C. Chevalley

H. Cartan

Schémas normaux ; morphismes ; ensembles constructibles

Séminaire Henri Cartan, tome 8 (1955-1956), exp. nº 7, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A7_0>

Séminaire E.N.S., 1955/56
(H. CARTAN et C. CHEVALLEY)

SCHÉMAS NORMAUX ; MORPHISMES ; ENSEMBLES CONSTRUCTIBLES.

(Exposé de C. CHEVALLEY et H. CARTAN, 9.1.1956).

1.- Schémas normaux.

On dit qu'un schéma S est normal si les localités de S sont toutes normales (i.e. intégralement closes).

Proposition 1.- Pour qu'un schéma affine S d'algèbre A soit normal, il faut et suffit que A soit normale.

Si S est normal, l'anneau A, intersection d'anneaux normaux, est normal. Si A est normal, on sait qu'il en est de même des anneaux locaux de ses idéaux premiers (Exposé 1, proposition 5).

Théorème 1.- Soient S un schéma de L, F son corps des fractions, et F' un sous-corps de L contenant F et algébrique sur F. Il existe alors un schéma S' de L et un seul jouissant des propriétés suivantes :

a) S' est normal, domine S et son corps des fractions est F' ;

b) tout schéma normal de L qui domine S et dont le corps des fractions contient F', domine S'.

De plus, ce schéma S' jouit des propriétés suivantes :

1) si S est un schéma affine d'algèbre A, alors S' est le schéma affine dont l'algèbre A' est le dérivé de A dans F' ;

2) toute localité normale dont le corps des fractions contient F' et qui domine une localité de S, domine une localité de S' ; en particulier, S' est complet au-dessus de S (cf. Exposé 6, paragraphe 7) ;

3) si S est complet, S' est complet.

Démonstration : puisque L est de type fini sur F par hypothèse, F' est une extension algébrique de degré fini de F (Exposé 6, lemme 5). Représentons S comme réunion finie de schémas affines S_i d'algèbres A_i. L'anneau dérivé A_i' de A_i dans F' est une algèbre affine (Exposé 4, théorème 1). Soit S_i' le schéma affine d'algèbre A_i', et soit S' la réunion des S_i'. Montrons que S' jouit de la propriété 2) de l'énoncé : soit N une localité normale de L dont le corps des fractions contient F', et qui domine une localité M de S ; on a $M \in S_i$ pour un i, donc $A_i \subset N$, d'où $A_i' \subset N$, et N domine une localité de S_i', ce qui prouve 2). Par ailleurs, S_i' domine S_i (Exposé 6, proposition 11) ; donc toute localité de S' domine une localité de S . Montrons que S' est un schéma : soient N_1 et N_2 deux localités apparentées de S' ; les localités de S dominées par N_1 et N_2 sont apparentées, donc identiques à une même localité M . Supposons que $N_1 \in S'_i$, $N_2 \in S'_j$; alors $M \in S_i \cap S_j$, et le raisonnement ci-dessus montre que N_2 domine une localité de S'_i , laquelle est apparentée à N_1 , donc lui est identique. Ainsi N_2 domine N_1 ; pour la même raison, N_1 domine N_2 , et par suite $N_1 = N_2$.

Ainsi S' est un schéma qui possède les propriétés a) et b) ; la propriété b) résulte de 2). Si S'' est un schéma possédant les mêmes propriétés a) et b), alors S' et S'' se dominent mutuellement, donc sont identiques.

L'existence et l'unicité de S' ont donc été prouvées. La propriété 1) résulte alors de la construction de S' faite ci-dessus. Quant à 3), c'est une conséquence immédiate de 2).

<u>Définition</u> : les notations étant celles du théorème 1, S' est appelé le <u>schéma dérivé de</u> S <u>dans</u> F' ; si $F' = F$, S' est appelé le <u>schéma dérivé normal</u> de S .

<u>Théorème 2.- Soient</u> S <u>un schéma de</u> L , F <u>son corps des fractions</u>, F' <u>un sous-corps de</u> L <u>contenant</u> F <u>et algébrique sur</u> F . <u>Soit</u> S' <u>le schéma dérivé de</u> S <u>dans</u> F' , <u>et soit</u> $f : S' \longrightarrow S$ <u>l'application de domination</u>. <u>Alors</u> :

1) <u>si</u> $M \in S$, $f^{-1}(M)$ <u>est fini et non vide, et se compose des anneaux locaux des idéaux premiers maximaux de l'anneau dérivé</u> (i.e: <u>fermeture intégrale</u>) <u>de</u> M <u>dans</u> F' ;

2) <u>si</u> S <u>est projectif, il en est de même de</u> S' .

<u>Démonstration</u> : Soit $M = (A_i)_{\underline{m}}$ une localité de S_i , $\underline{m}$ étant un idéal premier de A_i . L'anneau dérivé M^* de M dans F' est $(A'_i)_C$, où $C = A_i - \underline{m}$ (exposé 1, proposition 5). Si $\underline{m}^*$ est un idéal premier de M^* , $\underline{m}^* \cap M$ est contenu dans $\underline{r}(M)$, donc $\underline{m}^*$ est contenu dans un idéal premier de M^* qui contient $\underline{r}(M)$ (Exposé 1, théorème 3) ; il en résulte que tout idéal premier maximal de M^* contient $\underline{r}(M)$. Réciproquement, si $\underline{m}^* \supset \underline{r}(M)$, $M^*/\underline{m}^*$ est entier sur le corps $M/\underline{r}(M)$, donc est un corps, et $\underline{m}^*$ est premier maximal. Les anneaux locaux des idéaux premiers maximaux de M^* , qui appartiennent à S' puisque $M^* = (A'_i)_C$, dominent M . Si $N \in S'$ domine M , le fait que $M \in S_i$ montre que N domine une localité de S'_i , donc appartient à S'_i ; c'est l'anneau local d'un idéal premier de A'_i , et on a $A'_i \subset A_{\underline{m}}[A'_i] = M^* \subset N$, d'où il résulte

que N est anneau local d'un idéal premier de M^* qui, contenant $\underline{r}(M)$, est maximal. Il résulte déjà de ceci que $\overset{-1}{f}(M) \neq \emptyset$. Soit $\underline{a}$ l'idéal engendré par $\underline{r}(M)$ dans M^* ; il est impossible que deux idéaux premiers distincts de M^* contenant $\underline{a}$ soient contenus l'un dans l'autre, puisque ces idéaux sont premiers maximaux ; comme l'ensemble des idéaux premiers contenant $\underline{a}$ n'a qu'un nombre fini d'éléments minimaux, M^* n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers maximaux, et $\overset{-1}{f}(M)$ est fini.

Supposons maintenant que S soit un schéma projectif, défini par un sous-espace vectoriel H de L de dimension finie. Soit $L(t)$ une extension transcendante pure de L ; introduisons le sous-anneau B de $L(t)$ engendré par Ht ; si $n > 0$, soit H_n l'espace vectoriel engendré par les produits de n éléments de H ; B se compose alors des éléments $\sum_j y_j t^j$, où $y_j \in H_j$ pour tout j. Soit A_n^* l'ensemble des éléments z de F' tels que zt^n soit entier sur B ; A_n^* contient donc H_n ; il est clair que A_n^* est un groupe additif et que le produit d'un élément de A_m^* par un élément A_n^* est dans A_{m+n}^*. L'ensemble $B^* = \sum_{n \geqslant 0} A_n^* t^n$ est un B-module contenu dans l'anneau dérivé de B dans $F'(t)$. Or, F' est une extension de degré fini de F (exposé 5, lemme 1) ; $F'(t)$ est donc de degré fini sur $F(t)$; par ailleurs, on a $K(H) = F$, et il est clair que B est une algèbre affine dont le corps des fractions est $F(t)$; on en conclut que l'anneau dérivé de B dans $F'(t)$ est un B-module noethérien, donc qu'il en est de même de B^* ; soit $B^* = \sum_{j=1}^{s} B(z_j t^{d_j})$, avec $z_j \in A_{d_j}^*$, et soit d le plus grand des d_j. Nous poserons $H^* = A_d^*$; nous allons montrer que, pour tout $k \geqslant 0$, A_{dk}^* se compose des éléments de la forme $F(w_1, \ldots, w_\nu)$, où F est une forme de degré k et où les w_i sont dans H^*. Soit $z \in A_{dk}^*$, $zt^{dk} = \sum_{j=1}^{s} b_j z_j t^{d_j}$, $b_j \in B$. On peut manifestement supposer que b_j est le produit d'un élément y_j de F par t^{dk-d_j}, et y_j appartient alors à H_{dk-d_j} (on convient que $H_n = \{0\}$ si $n < 0$). Il suffira donc de montrer que, si $y'_1, \ldots, y'_{dk-d_j}$ sont dans H, $y'_1 \ldots y'_{dk-d_j} z_j$ se représente comme polynome homogène de degré k en des éléments de H^*. Or $y'_1 \ldots y'_{d(k-1)}$ se représente comme produit de $k-1$ éléments de H^* et $y'_{d(k-1)+1} \ldots y'_{dk-d_j} z_j$ appartient à H^*, ce qui établit notre assertion. Il en résulte en particulier que H^* est de dimension finie ; il définit un schéma projectif S^*, dont nous allons montrer qu'il est identique à S'. Comme S est projectif, il est complet ; S' est donc complet, et il suffira de montrer que $S' \subset S^*$ (Exposé 5, proposition 8).

Soit y un élément $\neq 0$ de H ; nous allons montrer que $K[y^{-d}H^*]$ est l'anneau dérivé de $K[y^{-1}H]$ dans F' ; il en résultera bien que $S' \subset S^*$. Il est clair que $K[y^{-1}H] \subset K[y^{-d}H^*]$. Soit z un élément de F' entier sur $K[y^{-1}H]$; il satisfait à une équation de la forme $z^e + y^{-m_1}y_1 z^{e-1} + \ldots + y^{-m_e}y_e = 0$, où $y_i \in H_{m_i}$; il est clair que l'on peut supposer tous les m_i égaux à un même nombre de la forme md, m étant un entier > 0 convenable. On a

$$(zy^{md}t^{md})^e + y_1 t^{md}(zy^{md}t^{md})^{e-1} + \ldots + y_e y^{md(e-1)}t^{mde} = 0 ,$$

et les $y_j y^{md(j-1)}t^{mdj}$ sont dans B ; il en résulte immédiatement que zy^{md} est dans A^*_{md}, donc se met sous la forme d'un polynome homogène de degré m en des éléments de H^* ; on en conclut que $z \in K[y^{-d}H^*]$. Pour montrer que, réciproquement, $K[y^{-d}H^*]$ est entier sur $K[y^{-1}H]$, il suffira de montrer que, si $z \in A^*_{md}$, $y^{-md}z$ est entier sur $K[y^{-1}H]$. Or, zt^{md} satisfait à une équation $(zt^{md})^e + b_1(zt^{md})^{e-1} + \ldots + b_e = 0$, où les b_i sont dans B. On peut manifestement supposer b_i de la forme $y_i t^{imd}$, $y_i \in F$, et y_i est alors dans H_{imd}, de sorte que $y^{-imd}y_i \in K[y^{-1}H]$, d'où il résulte aussitôt que $y^{-md}z$ est entier sur $K[y^{-1}H]$. Le théorème 2 est donc établi.

2.- <u>Morphismes de schémas</u>.

Soient S et S' deux schémas relatifs au même corps K (supposé donné une fois pour toutes). On ne suppose pas S et S' plongés dans un même corps. On notera F (resp. F') l'unique localité de S (resp. S') qui est un <u>corps</u> (Exposé 6, paragraphe 4) ; c'est le "corps des fractions" du schéma.

Un <u>morphisme de</u> S <u>dans</u> S' est défini par la donnée :

1) d'une application continue $f : S \longrightarrow S'$ (f associe donc à chaque localité de S une localité de S' ; dire que f est continue, c'est dire que f respecte la relation d'inclusion entre localités, ou, ce qui revient au même, la relation de spécialisation) ;

2) d'un homomorphisme d'anneaux $\varphi : f(F) \longrightarrow F$. (Observer que chaque localité $f(M)$, pour $M \in S$, est une spécialisation de $f(F)$).

On pose l'axiome suivant : <u>pour chaque</u> $M \in S$, φ <u>applique le sous-anneau</u> $f(M)$ <u>de</u> $f(F)$ <u>dans le sous-anneau</u> M <u>de</u> F, <u>et applique l'idéal maximal</u>

$\underline{r}(f(M))$ *dans l'idéal maximal* $\underline{r}(M)$. Il en résulte que $f(M) \cap \varphi^{-1}(\underline{r}(M)) = \underline{r}(f(M))$.

On définit de manière évidente le composé de deux morphismes ; il est clair que *le composé de deux morphismes est un morphisme*. De plus, si on a un morphisme (f , φ) de S dans S' et un morphisme (f' , φ') de S' dans S , tels qu'en les composant on trouve le morphisme identique de S et le morphisme identique de S' , alors (f , φ) est un *isomorphisme* de S sur S' , et (f' , φ') est l'isomorphisme réciproque.

Premier exemple de morphismes : soient S et S' deux schémas d'un même corps L , et supposons que S domine S' (Exposé 6, paragraphe 7). Soit $f : S \longrightarrow S'$ l'application de domination, qui est continue (Exposé 6, proposition 10) ; $f(F)$ est le corps des fractions F' du schéma S' . Définissons $\varphi : F' \longrightarrow F$ comme l'injection canonique du sous-corps F' dans le corps F . Alors (f , φ) est évidemment un morphisme du schéma S dans le schéma S' . Un tel morphisme s'appellera un *morphisme de domination*.

Deuxième exemple de morphismes : soit S' un schéma, et $P' \in S'$. Soit F le corps $P'/\underline{r}(P')$, et soit φ l'application canonique de P' sur son quotient F . On sait (Exposé 6, paragraphe 6) que les images $\varphi(M')$, dans F , des spécialisations M' de P' , forment un schéma S dont F est le corps des fractions ; S s'appelle le *schéma induit* par S' sur $\mathcal{J}^{\smile}(P')$, ensemble de spécialisations de P' dans S' . L'application qui à $M' \in \mathcal{J}^{\smile}(P')$ associe $\varphi(M') \subset F$, est une bijection de $\mathcal{J}^{\smile}(P')$ sur S . Considérons la bijection réciproque, et composons-la avec l'injection canonique de $\mathcal{J}^{\smile}(P')$ dans S' ; on obtient une application $f : S \longrightarrow S'$, qui est injective. On voit que f et φ définissent un morphisme du schéma induit S dans le schéma S' . On notera que f est un *homéomorphisme* de f sur $f(S)$.

Décomposition canonique d'un morphisme.- Soit, en général, un morphisme (f , φ) d'un schéma S dans un schéma S' . Désignons par P' la localité $f(F) \in S'$, et considérons le schéma S'' , induit par S' sur $\mathcal{J}^{\smile}(P')$; soit $f' : S'' \longrightarrow S'$ l'application injective du schéma induit S'' dans le schéma S' . L'homomorphisme $\varphi : P' \longrightarrow F$ a pour noyau $\underline{r}(P')$, donc il se factorise d'une seule manière en $\varphi' : P' \longrightarrow P'/\underline{r}(P')$ et $\varphi'' : P'/\underline{r}(P') \longrightarrow F$. Or $P'/\underline{r}(P')$ est le corps F'' du schéma induit S'' ; φ' est surjectif, et φ'' est injectif. Soit alors $M \in S$; $f(M) = M' \in S'$, et $\varphi'(M') = M'' \subset F''$ est dominé par M (si on identifie F'' à un sous-corps de F ,par l'injection φ'') . On voit que S *domine* S'' , et que l'application de domination f'' associe à M

la localité M'' ; ainsi l'application $f : S \longrightarrow S'$ est composée de $f'' : S \longrightarrow S''$ et de $f' : S'' \longrightarrow S'$.

En conclusion : tout morphisme (f , φ) de S dans S' se décompose en un morphisme (f'' , φ'') de S dans S'' pour lequel φ'' est injectif, et un morphisme (f' , φ') de S'' dans S' , pour lequel φ' est surjectif. Cette décomposition est unique (à un isomorphisme près), et S'' est le schéma induit par S' sur l'ensemble des spécialisations de $P' = \varphi(F)$ dans S' . (On notera que l'application f' est injective ; par contre, f'' n'est pas surjective, en général)

En particulier, si un morphisme (f , φ) est tel que φ soit <u>injectif</u>, on a $S' = S''$, $\varphi = \varphi''$, $f = f''$; on est donc dans le cas d'un morphisme de domination. Si un morphisme (f , φ) est tel que φ soit <u>surjectif</u>, on a $S = S''$, $\varphi = \varphi'$ et $f = f'$; on est dans le cas d'un schéma induit.

3.- <u>Morphismes de schémas affines</u>.

Soient A et A' deux algèbres affines, S et S' leurs schémas. Le corps F (resp. F') est le corps des fractions de l'algèbre A (resp. A'). Soit (f , φ) un morphisme de S dans S' ; et soit $P' = f(F)$. Je dis que <u>l'homomorphisme</u> $\varphi : P' \longrightarrow F$ <u>applique</u> A' <u>dans</u> A ; en effet, l'image de f se compose de toutes les localités de S' contenues dans P' ; comme A' est l'intersection de ces localités (Exposé 5, proposition 4), et que, pour toute $M \in S$, φ applique $f(M)$ dans M , on voit que φ applique A' dans l'intersection des localités de S , c'est-à-dire dans A .

Notons $\psi : A' \longrightarrow A$ la restriction de φ . Cet homomorphisme d'algèbres affines <u>détermine entièrement le morphisme</u> (f , φ) de S dans S' . D'abord, φ est déterminé par ψ , puisque P' est dans le corps des fractions de A' . De plus, soit $\underline{p}$ un idéal premier de A , et soit $M = A_{\underline{p}}$; soit $M' = f(M)$; on a $M' = A'_{\underline{p}'}$, $\underline{p}'$ étant un idéal premier de A' . D'après l'axiome des morphismes, $\underline{p}'$ est nécessairement l'image réciproque $\psi^{-1}(\underline{p})$; donc la connaissance de ψ détermine l'application qui, à chaque $\underline{p}$, associe un $\underline{p}'$, c'est-à-dire détermine l'application $f : S \longrightarrow S'$.

Réciproquement, donnons-nous arbitrairement un homomorphisme d'algèbres affines $\psi : A' \longrightarrow A$; Si à chaque idéal premier $\underline{p}$ de A on associe $\underline{p}' = \psi^{-1}(\underline{p})$, l'application f qui, à chaque localité $A_{\underline{p}}$ associe $A'_{\underline{p}'}$, et l'homomorphisme $\varphi : A'_{\psi^{-1}(o)} \longrightarrow F$ induit par ψ , définissent un morphisme (f , φ) de S dans S' .

On a ainsi <u>correspondance biunivoque entre morphismes de</u> S <u>dans</u> S', <u>et homomorphismes</u> $A' \longrightarrow A$ <u>des algèbres affines</u>. Pour que φ soit surjectif (resp. injectif), il faut et il suffit que ψ soit surjectif (resp. injectif). A la décomposition canonique d'un morphisme correspond la décomposition canonique de ψ en un épimorphisme de A' sur l'image A'' de ψ , et un monomorphisme de A'' dans A .

Revenons à un morphisme (f , φ) de S dans S' , les schémas S et S' n'étant plus supposés affines. On va voir qu'un tel morphisme est défini par un nombre fini de morphisme de sous-schémas affines S_i de S dans des sous-schémas affines S'_i de S' :

Lemme 1 : Soit (f , φ) un morphisme de S dans S' . On peut représenter S comme réunion d'une famille finie de schémas affines S_i , et S' comme réunion d'une famille finie de schémas affines S'_i (ayant même ensemble d'indices), de manière que, pour tout i , f applique S_i dans S'_i .

En effet, S' est réunion d'une famille finie de schémas affines S'_α ; les $f^{-1}(S'_\alpha)$ sont des ouverts de S , donc chacun d'eux est réunion finie de schémas affines $S_{\alpha j}$; d'où aussitôt le lemme.

Avec les notations de l'énoncé du lemme, soit $f_i : S_i \longrightarrow S'_i$ l'application induite par f ; elle est évidemment continue. Le corps F du schéma S est aussi le corps des fractions de chacun des S_i ; la localité $f(F)$ appartient à tous les S'_i ; si $\varphi : f(F) \longrightarrow F$ désigne l'homomorphisme attaché au morphisme (f , φ) , alors, pour chaque i , (f_i , φ) est un morphisme de S_i dans S'_i .

Soit A_i (resp. A'_i) l'algèbre affine du schéma S_i (resp. S'_i) , et soit $\psi_i : A'_i \longrightarrow A_i$ l'homomorphisme associé au morphisme (f_i , φ) . Les ψ_i déterminent entièrement le morphisme (f , φ) , puisque ψ_i détermine (f_i, φ). Réciproquement, soient donnés des homomorphismes $\psi_i : A'_i \longrightarrow A_i$; cherchons à quelle condition ils déterminent un morphisme de S dans S' .

Proposition 2.- Avec les notations précédentes, pour que les ψ_i déterminent un morphisme (f , φ) de S dans S' , il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies : 1) en notant p'_i le noyau de ψ_i , le sous-anneau $(A'_i)_{p'_i}$ du corps F' (corps des fractions commun aux A'_i) doit être indépendant de i ; 2) l'homomorphisme φ_i de $(A'_i)_{p'_i}$ dans F déduit de ψ_i doit être indépendant de i .

Démonstration : les conditions sont évidemment nécessaires. Elles sont suffisantes : soit S'' le schéma induit par S' sur l'ensemble des spécialisations de P' dans S', et soit S''_i le schéma induit par S'_i sur l'ensemble des spécialisations de P' dans S'_i. Le schéma S'' est réunion des schémas affines S''_i, et tout revient à montrer que, pour $i \neq j$, les applications composées $S_i \longrightarrow S''_i \longrightarrow S''$ et $S_j \longrightarrow S''_j \longrightarrow S''$ coïncident sur $S_i \cap S_j$; or c'est évident, car elles associent à un M l'unique $M'' \in S''$ dominé par M.

4.- Ensembles constructibles.

Soit S un schéma. On appelle constructibles les sous-ensembles de S qui appartiennent à la plus petite famille Φ de parties jouissant des propriétés suivantes :

(a) l'intersection de deux ensembles de Φ appartient à Φ ;

(b) le complémentaire d'un ensemble de Φ appartient à Φ ;

(c) tout ouvert appartient à Φ.

Les assertions suivantes sont évidentes : tout ouvert, tout fermé est constructible ; toute réunion finie, toute intersection finie de constructibles est constructible ; le complémentaire d'un constructible est constructible.

Toute réunion finie d'ensembles $U_i \cap F_i$ (avec U_i ouvert, F_i fermé) est constructible. Réciproquement, tout ensemble constructible est de ce type : car les ensembles de ce type forment une famille Φ qui satisfait à (a), (b), (c).

Prenons des $P_i \in S$ en nombre fini, et des sous-schémas $S_i \subset S$; alors la réunion des ensembles $\mathcal{V}(P_i) \cap S_i$ est constructible (car $\mathcal{V}(P_i)$ est fermé et S_i ouvert). Réciproquement, tout ensemble constructible est de ce type : il suffit de le montrer pour un ensemble de la forme $U \cap F$, avec U ouvert et F fermé ; or U, s'il n'est pas vide, est un schéma (Exposé 5, théorème 1), et F est une réunion finie d'ensembles de la forme $\mathcal{V}(P_i)$ (Exposé 5, proposition 5).

Pour qu'un ensemble constructible C soit fermé, il faut et il suffit que toute spécialisation d'un élément de C appartienne à C : c'est évidemment nécessaire (puisque l'adhérence d'un élément se compose de toutes ses spécialisations) ; c'est suffisant, car si C est réunion finie d'ensembles $\mathcal{V}(P_i) \cap S_i$ non vides (donc $P_i \in S_i$, et par suite $P_i \in C$), C est alors réunion des $\mathcal{V}(P_i)$ et est donc fermé.

Pour qu'un ensemble constructible non vide C soit irréductible, il faut et il suffit que tous les éléments de C soient des spécialisations de l'un d'eux. En effet, il faut et il suffit que l'adhérence de C soit irréductible (Exposé 6, proposition 6), c'est-à-dire que l'ensemble $\bar{C}$ des spécialisations des éléments de C soit irréductible, et pour cela il faut et il suffit que $\bar{C}$ se compose de toutes les spécialisations d'un même P (Exposé 6, théorème 2), qui appartient alors nécessairement à C.

Si C est constructible, ses composantes irréductibles sont constructibles (car ce sont les intersections de C avec les composantes irréductibles de $\bar{C}$, qui sont fermées).

On se propose maintenant de voir comment les ensembles constructibles se comportent vis-à-vis des morphismes. Soit (f, φ) un morphisme d'un schéma S dans un schéma S' ; si C' est constructible dans S', alors $f^{-1}(C')$ est un ensemble constructible de C, puisque l'image réciproque d'un ouvert (resp. fermé) est ouverte (resp. fermée).

Théorème 3.- Si (f, φ) est un morphisme d'un schéma S dans un schéma S', l'image par f de tout ensemble constructible de C est un ensemble constructible de S'. De plus, si φ est injectif (morphisme de domination), l'image par f de tout ouvert non vide U de S contient un ouvert non vide U' de S'.

Démonstration : nous prouverons d'abord la deuxième partie de l'énoncé. D'après le lemme 1, et le lemme 3 de 6-01, il suffit de le montrer lorsque S et S' sont des schémas affines, et $U = S$; le morphisme de domination est alors défini par un monomorphisme $\psi : A' \longrightarrow A$ des algèbres affines des schémas S' et S, ce qui permet d'identifier A' à une sous-algèbre de A. Appliquons le lemme de 3-01, en y prenant $v = 1$; il existe donc un $u' \in A'$, $u' \neq 0$, jouissant de la propriété suivante : tout homomorphisme de A' dans un corps algébriquement clos, qui envoie u' dans un élément $\neq 0$, se prolonge en un homomorphisme de A dans le même corps. Soit U' l'ouvert de S', formé des localités $A'_{\underline{p}'}$ telles que $u' \notin \underline{p}'$; U' n'est pas vide, puisque $u' \neq 0$. On va montrer que toute localité de U' est l'image d'au moins une localité de S ; tout revient à prouver que tout idéal premier $\underline{p}'$ de A', tel que $u' \notin \underline{p}'$, est de la forme $A' \cap \underline{p}$, où $\underline{p}$ est un idéal premier de A. Or l'application canonique $A' \longrightarrow A'/\underline{p}'$, composée avec l'injection de $A'/\underline{p}'$ dans la clôture algébrique L du corps des fractions de $A'/\underline{p}'$, est un homomorphisme $g : A' \longrightarrow L$ dont le noyau est $\underline{p}'$; g se prolonge en un homomorphisme $A \longrightarrow L$, dont le noyau $\underline{p}$ est tel que $A' \cap \underline{p} = \underline{p}'$.

Il reste à établir la première partie de l'énoncé du théorème. On va procéder par récurrence sur la dimension n du schéma S. Si $n = 0$, l'assertion est triviale. Supposons-la vraie pour les dimensions $< n$ $(n \geq 1)$, et soit S un schéma de dimension n . Soit C constructible dans S ; il suffit de montrer que l'image par f de toute composante irréductible de C est constructible. Supposons donc C constructible et irréductible ; alors l'adhérence $\bar{C}$ se compose de toutes les spécialisations d'un $P \in C$. Soit S'' le <u>schéma induit</u> par S sur $\bar{C}$, et soit $f'' : S'' \longrightarrow S$ l'application canonique. L'image réciproque $f''^{-1}(C) = C''$ est constructible, et $f(C)$ est l'image de C'' dans S' pour l'application composée $S'' \xrightarrow{f''} S \xrightarrow{f} S'$. Si $\bar{C} \neq S$, la dimension de S'' est $< n$, et l'hypothèse de récurrence entraîne alors que $f(C)$ est constructible. Supposons $\bar{C} = S$, donc $S'' = S$; l'application $S \longrightarrow S'$ se factorise en $S \xrightarrow{f_1} S'_1 \longrightarrow S'$, en notant S'_1 le schéma induit par S' sur $f(F)$ (F : corps des fractions du schéma S). Puisque l'application $S'_1 \longrightarrow S'$ est un homéomorphisme de S'_1 sur un sous-ensemble fermé de S' , il suffit de montrer que l'image $f_1(C)$ dans S'_1 est constructible. Or f_1 est un morphisme de domination, et d'après la deuxième partie de l'énoncé (déjà démontrée) $f_1(C)$ contient un ouvert non vide U'_1 de S'_1 . Donc $f_1(C)$ est réunion de U'_1 et de l'image, par f_1 , de l'ensemble $C \cap f_1^{-1}(S'_1 - U'_1)$, ensemble qui est constructible, et dont toutes les composantes ont une adhérence $\neq S$. D'après ce qu'on vient de démontrer, l'image de l'ensemble $C \cap f_1^{-1}(S'_1 - U'_1)$ est constructible, ce qui achève la démonstration.