H. Cartan

Variétés algébriques affines

Séminaire Henri Cartan, tome 8 (1955-1956), exp. n° 3, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A3_0>

Séminaire E.N.S., 1955/1956
(H. CARTAN et C. CHEVALLEY)

VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES AFFINES
(Exposé de H. CARTAN, 21.11.1955).

1.- Variétés algébriques affines.

Soient k un corps, et K une extension algébriquement close de k. Si k est algébriquement clos, on n'exclut pas le cas où $k = K$.

Soit $\underline{a}$ un idéal de l'algèbre des polynômes $k[X_1, \ldots, X_n]$. On associe à $\underline{a}$ l'ensemble des points $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ tels que $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ pour tout polynôme $P \in \underline{a}$; cet ensemble sera noté $V(\underline{a})$. On appelle k-ensemble algébrique affine, dans K^n, tout ensemble de points de la forme $V(\underline{a})$, pour un idéal $\underline{a}$ convenable.

Soit V un k-ensemble algébrique affine de K^n. Les $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$ tels que $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ pour tout point $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, forment un idéal, noté $\underline{i}(V)$: idéal des polynômes "qui s'annulent sur V". On a évidemment, pour tout idéal $\underline{a}$:

$$\underline{i}(V(\underline{a})) \supset \underline{a} .$$

Notons que les points de K^n sont en correspondance biunivoque avec les homomorphismes de la k-algèbre $k[X_1, \ldots, X_n]$ dans K (considéré comme k-algèbre) : la correspondance associe au point $(x_1, \ldots, x_n)$ l'homomorphisme f tel que $f(X_i) = x_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Si $\underline{a}$ est un idéal, les points de $V(\underline{a})$ correspondent aux homomorphismes f dont le noyau contient $\underline{a}$; l'idéal $\underline{i}(V(\underline{a}))$ n'est autre que l'intersection des noyaux des homomorphismes f dont le noyau contient $\underline{a}$.

Théorème 1.- *Si $\underline{p}$ est un idéal premier de $k[X_1, \ldots, X_n]$, on a*

$$\underline{i}(V(\underline{p})) = \underline{p}$$

(i.e: tout polynôme qui s'annule sur $V(\underline{p})$ appartient à $\underline{p}$).

Démonstration : notons A l'algèbre quotient $k[X_1, \ldots, X_n]/\underline{p}$, qui est un anneau d'intégrité. On veut montrer ceci : si $v \in A$ est $\neq 0$, il existe un k-homomorphisme g de A dans K tel que $g(v) \neq 0$. Cela va résulter d'un lemme général :

Lemme : *soient A un anneau intègre, B un sous-anneau de A tel que*

A <u>soit engendré par</u> B <u>et un nombre fini d'éléments. Soit</u> $v \neq 0$ <u>un élément de</u> A . <u>Il existe alors un élément</u> $u \neq 0$ <u>de</u> B <u>jouissant de la propriété suivante : tout homomorphisme</u> f <u>de</u> B <u>dans un corps algébriquement clos</u> K , <u>tel que</u> $f(u) \neq 0$, <u>se prolonge d'au moins une manière en un homomorphisme</u> g <u>de</u> A <u>dans</u> K , <u>tel que</u> $g(v) \neq 0$.

Procédant par récurrence sur le nombre des éléments d'un système de générateurs de A sur B , on se ramène au cas où $A = B[x]$. Supposons d'abord x transcendant sur le corps des fractions de B ; soit

$v = \sum_{0 \leq i \leq m} b_i x^i$, $b_i \in B$, $b_m \neq 0$. Soit f un homomorphisme de B dans K tel que $f(b_m) \neq 0$; puisque K est infini, il existe $\xi \in K$ tel que $\sum_{0 \leq i \leq m} f(b_i) \xi^i \neq 0$; f se prolonge en un homomorphisme g de A dans K tel que $g(x) = \xi$, d'où $g(v) \neq 0$. Supposons maintenant x algébrique sur B ; il existe alors un $u \neq 0$ dans A tel que ux et uv^{-1} soient <u>entiers</u> sur B . L'ensemble S des puissances u^n $(n \geq 0)$ est multiplicativement stable et ne contient pas 0 . Soit alors f un homomorphisme de B dans K tel que $f(u) \neq 0$; le noyau de f ne rencontrant pas S , f se prolonge en un homomorphisme f_1 de $B_S = B[u^{-1}]$ dans K ; il est clair que x et v^{-1} sont entiers sur B_S ; par suite f_1 se prolonge en un homomorphisme g_1 de $B[u^{-1}, x, v^{-1}]$ dans un surcorps de K (cf. Exposé 1, corollaire 2 du théorème 3). Comme x est entier sur $B[u^{-1}]$, et $f_1(B[u^{-1}]) \subset K$, $g_1(x)$ est algébrique sur K , donc est dans K . La restriction g de g_1 à $B[x]$ est un homomorphisme de A dans K , et puisque $g_1(v) g_1(v^{-1}) = 1$, on a bien $g(v) \neq 0$.

Le lemme étant ainsi établi, il suffit de l'appliquer au cas où $B = k$, $A = k[X_1, \ldots, X_n]/\underline{p}$, pour obtenir le théorème 1 .

<u>Corollaire du théorème 1</u> : <u>si l'idéal</u> $\underline{a} \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ <u>est intersection d'un nombre fini d'idéaux premiers</u> $\underline{p}_i$, <u>alors</u>

$$\underline{i}(V(\underline{a})) = \underline{a} .$$

En effet, si un k-homomorphisme de $k[X_1, \ldots, X_n]$ dans K a un noyau qui contient $\underline{a}$, ce noyau contient l'un des $\underline{p}_i$ (car ce noyau est un idéal premier). Donc $\underline{i}(V(\underline{a}))$ est l'intersection des $\underline{i}(V(\underline{p}_i))$, c'est-à-dire des $\underline{p}_i$ (d'après le théorème 1).

Ce corollaire a des conséquences importantes. D'abord, soit $\underline{a}$ un idéal quelconque ; soit $\underline{b}$ l'intersection des idéaux premiers contenant $\underline{a}$. D'après le théorème 4 de l'Exposé 2, $\underline{b}$ est l'intersection d'un nombre fini d'idéaux premiers $\underline{p}_i$ contenant $\underline{a}$; on a donc $\underline{i}(V(\underline{b})) = \underline{b}$, et par suite $\underline{i}(V(\underline{a})) = \underline{b}$. Or tout élément de $\underline{b}$ possède une puissance dans $\underline{a}$ (Exposé 2, proposition 6) ; autrement dit, tout polynôme qui s'annule sur $V(\underline{a})$ possède une puissance dans l'idéal $\underline{a}$. C'est le "Nullstellensatz" de Hilbert.

D'autre part, avec les mêmes notations, l'ensemble $V(\underline{a})$ est réunion des ensembles $V(\underline{p}_i)$ en nombre fini : tout k-ensemble algébrique affine est réunion d'un nombre fini de k-ensembles algébriques dont l'idéal est premier.

Tout ensemble algébrique de la forme $V(\underline{p})$, $\underline{p}$ premier, s'appelle une k-<u>variété algébrique affine</u>. On voit aussitôt que les k-variétés algébriques affines ne sont autres que les k-ensembles algébriques affines <u>irréductibles</u> (i.e. qui ne sont pas réunion de deux vrais sous-ensembles algébriques). Ainsi tout k-ensemble algébrique affine V est réunion d'un nombre fini de k-variétés algébriques affines, qui sont les éléments maximaux de l'ensemble des k-variétés algébriques affines contenues dans V .

2.- <u>La notion de</u> (k , K)-<u>variété affine abstraite</u>.

k désigne toujours un corps, et K un surcorps algébriquement clos.

Soit $\underline{a}$ une intersection d'idéaux premiers de $k[X_1 , \ldots , X_n]$, et soit $V(\underline{a})$ l'ensemble algébrique affine défini par $\underline{a}$. Soit A l'anneau-quotient $k[X_1 , \ldots , X_n]/\underline{a}$; tout polynôme $P \in k[X_1 , \ldots , X_n]$ définit une fonction sur $V(\underline{a})$, à savoir $(x_1 , \ldots , x_n) \longrightarrow P(x_1 , \ldots , x_n)$; et deux polynômes P et P' définissent la même fonction si et seulement si $P - P' \in \underline{a}$. Ainsi <u>la</u> k-<u>algèbre</u> A <u>s'identifie à une algèbre de fonctions sur</u> $V(\underline{a})$, <u>à valeurs dans</u> K .

Pour que cette algèbre A soit intègre, il faut et il suffit que $\underline{a}$ soit premier, c'est-à-dire que $V(a)$ soit une k-variété affine.

<u>Définition : on appelle</u> (k , K)-<u>ensemble algébrique affine abstrait un ensemble</u> V <u>muni d'une</u> k-<u>algèbre</u> A <u>de fonctions définies sur</u> V , <u>à valeurs dans</u> K , <u>satisfaisant à l'axiome suivant</u> :

(EA) <u>pour tout</u> k-<u>homomorphisme</u> f <u>de</u> A <u>dans</u> K , <u>il existe un point</u> $x \in V$ <u>et un seul, tel que</u> $f(u) = u(x)$ <u>pour tout</u> $u \in A$.

<u>De plus,</u> V <u>prend le nom de</u> (k , K)-<u>variété affine abstraite, si l'algèbre</u> A <u>est intègre. Dans ce cas, le corps des fractions de</u> A <u>se note</u> $\mathcal{F}(V)$

<u>et s'appelle le corps de la variété</u> V .

Il est clair que tout k-ensemble algébrique (resp. toute k-variété) V de K^n définit un (k , K)-ensemble algébrique abstrait (resp. une (k , K)-variété algébrique affine abstraite): on prend pour A la k-algèbre des fonctions induites sur V par les éléments de $k[X_1 , \ldots , X_n]$.

Réciproquement, soit A une k-algèbre de type fini (i.e: engendrée sur k par un nombre fini d'éléments), et supposons A sans élément nilpotent $\neq 0$. Choisissons un système fini de générateurs x_i $(1 \leq i \leq n)$ de A ; ceci identifie A à un quotient $k[X_1 , \ldots , X_n]/\underline{a}$, où $\underline{a}$ est intersection d'idéaux premiers. Alors A s'identifie à une k-algèbre de fonctions sur l'ensemble $V(\underline{a}) \subset K^n$, et $V(\underline{a})$, muni de l'algèbre A , est un (k , K)-ensemble algébrique affine abstrait. C'est une variété algébrique affine (abstraite) si et seulement si A est intègre.

Ceci conduit à poser la

<u>Définition</u> : <u>on appelle</u> k-<u>algèbre affine toute</u> k-<u>algèbre intègre qui est de type fini sur</u> k .

La notion d'<u>isomorphisme</u> de (k , K)-ensembles algébriques affines abstraits résulte de la définition de la structure : une application $\varphi : V \longrightarrow V'$ est un isomorphisme de (V , A) sur (V' , A') si c'est une bijection qui transforme les fonctions de A' (fonctions sur V') en les fonctions de A (fonctions sur V).

Il est clair que la donnée de la k-algèbre A (k-algèbre de type fini, sans élément nilpotent $\neq 0$) détermine un (k , K)-ensemble algébrique affine V <u>à un isomorphisme près</u>, puisque V s'identifie à l'ensemble des k-homomorphismes de A dans K . En particulier, la donnée d'une k-algèbre affine A définit une (k , K)-variété algébrique affine abstraite, à un isomorphsime près.

Soient (V , A) et (V' , A') deux (k , K)-ensembles algébriques affines abstraits. On appelle <u>morphisme</u>, ou <u>application régulière</u>, du premier dans le second, une application $\varphi : V \longrightarrow V'$ telle que, pour toute fonction $f' \in A'$, l'application $f' \circ \varphi : V \longrightarrow K$ appartienne à A . Il est clair que le composé de deux morphismes est un morphisme ; tout isomorphisme est un morphisme ; si une bijection est un morphisme ainsi que son application réciproque, c'est un isomorphisme.

Un morphisme $\varphi : V \longrightarrow V'$ définit un k-homomorphisme $f' \longrightarrow f' \circ \varphi$ de l'algèbre A' dans l'algèbre A . Réciproquement, soit $g : A' \longrightarrow A$

un k-homomorphismes d'algèbres ; à tout k-homomorphisme $A \to K$ associons le k-homomorphisme composé $A' \xrightarrow{g} A \longrightarrow K$; on obtient ainsi une application $\varphi : V \longrightarrow V'$, qui est un morphisme. Nous avons donc défini une correspondance biunivoque entre les morphismes $V \longrightarrow V'$ et les k-homomorphismes d'algèbres $A' \longrightarrow A$.

Soit (V , A) un k-ensemble algébrique affine abstrait. Une sous-variété de V est un sous-ensemble $W \subset V$ tel que la k-algèbre B des fonctions induites sur W par les fonctions de A définisse sur W une structure de (k , K)-variété algébrique affine (abstraite). On voit que W est l'ensemble des zéros d'un idéal premier $\underline{p}$ de A, l'anneau B étant $A/\underline{p}$; réciproquement, tout idéal premier $\underline{p}$ de A définit une sous-variété W de V, dont l'algèbre est $A/\underline{p}$ (ceci résulte du théorème 1). On a ainsi défini une correspondance biunivoque entre sous-variétés de V et idéaux premiers de A.

Supposons en particulier que V soit une variété affine (abstraite) ; soit A l'algèbre de V, et soit W une sous-variété de V, relative à l'idéal premier $\underline{p}$ de A. L'anneau local de W est, par définition, l'anneau de fractions $A_{\underline{p}}$ (cf. Exposé 1) ; il se compose des fractions dont le dénominateur est une fonction non identiquement nulle sur W ; l'anneau local $A_{\underline{p}}$ se plonge dans le corps $\mathfrak{F}(V)$. Le quotient $A_{\underline{p}}/\underline{p}A_{\underline{p}}$ de l'anneau local $A_{\underline{p}}$ par son idéal maximal $\underline{p}A_{\underline{p}}$ est un corps ; d'après l'Exposé 1 (proposition 4), ce corps s'identifie au corps des fractions de l'anneau d'intégrité $A/\underline{p} = B$, c'est-à-dire au corps $\mathfrak{F}(W)$ de la variété W.

Remarque : Chaque point $x \in V$, c'est-à-dire chaque k-homomorphisme f $A \longrightarrow K$, définit une sous-variété W qui contient le point x, à savoir celle dont l'idéal $\underline{p}$ est le noyau de f ; W est la plus petite sous-variété contenant x, elle ne se réduit pas à x en général. Toutefois, si $k = K$ (algébriquement clos), tout point est une sous-variété, car on a une correspondance biunivoque entre les points de V et les idéaux maximaux de A (cf. Appendice).

3.- La topologie de Zariski.

Soit (V , A) un (k , K)-ensemble algébrique affine (abstrait). On définit sur V la topologie suivante : les ensembles fermés sont, par définition, les (k , K)-ensembles algébriques contenus dans V ; ils sont en correspondance biunivoque avec les idéaux de A qui sont intersection d'idéaux premiers. Les axiomes d'une topologie sont satisfaits, car toute intersection de fermés est un fermé, et la réunion de deux fermés est un fermé (prendre l'intersection des idéaux correspondants). L'adhérence d'un point n'est autre que la plus petite variété le contenant.

Dire que V est une *variété* revient à dire que V n'est pas la réunion de deux fermés distincts de V. Alors deux ouverts non vides de V se coupent toujours ; en particulier, la topologie de V *n'est pas séparée*.

Tout morphisme $\varphi : V \longrightarrow V'$ est *continu* pour les topologies de V et V' ; en effet, l'image réciproque d'un sous-ensemble algébrique de V' est un sous-ensemble algébrique de V.

Proposition 1.- Soit $\varphi : V \longrightarrow V'$ *un morphisme, et soit* $g : A' \longrightarrow A$ *l'homomorphisme défini par* φ (A et A' désignant les algèbres de V et V'). *L'adhérence de* $\varphi(V)$ *dans* V' *est un* $(k\ ,\ K)$*-ensemble algébrique dont l'algèbre* B' *est isomorphe à l'image de* g ; *si* V *est une variété,* $\overline{\varphi(V)}$ *est une variété ; pour que* $\varphi(V)$ *soit dense dans* V', *il faut et il que* g *soit un monomorphisme* (i.e.: que le noyau de g soit nul).

Démonstration : l'algèbre B' s'identifie au quotient de A' par l'idéal des éléments qui s'annulent sur $\overline{\varphi(V)}$; c'est aussi l'idéal des éléments qui s'annulent sur $\varphi(V)$, c'est-à-dire le noyau de $g : A' \longrightarrow A$; donc g induit un isomorphisme de B' sur la sous-algèbre de A, image de g. Si V est une variété, A est intègre, donc B' est intègre, et $\overline{\varphi(V)}$ est une variété. Pour que $\overline{\varphi(V)} = V'$, il faut et il suffit que le noyau de g soit nul.

Lorsque $\overline{\varphi(V)}$ est dense dans V', le monomorphisme $g : A' \longrightarrow A$ induit un monomorphisme $\bar{g}$ des corps de fractions :

$$\bar{g} : \mathcal{F}(V') \longrightarrow \mathcal{F}(V) \quad .$$

Soit V une $(k\ ,\ K)$-variété affine, d'algèbre A, et soit $u \neq 0$ un élément de A. Soit U l'ensemble des points de V où la fonction u ne s'annule pas ; U est un ouvert non vide. Soit B la sous-algèbre de $\mathcal{F}(V)$ engendrée par A et u^{-1} ; B est évidemment une k-algèbre affine, donc définit sur U une structure de $(k\ ,\ K)$-variété affine (abstraite). Cette structure ne dépend que de l'ouvert U, et non du choix de u ; car si $u' \in A$ définit le même ensemble U, alors (d'après le Nullstellensatz), il existe une puissance de u' qui est divisible par u, et une puissance de u qui est divisible par u' ; donc $A[u^{-1}] = A[u'^{-1}]$. Les éléments du corps $\mathcal{F}(V)$ qui appartiennent à $B = A[u^{-1}]$ sont dits *définis sur* U ; ils induisent sur U la k-algèbre de fonctions qui définit la structure de $(k\ ,\ K)$-variété affine de U .

Un ouvert U de V , défini comme ci-dessus, s'appellera un ouvert affine spécial de la variété V . Il est clair que toute intersection finie d'ouverts affines spéciaux est un ouvert affine spécial.

L'injection $U \longrightarrow V$ définit un homomorphisme $\mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$, qui est visiblement un isomorphisme des corps $\mathcal{F}(V)$ et $\mathcal{F}(U)$.

Proposition 2.- Soient V et V' deux (k, K)-variétés affines (abstraites), et soit $\varphi : V \longrightarrow V'$ un morphisme tel que $\varphi(V)$ soit dense dans V' . Pour que l'homomorphisme $\bar{g} : \mathcal{F}(V') \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ défini par φ soit un isomorphisme, il faut et il suffit qu'il existe un ouvert affine spécial $V_o \subset V$, et un ouvert affine spécial $V'_o \subset V'$, tels que la restriction de φ à V_o soit un isomorphisme de V_o sur V'_o .

Démonstration : la condition est évidemment suffisante, comme le montre le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V') & \longrightarrow & \mathcal{F}(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(V'_o) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V_o) \end{array}$$

Montrons que la condition est nécessaire : soit (x_i) un système fini de générateurs de A ; il existe des $y_i \in A'$ et $z_i \in A'$ tels que

$$x_i g(z_i) = g(y_i) \quad , \qquad z_i \neq 0 \quad .$$

Soit z le produit des z_i ; alors $z \neq 0$ définit un ouvert affine spécial $V'_o \subset V'$; $\bar{g}$ applique l'algèbre A'_o de V'_o sur la sous-algèbre A_o de $\mathcal{F}(V)$ engendrée par A et $(g(z))^{-1}$; donc A_o est l'algèbre d'un ouvert affine spécial V_o de V . Il s'ensuit que φ induit un isomorphisme de V_o sur V'_o .

4.- Produits et correspondances.

Soient toujours k un corps, et K un surcorps algébriquement clos. Soient A et B les algèbres de deux (k, K)-ensembles algébriques affines (abstraits) V et W . Soit C le quotient de l'algèbre $A \otimes_k B$ par l'idéal des éléments nilpotents ; alors C est une k-algèbre de type fini, sans élément nilpotent $\neq 0$; donc C définit un (k, K)-ensemble algébrique U . Les points de U correspondent aux k-homomorphismes $C \longrightarrow K$, qui correspondent biunivoquement aux k-homomorphismes $A \otimes_k B \longrightarrow K$, lesquels sont en correspondance biunivoque avec les couples (f, g) de k-homomorphismes

$$f : A \longrightarrow K \ , \quad g : B \longrightarrow K$$

(au couple $(f\ ,\ g)$ on associe l'homomorphisme $h : A \otimes_k B \longrightarrow K$ défini par $h(a \otimes b) = f(a)g(b)$). Ainsi U est en correspondance biunivoque (canonique) avec l'ensemble produit $V \times W$; et les éléments de C s'identifient à des fonctions sur $V \times W$, qui est donc muni d'une structure de $(k\ ,\ K)$-ensemble algébrique affine (abstrait).

Les monomorphismes $A \longrightarrow C$ et $B \longrightarrow C$, définis par les injections canoniques $A \longrightarrow A \otimes B$ et $B \longrightarrow A \otimes B$, correspondent aux morphismes $V \times W \longrightarrow V$ et $V \times W \longrightarrow W$, qui ne sont autresque les projections canoniques d'un ensemble produit sur ses facteurs. Nous les noterons p_1 et p_2 .

Il se peut que $V \times W$ ne soit pas une variété (i.e: un ensemble algébrique irréductible), même si V et W sont des variétés. Toutefois :

Théorème 2.- *Si k est algébriquement clos, et si V et W sont des $(k\ ,\ K)$-variétés, leur produit $V \times W$ est une $(k\ ,\ K)$-variété.*

Démonstration : il suffit de montrer que l'algèbre $A \otimes_k B$ est intègre (condition qui ne fait pas intervenir le corps K). Prenons pour cela $K = k$; alors il est classique que $A \otimes_k B$ s'identifie à une algèbre de fonctions sur $V \times W$, donc est sans élément nilpotent. Pour montrer que $A \otimes B$ est intègre, il suffit de montrer que $V \times W$ est irréductible (mais cette fois V et W sont les variétés définies par A et B en prenant $K = k$). Supposons donc que $V \times W$ soit réunion de deux fermés C et C' ; pour chaque point $a \in V$, le produit $\{a\} \times W$ est une variété (ici intervient l'hypothèse $k = K$), réunion de ses intersections avec C et C' ; donc $\{a\} \times V$ est contenu dans C ou dans C' ; l'ensemble A des $a \in V$ tels que $\{a\} \times V \subset C$ est un fermé, et de même l'ensemble A' des $a \in V$ tels que $\{a\} \times V \subset C'$; V est réunion de A et A' , donc on a $A = V$ ou $A' = V$, ce qui implique que $V \times W$ est égal à C ou à C' , et achève la démonstration.

Remarque : soient L et M des surcorps d'un corps algébriquement clos k ; alors $L \otimes_k M$ est un anneau d'intégrité. En effet, il suffit de le prouver lorsque les extensions L et M sont engendrées par un nombre fini d'éléments ; or dans ce cas L et M sont isomorphes à des corps $\mathfrak{F}(V)$ et $\mathfrak{F}(W)$ de k-variétés affines convenables, et par suite $L \otimes_k M$ se plonge dans le corps $\mathfrak{F}(V \times W)$.

Définition : soient V et W des $(k\ ,\ K)$-variétés affines (abstraites). On appelle $(k\ ,\ K)$-correspondance algébrique entre V et W un

$(k\ ,\ K)$-sous-ensemble algébrique Γ du produit $V \times W$; la correspondance est dite irréductible si Γ est une variété. Toute correspondance est réunion d'un nombre fini de correspondances irréductibles.

Soit Γ une correspondance irréductible. Notons V_1 et W_1 les adhérences de $p_1(\Gamma)$ et $p_2(\Gamma)$; ce sont des <u>sous-variétés</u> de V et W respectivement (cf. proposition 1), et Γ induit une correspondance entre V_1 et W_1. On notera $A(V_1)$, $A(W_1)$, $A(\Gamma)$ les algèbres des variétés V_1 , W_1 et Γ ; on notera $g_1 : A(V_1) \longrightarrow A(\Gamma)$ et $g_2 : A(V_2) \longrightarrow A(\Gamma)$ les monomorphismes définis par p_1 et p_2 .

On se propose d'examiner quelques types particuliers de correspondances (irréductibles).

<u>Premier cas</u> : $V_1 = V$, et $\overline{g_1} : \mathfrak{F}(V) \longrightarrow \mathfrak{F}(\Gamma)$ est un isomorphisme. On dit alors que Γ est une <u>fonction sur</u> V <u>à valeurs dans</u> W . En réalité, la proposition 2 montre qu'il existe deux ouverts affines spéciaux $\Gamma_0 \subset \Gamma$ et $V_0 \subset V$ tels que la projection $p_1 : \Gamma \longrightarrow V$ induise un isomorphisme de Γ_0 sur V_0 ; si on compose l'application réciproque $V_0 \longrightarrow \Gamma_0$ avec la projection $p_2 : \Gamma_0 \longrightarrow W$, on obtient une application régulière $V_0 \longrightarrow W$. Cette dernière application <u>ne se prolonge pas</u>, en général, en une véritable application de V dans W , malgré la terminologie adoptée. Il est facile de voir que, réciproquement, tout morphisme $V_0 \longrightarrow W$ d'un ouvert affine spécial $V_0 \subset V$ dans W , définit une "fonction sur V à valeurs dans W ".

<u>Deuxième cas</u> : $V_1 = V$, <u>et</u> $W_1 = W$. Alors on a des homomorphismes

$$\overline{g_1} : \mathfrak{F}(V) \longrightarrow \mathfrak{F}(\Gamma) , \quad \overline{g_2} : \mathfrak{F}(W) \longrightarrow \mathfrak{F}(\Gamma) ,$$

qui plongent les corps $\mathfrak{F}(V)$ et $\mathfrak{F}(W)$ dans un même corps $Q = \mathfrak{F}(\Gamma)$. Réciproquement, donnons-nous deux k-plongements de $\mathfrak{F}(V)$ et $\mathfrak{F}(W)$ dans un même surcorps Q de k ; ils envoient $A(V)$ et $A(W)$ sur des sous-algègres de Q ; ces sous-algèbres engendrent une sous-algèbre affine B de Q , et B définit une $(k\ ,\ K)$-variété Γ . Les monomorphismes $A(V) \longrightarrow A(\Gamma)$ et $A(W) \longrightarrow A(\Gamma)$ définissent des applications régulières $\Gamma \longrightarrow V$ et $\Gamma \longrightarrow W$ sur des sous-ensembles denses dans V et W , et l'application produit $\Gamma \longrightarrow V \times W$ identifie Γ à une sous-variété de $V \times W$. Ainsi les plongements de $\mathfrak{F}(V)$ et $\mathfrak{F}(W)$ dans un même surcorps de k définissent une correspondance Γ telle que $V_1 = V$ et $W_1 = W$.

Nous dirons que deux sous-variétés $V' \subset V$ et $W' \subset W$ <u>se correspondent par</u> Γ , s'il existe une sous-variété Γ' de Γ telle que les projections

p_1 et p_2 appliquent Γ' sur des sous-ensembles denses dans V' et W' respectivement.

Proposition 3.- Dans les hypothèses précédentes (c'est-à-dire lorsque Γ est une correspondance irréductible qui permet d'identifier $\mathfrak{F}(V)$ et $\mathfrak{F}(W)$ à des sous-corps de $\mathfrak{F}(\Gamma)$), une condition nécessaire et suffisante pour que deux sous-variétés $V' \subset V$ et $W' \subset W$ se correspondent est que les anneaux locaux R et S de V' et W', soient dominés par un même anneau local de $\mathfrak{F}(\Gamma)$.

Démonstration : supposons l'existence d'une sous-variété Γ' de Γ dont les projections soient denses dans V' et W' ; soient $\underline{p}$, $\underline{q}$, $\underline{r}$ les idéaux premiers de V', W', Γ'. Identifiant $A(V)$ et $A(W)$ à des sous-anneaux de $A(\Gamma)$, on a $A(V) \cap \underline{r} = \underline{p}$, $A(W) \cap \underline{r} = \underline{q}$, d'où il suit que les anneaux locaux $R = A(V)_{\underline{p}}$ et $S = A(W)_{\underline{q}}$ sont dominés par l'anneau local $T = A(\Gamma)_{\underline{r}}$. Réciproquement, soit T un anneau local de $\mathfrak{F}(\Gamma)$ qui domine R et S ; T contient le sous-anneau engendré par R et S, et a fortiori le sous-anneau engendré par $A(V)$ et $A(W)$, c'est-à-dire T contient $A(\Gamma)$. L'idéal maximal de T coupe $A(\Gamma)$ suivant un idéal premier $\underline{r}$, qui définit une sous-variété Γ' de Γ, et on a $A(V) \cap \underline{r} = \underline{p}$, $A(W) \cap \underline{r} = \underline{q}$. Donc on a des monomorphismes $A(V)/\underline{p} \longrightarrow A(\Gamma)/\underline{r}$, $A(W)/\underline{q} \longrightarrow A(\Gamma)/\underline{r}$, qui montrent que p_1 et p_2 appliquent Γ' sur des sous-ensembles denses dans V' et W' respectivement.

Remarque : lorsque $k = K$ (algébriquement clos), ce qui précède s'applique au cas de deux points $x \in V$ et $y \in W$ qui se correspondent par Γ, c'est-à-dire tels que $(x, y) \in \Gamma$. Mais même dans ce cas $(k = K)$, il se peut qu'un point de V corresponde à des variétés non ponctuelles de W.

Troisième cas : correspondances birationnelles. On dit que Γ est une correspondance birationnelle entre V et W si Γ est irréductible, si $V_1 = V$, $W_1 = W$, et si enfin les homomorphismes $\overline{g_1} : \mathfrak{F}(V) \longrightarrow \mathfrak{F}(\Gamma)$ et $\overline{g_2} : \mathfrak{F}(W) \longrightarrow \mathfrak{F}(\Gamma)$ sont des isomorphismes.

La donnée d'une correspondance birationnelle définit donc un isomorphisme $\mathfrak{F}(V) \approx \mathfrak{F}(W)$. Réciproquement, la donnée d'un tel isomorphisme définit une correspondance (voir deuxième cas), et cette correspondance est birationnelle.

Une correspondance est dite birégulière si les projections $\Gamma \longrightarrow V$ et $\Gamma \longrightarrow W$ sont des isomorphismes (de variétés affines) ; une telle correspondance définit un isomorphisme de V sur W.

Proposition 4.- Soit Γ une correspondance birationnelle entre V et W ; il existe alors deux ouverts affines spéciaux $V_0 \subset V$ et $W_0 \subset W$ tels que Γ induise une correspondance birégulière Γ_0 entre V_0 et W_0 (donc définisse un isomorphisme de V_0 sur W_0). Réciproquement, la donnée de deux ouverts affines spéciaux $V_0 \subset V$ et $W_0 \subset W$ et d'un isomorphisme de V_0 sur W_0 définit une correspondance birationnelle entre V et W.

Démonstration : si $\mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(\Gamma)$ est un isomorphisme, la proposition 2 dit qu'il existe un ouvert affine spécial $\Gamma_1 \subset \Gamma$ et un ouvert affine spécial $V_1 \subset V$ tels que l'application $\Gamma \longrightarrow V$ induise un isomorphisme de Γ_1 sur V_1. On a de même un isomorphisme de $\Gamma_2 \subset \Gamma$ sur $W_2 \subset W$. Alors on prend $\Gamma_0 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, V_0 et W_0 étant les projections de Γ_0 dans V et W.

Réciproquement, un isomorphisme de V_0 sur W_0 définit un isomorphisme $\mathcal{F}(V_0) \approx \mathcal{F}(W_0)$, donc un isomorphisme $\mathcal{F}(V) \approx \mathcal{F}(W)$, c'est-à-dire une correspondance birationnelle entre V et W. C'est la seule qui induise l'isomorphisme donné entre V_0 et W_0.

APPENDICE : Anneaux de Jacobson.

On a les deux propositions suivantes :

Proposition 5.- Si k est un corps, tout idéal premier de $k[X_1, \dots, X_n]$ est intersection des idéaux maximaux qui le contiennent.

Proposition 6.- Si k est un corps algébriquement clos, l'application qui, à chaque point $(x_1, \dots, x_n) \in k^n$, associe le noyau de l'homomorphisme $k[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow k$ défini par ce point, est une bijection de l'ensemble k^n sur l'ensemble des idéaux maximaux de $k[X_1, \dots, X_n]$.

De ces deux propositions on déduirait facilement à nouveau le théorème 1 (paragraphe 1).

Ces deux propositions résultent d'un théorème plus général, qui concerne les "anneaux de Jacobson".

Définition : un anneau B est un anneau de Jacobson si tout idéal premier $\underline{p}$ de B est intersection des idéaux maximaux contenant $\underline{p}$. (Il est clair que tout anneau quotient d'un anneau de Jacobson est de Jacobson. Tout corps est un anneau de Jacobson ; l'anneau Z des entiers naturels est un anneau de Jacobson).

Théorème 3.- Soit B un anneau de Jacobson, et soit $A = B[X_1, \dots, X_n]$.

<u>Alors</u> :

(i) <u>l'anneau</u> A <u>est un anneau de Jacobson</u> ;

(ii) <u>si</u> $\underline{p}$ <u>est un idéal maximal de</u> A , <u>l'idéal</u> $\underline{q} = \underline{p} \cap B$ <u>est un idéal maximal de</u> B , <u>et le corps</u> $A/\underline{p}$ <u>est algébrique sur le corps</u> $B/\underline{q}$.

<u>Démonstration</u> : (i) soit $\underline{p}$ un idéal premier de A , et soit $\underline{q} = \underline{p} \cap B$. Alors $A' = A/\underline{p}$ est un sur-anneau intègre, de type fini, de $B' = B/\underline{q}$. On veut montrer que le radical de A' est réduit à 0 ; pour cela, prenons $v \in A'$, $v \neq 0$, et montrons qu'il existe un idéal maximal de A' ne contenant pas v . D'après le lemme du paragraphe 1 , il existe $u \in B'$, $u \neq 0$, tel que tout homomorphisme f de B' dans un corps algébriquement clos K , satisfaisant à $f(u) \neq 0$, se prolonge en un homomorphisme g de A' dans K, tel que $g(v) \neq 0$. Puisque B' est un anneau de Jacobson, il existe un idéal maximal $\underline{m} \subset B'$ tel que $u \notin \underline{m}$; prenons pour K la clôture algébrique de $B'/\underline{m}$, et pour f l'homomorphisme canonique de B' dans K . Alors $g(A')$ est une algèbre de type fini sur $f(B')$, contenue dans K , donc c'est un corps ; le noyau de g est un idéal maximal qui ne contient pas v , puisque $g(v) \neq 0$.

(ii) dans la situation précédente, supposons de plus que $A' = A/\underline{p}$ soit un corps. Alors g est un isomorphisme de A' sur un sous-corps de K , et par suite f est un monomorphisme, c'est-à-dire $\underline{m} = 0$; autrement dit, B' est un corps, et $\underline{q}$ est un idéal maximal de B . Puisque K est algébrique sur B' , $A' = A/\underline{p}$ est a fortiori algébrique sur $B' = B/\underline{q}$.

<u>Remarque</u> : la notion d'anneau de Jacobson est due à W. KRULL, ainsi que le théorème 3 ci-dessus, mais la démonstration de Krull fait appel à la théorie de l'élimination (W. KRULL, Proc. Intern. Congress Math. 1950, II, p. 56-64).