation V de F qui domine M' (Exposé 1, paragraphe 4) ; puisque S est complet, V domine un $M \in S$ (Exposé 5, proposition 6), donc domine $f(M)$. Les localités M' et $f(M)$ du schéma S' sont donc apparentées, et par suite $M' = f(M)$, ce qui montre que tout $M' \in S'$ est dans l'image de f.

Remarque : dans la fin de cette démonstration, on a seulement utilisé le fait que S est complet au-dessus de M' (Exposé 6, paragraphe 7). Ceci va permettre une extension du théorème 1, à condition d'avoir prouvé un lemme (qui aurait pu trouver place dans l'Exposé 6, assertion 4) du théorème 3) :

Lemme 1.- *Soient* $f : S \longrightarrow S'$ *un morphisme de domination,* $P \in S$, $P' = f(P)$, T *et* T' *les schémas induits respectivement par* S *et* S' *sur* $\gamma(P)$ *et* $\gamma'(P')$, *et soit* $g : T \longrightarrow T'$ le morphisme de domination induit *par* f . *Si* S *est complet au-dessus de* S' , *alors* T *est complet au-dessus de* T' .

Démonstration : notons E l'ensemble $\gamma(P)$, E' l'ensemble $\gamma(P')$. Soit W un anneau de valuation (du corps des fractions F de S) qui domine P , et soit $\theta : W \longrightarrow W/\underline{r}(W)$ l'homomorphisme canonique ; θ plonge les corps $P'/\underline{r}(P')$ et $P/\underline{r}(P)$ des schémas T et T' dans le corps $\bar{W} = W/\underline{r}(W)$; de plus, θ applique biunivoquement E' , resp. E , sur les schémas induits T' , resp. T . On veut montrer que si un anneau de valuation $\bar{V}$ du corps $\bar{W}$ domine une localité $\bar{M}' \in T'$, il domine au moins une localité de T . Soit V l'image réciproque de $\bar{V}$ pour l'application $\theta : W \longrightarrow \bar{W}$. On sait (Exposé 6, lemme 6) que V est un anneau de valuation de F . D'autre part, V domine la localité $M' \in S'$ telle que $\theta(M') = \bar{M}'$, car $M' \subset \theta^{-1}(\bar{M}') \subset \theta^{-1}(\bar{V}) = V$, et $\underline{r}(M') \subset \theta^{-1}(\underline{r}(\bar{M}')) \subset \theta^{-1}(\underline{r}(\bar{V})) = \underline{r}(V)$. Puisque S est complet au-dessus de S' par hypothèse, V domine une localité $M \in S$; et on a $f(M) = M'$. On a $\underline{r}(W) \subset V$, donc $M \cap \underline{r}(W)$ est un idéal premier $\underline{p}$ de M , et W domine $M_{\underline{p}}$, qui est donc apparentée à P , d'où $P = M_{\underline{p}}$. Ainsi M est une spécialisation de P , autrement dit $M \in E$; soit $\bar{M} = \theta(M) \in T$; il est immédiat que $\bar{V}$ domine $\bar{M}$, ce qui achève la démonstration.

Le théorème 1 peut maintenant être précisé :

Théorème 1 bis.- *Soit* $f : S \longrightarrow S'$ *un morphisme de domination. Si le schéma* S *est complet au-dessus de* S' , *l'image par* f *de tout fermé de* S *est un fermé de* S' .

En effet, il suffit de le montrer pour un fermé de S de la forme $\gamma(P)$; soit $P' = f(P)$. En passant aux schémas induits T et T' , on est ramené à montrer que l'image de T est un fermé de T' ; il suffit de refaire la démonstration du théorème 1 , compte tenu du fait que T est complet au-dessus de T' (lemme 1 ci-dessus).

2.- Inégalités relatives aux dimensions des localités.

Si M est un anneau local, on notera $\dim M$ la *dimension* de M , c'est-à-dire le degré de transcendance (sur le corps de base K) du corps des restes $M/\underline{r}(M)$. Cette notation s'applique aussi dans le cas où M est un surcorps de K .

Si F et F' sont deux surcorps de K tels que $F' \subset F$, on notera $\dim_{F'} F$ le degré de transcendance de F sur F' ; c'est égal à $\dim F - \dim F'$.

Théorème 2.- *Soit* $f : S \longrightarrow S'$ *un morphisme de domination ; soient* F *et* F' *les corps de fractions de* S *et* S', *et soit* $e = \dim_{F'} F$ *la différence des dimensions de* S *et de* S'. *Pour tout entier* $h \geqslant 0$, *soit* E_h *l'ensemble des* $M \in S$ *jouissant de la propriété suivante :* M *est spécialisation d'un* $P \in S$ *tel que*

$$(1) \qquad f(P) = f(M) , \quad \dim P \geqslant \dim f(M) + h .$$

Alors l'ensemble E_h *est fermé ; si* $h \leqslant e$, *on a* $E_h = S$; *si* $h > e$, E_h *n'est pas dense dans* S.

Démonstration : montrons d'abord que $E_e = S$; autrement dit, tout $M \in S$ est spécialisation d'un $P \in S$ tel que $f(P) = f(M)$, $\dim P \geqslant \dim f(M) + e$. En effet : soit $M' = f(M)$, et soit h' la hauteur de M' (Exposé 5, paragraphe 1) ; d'après la proposition 3 de l'Exposé 5, il existe h' éléments u_i de $\underline{r}(M')$ tels que $\underline{r}(M')$ soit l'unique idéal premier de M' contenant les u_i (un tel système d'éléments u_i, en nombre égal à la hauteur de M', s'appelle un "système de paramètres" de M'). Puisque M domine M', les u_i sont dans $\underline{r}(M)$; soit $\underline{p}$ un idéal premier de M, minimal dans l'ensemble des idéaux premiers contenant les u_i ; $M_{\underline{p}}$ domine M', car $\underline{p}M_{\underline{p}} \cap M'$ est un idéal premier de M' contenant les u_i, donc c'est $\underline{r}(M')$. De plus les u_i engendrent un idéal primaire de $M_{\underline{p}}$, donc (Exposé 5, proposition 3) la hauteur de $M_{\underline{p}}$ est au plus égale à h', c'est-à-dire

$$\dim F - \dim M_{\underline{p}} \leqslant \dim F' - \dim M' , \text{ ou encore}$$

$$\dim M_{\underline{p}} \geqslant \dim f(M) + e .$$

Ainsi $P = M_{\underline{p}}$ répond à la question.

Montrons maintenant que si $h > e$, l'ensemble E_h n'est pas dense dans S ; autrement dit, on va prouver l'existence d'un ouvert non vide $U \subset S$ qui ne rencontre pas E_h. Or pour qu'un ouvert U ne rencontre pas E_h, il suffit et il faut qu'il jouisse de la propriété suivante : *pour tout* $M \in U$, *on a* $\dim M \leqslant \dim f(M) + e$. En effet, s'il en est ainsi, et si M est spécialisation d'un $P \in S$, alors $P \in U$, puisque U est ouvert, donc si $f(P) = f(M)$, on a $\dim P \leqslant \dim f(M) + e$; et ceci montre que U ne rencontre pas E_h pour $h > e$.

Nous sommes donc amenés à prouver le :

Lemme 2.- *Il existe un ouvert non vide* $U \subset S$ *tel que, pour tout* $M \in U$, *on ait* $\dim M \leqslant \dim f(M) + e$.

Il suffit évidemment de faire la démonstration quand S et S' sont des schémas affines, d'algèbres A et A' ; alors A' s'identifie à une sous-algèbre de A . Rappelons que l'application $f : S \longrightarrow S'$ est alors définie par la loi qui, à chaque idéal premier $\underline{p}$ de A , associe $\underline{p}' = A' \cap \underline{p}$. De plus, F est le corps des fractions de A , et F' le corps des fractions de A' . Puisque $\dim_{F'} F = e$, il existe e éléments $x_1 , \ldots , x_e \in A$, algébriquement indépendants sur A' , tels que F soit algébrique sur le corps des fractions de l'algèbre affine $A_1 = A'[x_1 , \ldots , x_e]$. Soit S_1 le schéma de A_1 ; les inclusions $A' \subset A_1 \subset A$ définissent des applications de domination

$$f_1 : S \longrightarrow S_1 \quad , \quad f' : S_1 \longrightarrow S'$$

dont $f : S \longrightarrow S'$ est composée. Pour tout $M_1 \in S_1$, on a

$$\dim M_1 \leq \dim f'(M_1) + e \quad , \tag{2}$$

car $\dim M_1$ est le degré de transcendance du corps des fractions de $A_1/\underline{p}_1$ et $\dim f'(M_1)$ celui du corps des fractions de $A'/\underline{p}'$, en notant $\underline{p}_1$ un idéal de A_1 et $\underline{p}' = A' \cap \underline{p}_1$; comme $A_1/\underline{p}_1$ est engendré par $A'/\underline{p}'$ et par les images des e éléments x_i , ceci établit (2).

Quant à l'algèbre A , elle est engendrée sur A_1 par des éléments z_i algébriques sur A_1 ; il existe $y_1 \in A_1$ $(y_1 \neq 0)$ tel que les $y_1 z_i$ soient <u>entiers</u> sur A_1 . Si un idéal premier $\underline{p}_1$ de A_1 ne contient pas y_1 , la localité $(A_1)_{\underline{p}_1} = M_1$ est telle que les éléments de A sont entiers sur M_1 . Soit U_1 l'ouvert non vide de S_1 formé des $M_1 = (A_1)_{\underline{p}_1}$ tels que $y_1 \notin \underline{p}_1$, et soit $U = (f_1)^{-1}(U_1)$. Si $M \in U$, et $f_1(M) = M_1$, on a $\dim M = \dim M_1$, car si $M = A_{\underline{p}}$, on a $\underline{p}_1 = A_1 \cap \underline{p}$, et le corps des fractions de $A/\underline{p}$ est algébrique sur le corps $M_1/\underline{r}(M_1)$. Ce résultat, joint à (2) , établit le lemme.

Achevons maintenant la démonstration du théorème 2. Il reste à montrer que l'ensemble E_h est <u>fermé</u> dans S . On procède par récurrence sur la dimension n du schéma S , l'assertion étant triviale pour $n = 0$. Si $h \leq e$, E_h est fermé, puisque $E_h = S$; si $h > e$, l'adhérence $\bar{E}_h$ est $\neq S$; en passant au schéma induit par S sur chaque composante irréductible de $\bar{E}_h$, et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on trouve $E_h = \bar{E}_h$; ceci achève la démonstration.

<u>Théorème 3</u>.- <u>Soit</u> $f : S \longrightarrow S'$ <u>un morphisme de domination, et soit toujours</u> $e = \dim_{F'} F$. <u>Pour tout entier</u> $h \geq 0$, <u>soit</u> C'_h <u>l'ensemble des</u> $M' \in S'$ <u>tels qu'il existe un</u> $M \in S$ <u>satisfaisant à</u>

$$f(M) = M' \ , \ \dim M \geq \dim M' + h \ . \tag{3}$$

Alors l'ensemble C'_h est constructible ; si $h \leq e$, on a $C'_h = f(S')$, et C'_h est donc dense dans S ; si $h > e$, C'_h n'est pas dense dans S'.

Démonstration : il est clair que $C'_h = f(E_h)$. Puisque E_h est fermé, son image C'_h est constructible. Si $h \leq e$, on a $E_h = S$, donc $C'_h = f(S)$ contient un ouvert non vide (Exposé 7, théorème 3). Si $h > e$, C'_h ne contient pas la localité F', puisque S ne possède pas de localité de dimension $>$ $> \dim F' + e = \dim F$. Alors l'adhérence de C'_h ne contient pas non plus F', puisque l'adhérence d'un ensemble constructible se compose de spécialisations de localités *de cet ensemble* (Exposé 7, paragraphe 4). Ceci achève la démonstration.

Corollaire : *soit* $f : S \longrightarrow S'$ *un morphisme de domination, et soit* $e = \dim_{F'} F$. *Il existe un ouvert non vide* $U' \subset S'$ *jouissant de la propriété suivante : pour tout* $M \in S$ *tel que* $f(M) \in U'$, *on a*

$$\dim M \leq \dim f(M) + e \quad .$$

Définition : dans la situation précédente, on dit qu'une localité $M' \in S'$ est *fondamentale* (pour l'application de domination f) si M' n'est dominé par aucune localité de S, *ou* s'il existe une $M \in S$ qui domine M' et satisfait à $\dim M > \dim M' + e$.

L'ensemble des localités fondamentales est donc la réunion de deux ensembles, dont chacun est constructible et n'est pas dense dans S'. Ainsi l'*ensemble des localités fondamentales est un ensemble constructible de* S', *qui n'est pas dense dans* S'.

3.- Domination et spécialisation.

Soit f un morphisme de domination d'un schéma S dans un schéma S' ; soient M une localité de S et $M' = f(M)$. Si N' est une localité de S' admettant M' comme spécialisation, il n'y a en général pas de localité N de S admettant M comme spécialisation et telle que $f(N) = N'$. On a cependant le résultat suivant :

Théorème 4.- Soit f *un morphisme de domination d'un schéma* S *dans un schéma* S'. *Il y a une partie ouverte non vide* U *de* S *qui possède la propriété suivante : si* $M \in U$ *et si* N' *est une localité de* S' *dont* $f(M)$ *est une spécialisation, il y a une localité* $N \in U$ *telle que* $f(N) = N'$ *et que* M *soit spécialisation de* N.

Remplaçant S' par un schéma affine S'_1 qui y est contenu et S par $f^{-1}(S'_1)$, on se ramène immédiatement au cas où S' est affine ; remplaçant alors

S par un schéma affine qui y est contenu, on se ramène au cas où S et S' sont tous deux affines : soient A et A' leurs algèbres, F et F' leurs corps des fractions. Soient $x_1, \ldots, x_e$ des éléments de A qui forment une base de transcendance de F par rapport à F', et soit S_1 le schéma affine d'algèbre $A'[x_1, \ldots, x_e]$. Si $\underline{m}'$ est un idéal premier de A', et R' le corps des fractions de $A'/\underline{m}'$, l'homomorphisme canonique de A' dans R' se prolonge en un homomorphisme θ de $A'[x_1, \ldots, x_e]$ dans un sur-corps de R' tel que $\theta(x_1), \ldots, \theta(x_e)$ soient algébriquement indépendants sur R'. Le noyau $\bar{\underline{m}}'$ de cet homomorphisme se compose de tous les éléments qui peuvent s'écrire comme polynomes en $x_1, \ldots, x_e$ à coefficients dans $\underline{m}'$; il est contenu dans tout idéal $\underline{m}_1$ de $A'[x_1, \ldots, x_e]$ tel que $\underline{m}_1 \cap A = \underline{m}'$. Si $\underline{n}'$ est un idéal premier de A' contenu dans $\underline{m}'$, l'idéal $\bar{\underline{n}}'$ est contenu dans $\bar{\underline{m}}'$. Il en résulte que, si M_1 est une localité quelconque de S_1 et N' une localité de S' admettant $f(M_1) = M'$ comme spécialisation, il y a une localité $\bar{N}_1$ de S_1 telle que $f(\bar{N}_1) = N'$ qui admet M_1 comme spécialisation. Ceci montre qu'on peut se ramener, pour démontrer le théorème 4, au cas où le corps des fractions de A' est algébrique sur celui de A. Supposons qu'il en soit ainsi ; soient $z_1, \ldots, z_s$ des éléments de A tels que $A' = A[z_1, \ldots, z_s]$, et soit y un élément $\neq 0$ de A' tel que les $y\, z_i$ soient entiers sur A'. Soit par ailleurs S'^* le schéma dérivé de S' dans son corps des fractions F' ; l'ensemble $S' \cap S'^*$ n'est pas vide, puisqu'il contient F' ; c'est de plus une partie ouverte de S' (exposé 6, théorème 1). L'ensemble U' des anneaux locaux des idéaux premiers $\underline{p}'$ de A' tels que $y \notin \underline{p}'$ et que $A'_{\underline{p}'}$ soit normal est donc une partie ouverte non vide de S' ; soit $U = f^{-1}(U')$. Soit M une localité appartenant à U ; c'est l'anneau local d'un idéal premier $\underline{m}$ de A ; si $\underline{m}' = A' \cap \underline{m}$, $f(M) = M'$ est $A'_{\underline{m}'}$; c'est un anneau normal, et, puisque $y \notin \underline{m}'$, $M'[A]$ est entier sur M'. Si $\underline{q} = \underline{r}(M') \cap M'[A]$, on a $M = (M'[A])_{\underline{q}}$. Soit N' une localité de S' admettant M' comme spécialisation ; on a $N' = M'_{\underline{n}'}$, où $\underline{n}'$ est un idéal premier de M'. Puisque M' est normal et $M'[A]$ entier sur M', il y a un idéal premier $\underline{r}$ de $M'[A]$ contenu dans $\underline{q}$ et tel que $\underline{r} \cap M' = \underline{n}'$ (exposé 1, théorème 4) ; si N est l'anneau local de $\underline{r}$, N est l'anneau local de l'idéal engendré par $\underline{r}$ dans M, de sorte que M est une spécialisation de N ; de plus, $\underline{r}(N) \cap M' = \underline{r}(N) \cap M'[A] \cap M' = \underline{r} \cap M' = n'$ d'où il résulte que $f(N) = N'$.

Remarque : La démonstration montre que, si le corps des fractions de S' est algébrique sur celui de S, on peut prendre pour U un ensemble de la forme

$\bar{f}^1(U')$, où U' est une partie ouverte de S'. Il en est encore ainsi dans le cas général, comme on le voit par récurrence sur la dimension de S de la manière suivante. Supposons l'assertion établie pour les schémas de dimensions $< \dim S$. L'ensemble U ayant les propriétés énoncées dans le théorème, son complémentaire est la réunion d'un nombre fini d'ensembles fermés irréductibles E_i qui sont porteurs de structures de schémas induits de dimensions $< \dim S$. Si $f(E_i)$ n'est pas dense dans S', soit U'_i une partie ouverte non vide de S' ne le rencontrant pas. Dans le cas contraire, il existe en vertu de l'hypothèse de récurrence une partie ouverte non vide U'_i de S' qui possède la propriété suivante : si $M \in E_i$, $f(M) \in U'_i$, et si $f(M)$ est spécialisation d'une localité N' de S' (donc de U'_i), il y a une localité $N \in E_i$ telle que $f(N) = N'$ et que M soit spécialisation de N. Si U' est l'intersection des U'_i, l'ensemble $\bar{f}^1(U')$ possède les propriétés requises.