J. Lafon

Anneaux noethériens

Séminaire Henri Cartan, tome 8 (1955-1956), exp. nº 2, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A2_0>

Séminaire E.N.S., 1955-56
(H. CARTAN et C. CHEVALLEY)

ANNEAUX NOETHÉRIENS.

(Exposé de J. LAFON, 14.11.1955)

Observation sur l'Exposé 1 : on peut donner, du théorème 3, (a) de l'Exposé 1, une démonstration directe qui n'utilise pas la théorie des anneaux de valuation. Il s'agit de prouver ceci : soit A un sous-anneau d'un anneau d'intégrité B , B entier sur A . Si $\underline{p}$ est un idéal premier de A , il existe un idéal premier $\underline{q}$ de B tel que $\underline{q} \cap A = \underline{p}$.

Posons $A - \underline{p} = S$. On va montrer que si $\underline{m}$ est un idéal maximal de l'anneau de fractions B_S , $\underline{m} \cap B = \underline{q}$ répond à la question ; autrement dit, que $\underline{m} \cap A = \underline{p}$.

B_S est entier sur A_S , qui est un anneau local dont l'idéal maximal est $\underline{p}A_S$; on a $(\underline{p}A_S) \cap A = \underline{p}$ (Exposé 1, proposition 1, (b)). D'après la proposition 7 de l'Exposé 1, $\underline{p}A_S$ est contenu dans le radical de B_S , donc dans $\underline{m}$. Ainsi $\underline{m} \cap A_S \supset \underline{p}A_S$, et puisque $\underline{m} \cap A_S$ est premier, on a $\underline{m} \cap A_S = \underline{p}A_S$. D'où $\underline{m} \cap A = (\underline{m} \cap A_S) \cap A = (\underline{p}A_S) \cap A = \underline{p}$.

Remarque : le théorème et sa démonstration s'étendent au cas où B n'est pas supposé intègre ; il faut alors faire usage de l'anneau de fractions B_S , mais cette notion n'a pas été définie dans l'Exposé 1.

1.- Modules noethériens.

Proposition 1.- Pour un module M sur un anneau A , les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) tout ensemble non vide de sous-modules de M admet au moins un élément maximal (pour la relation d'inclusion) ;

(ii) toute suite croissante de sous-modules M_n de M ($M_n \subset M_{n+1}$) est stationnaire (i.e: $M_n = M_{n+1}$ pour n assez grand) ;

(iii) tout sous-module de M est de type fini (i.e: engendré par un système fini d'éléments).

L'équivalence de (i) et (ii) est classique, et d'ailleurs purement ensembliste. Montrons que (i) entraîne (iii) : soit N un sous-module de M ;

soit N' un élément maximal de l'ensemble des sous-modules de type fini de N. On a $N' = N$, car si $a \in N$ et $a \notin N'$, le sous-module engendré par N' et a serait de type fini et $\neq N'$, contrairement à l'hypothèse de maximalité faite sur N'. Ainsi N est de type fini.

Enfin, (iii) entraîne (ii) : soit N la réunion d'une suite croissante de sous-modules M_n ; N est engendré par un système fini d'éléments ; ceux-ci appartiennent à un M_k, et par suite $M_n = M_k$ pour $n \geq k$.

<u>Remarque</u> : si un module M satisfait aux conditions de la proposition 1, <u>tout système</u> S <u>de générateurs de</u> M <u>contient une partie finie</u> S' <u>qui engendre</u> M. En effet, l'ensemble des modules engendrés par les parties finies de S possède un élément maximal, qui est nécessairement M.

<u>Définition</u> : on appelle <u>module noethérien</u> un module M qui satisfait aux trois conditions (équivalentes) (i), (ii), (iii) de la proposition 1.

<u>Proposition 2.- Soit une suite exacte de modules</u> $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \to 0$. <u>Pour que</u> M <u>soit noethérien, il faut et il suffit que</u> N <u>et</u> P <u>soient noethériens.</u>

La condition est nécessaire : à toute suite croissante de sous-modules de N (resp. de P), on associe la suite croissante des images directes dans M (resp. des images réciproques dans M), qui est stationnaire. La condition est suffisante : soit $\{M_n\}$ une suite croissante de sous-modules de M ; soit P_n l'image directe de M_n dans P, et soit N_n l'image réciproque de M_n dans N ; puisque N et P sont noethériens, on a $N_{n+1} = N_n$ et $P_{n+1} = P_n$ pour n assez grand. Soit alors $x \in M_{n+1}$. Puisque $P_{n+1} = P_n$, il y a un $x' \in M_n$ tel que $g(x-x') = 0$, d'où $x - x' \in f(N)$; comme $x, x' \in M_{n+1}$, on a $x - x' \in f(N_{n+1}) = f(N_n)$, puisque $N_{n+1} = N_n$; on a donc $x - x' \in M_n$, d'où $x \in M_n$, et $M_{n+1} = M_n$.

<u>Corollaire : Si un module</u> M <u>est somme d'une famille finie de sous-modules noethériens</u> M_i, M <u>est noethérien.</u>

On procède par récurrence sur le nombre des M_i, ce qui ramène la démonstration au cas de deux sous-modules M_1 et M_2. Alors M/M_1 s'identifie à un quotient de M_2, donc est noethérien ; puisque M_1 et M/M_1 sont noethériens, M est noethérien.

2.- Anneaux noethériens.

Définition : un anneau A est dit noethérien s'il est noethérien comme A-module. Les propriétés (i) , (ii) et (iii) de la proposition 1 valent alors pour les idéaux de A .

Proposition 3.- Tout module M de type fini sur un anneau noethérien est un module noethérien.

En effet, M est une somme finie de sous-modules monogènes, dont chacun est noethérien (quotient du A-module A); il suffit alors d'appliquer le corollaire de la proposition 2.

Proposition 4.- Soit A un anneau d'intégrité noethérien, et soit S une partie non vide, multiplicativement stable, de A ne contenant pas 0 . Alors l'anneau A_S est noethérien.

En effet, soit une suite croissante d'idéaux $\underline{m}'_n$ de A_S ; les idéaux $\underline{m}_n = \underline{m}'_n \cap A$ de A forment une suite croissante, donc stationnaire ; la suite $\underline{m}'_n$ est donc stationnaire, en vertu de la proposition 1, (a) de l'Exposé 1.

Théorème 1 (Hilbert).- Si un anneau A est noethérien, l'anneau des polynomes $A[X]$ est noethérien.

Démonstration : soit $\underline{a}$ un idéal de $A[X]$; soit M_n le A-module des polynomes de degré $\leq n$, et $\underline{a}_n = \underline{a} \cap M_n$. Le A-module $\underline{a}_n$ est de type fini, puisque sous-module de M_n qui est somme directe de $n+1$ modules isomorphes à A . Pour tout $\mu \in M_n$, notons $f_n(\mu)$ le coefficient de X^n dans μ ; f_n est une forme linéaire sur M_n , donc l'image $f_n(\underline{a}_n) = \underline{b}_n$ est un idéal de A . Si $\mu \in \underline{a}_n$, alors $X\mu \in \underline{a}_{n+1}$ et $f_{n+1}(X\mu) = f_n(\mu)$; donc $\underline{b}_n \subset \underline{b}_{n+1}$. Puisque A est noethérien, il existe un entier p tel que $\underline{b}_n = \underline{b}_p$ pour $n \geq p$.

Montrons, par récurrence sur $n \geq p$, que $\underline{a}_n$ est contenu dans l'idéal de $A[X]$ engendré par $\underline{a}_p$. C'est trivial pour $n = p$; supposons-le vrai pour $n-1$ $(n > p)$, et montrons-le pour n . Soit $\mu \in \underline{a}_n$; puisque $f_n(\mu) \in \underline{b}_p$, il existe $\nu \in \underline{a}_p$ tel que $f_p(\nu) = f_n(\mu)$; donc $f_n(\mu - X^{n-p}\nu) = 0$, c'est-à-dire $\mu - X^{n-p}\nu \in \underline{a}_{n-1}$, et par suite μ est dans l'idéal de $A[X]$ engendré par $\underline{a}_p$.

Ainsi $\underline{a}$ est l'idéal de $A[X]$ engendré par $\underline{a}_p$. Un système fini de générateurs de $\underline{a}_p$ comme A-module engendre donc $\underline{a}$ comme $A[X]$-module, et ceci achève la démonstration.

<u>Corollaire du théorème 1</u> : <u>Soit</u> B <u>un sur-anneau d'un anneau noethérien</u> A , <u>engendré (comme anneau) par</u> A <u>et un nombre fini d'éléments</u> $x_i \in B$; <u>alors</u> B <u>est noethérien.</u>

En effet, on se ramène par récurrence au cas où B est engendré par A et un élément x ; alors B est isomorphe à un quotient de $A[X]$.

3.- Théorème de Krull-Artin et ses conséquences.

Rappelons la notation classique : si M est un A-module, et $\underline{a}$ un idéal de A , on note $\underline{a}M$ le sous-module de M , formé des sommes finies d'éléments de la forme ax , avec $a \in \underline{a}$, $x \in M$. On applique cette notation au cas où M est aussi un idéal : d'où la notion de <u>produit</u> de deux idéaux, et de <u>puissance</u> $\underline{a}^n$ d'un idéal $\underline{a}$.

<u>Théorème 2.- Soient</u> $\underline{a}$ <u>un idéal d'un anneau noethérien</u> A , N <u>un A-module de type fini, et</u> P <u>un sous-module de</u> N . <u>Il existe un entier</u> $h \geq 0$ <u>tel que</u>

$$(\underline{a}^n N) \cap P = \underline{a}^{n-h}((\underline{a}^h N) \cap P) \quad \text{pour tout} \quad n \geq h .$$

<u>Démonstration</u> : il est évident que

$$\underline{a}^{n-h}((\underline{a}^h N) \cap P) \subset (\underline{a}^n N) \cap P .$$

On va montrer l'inclusion en sens contraire. Soit $(u_1 , \ldots , u_r)$ un système fini de générateurs de l'idéal $\underline{a}$; et soit $(\mu_1 , \ldots , \mu_s)$ un système fini de générateurs du module N . Tout élément de $\underline{a}^n N$ s'écrit $\sum_{1 \leq j \leq s} F_j(u_1 , \ldots , u_r) \mu_j$, où $F_j(X_1 , \ldots , X_r)$ est un élément homogène de degré n de l'anneau des polynomes $A[X_1 , \ldots , X_r] = \Pi$. Le produit Π^s de s exemplaires de Π est un Π-module noethérien. Soit S l'ensemble des $(F_1 , \ldots , F_s) \in \Pi^s$ tels que $F_1 , \ldots , F_s$ soient homogènes d'un même degré, et que $\sum_{1 \leq j \leq s} F_j(u_1 , \ldots , u_r) \mu_j \in P$. Le sous-module de Π^s engendré par S est engendré par une partie <u>finie</u> $\{\Phi^{(k)}\}$ de S , avec $\Phi^{(k)} = (F_1^{(k)} , \ldots , F_s^{(k)})$; soit n_k le degré commun des polynomes homogènes $F_1^{(k)} , \ldots , F_s^{(k)}$. Alors $\nu^{(k)} = \sum_{1 \leq j \leq s} F_j^{(k)}(u_1 , \ldots , u_r) \mu_j \in (\underline{a}^{n_k} N) \cap P$.

Prenons $h = \sup n_k$, et soit n un entier $\geq h$. Soit $\nu \in (\underline{a}^n N) \cap P$; on a $\nu = \sum_j F_j(u_1 , \ldots , u_r) \mu_j$, et $\Phi = (F_1 , \ldots , F_s) \in S$. Donc $\Phi = \sum_k H_k \Phi^{(k)}$, où $H_k(X_1 , \ldots , X_r) \in \Pi$ est homogène de degré $n - n_k$.

Ainsi $\nu = \sum_k H_k(u_1, \ldots, u_r)\, \nu^{(k)}$. Or

$$H_k(u_1, \ldots, u_r)\, \nu^{(k)} \in \underline{a}^{n-n_k}((\underline{a}^{n_k}N) \cap P) \subset \underline{a}^{n-h}((\underline{a}^hN) \cap P) .$$

Finalement $\nu \in \underline{a}^{n-h}((\underline{a}^hN) \cap P)$, ce qui prouve l'inclusion

$$(\underline{a}^nN) \cap P \subset \underline{a}^{n-h}((\underline{a}^hN) \cap P) .$$

Corollaire : Soient $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r$ des idéaux (en nombre fini) d'un anneau noethérien A . Il existe un entier $h > 0$ tel que

$$(\underline{a}_1)^h \cap \ldots \cap (\underline{a}_r)^h \subset \underline{a}_1 \ldots \underline{a}_r .$$

(au second membre figure le produit des idéaux $\underline{a}_i$) .

L'assertion est triviale pour $r = 1$. Supposons-la vraie pour $r - 1$ $(r > 1)$, et appliquons le théorème en prenant $\underline{a} = \underline{a}_1$, $N = A$, $P = (\underline{a}_2)^{h'} \cap \ldots \cap (\underline{a}_r)^{h'}$, h' étant tel que $(\underline{a}_2)^{h'} \cap \ldots \cap (a_r)^{h'} \subset \underline{a}_2 \ldots \underline{a}_r$. D'après le théorème, il existe h'' tel que

$$(\underline{a}_1)^{h''} \cap (\underline{a}_2)^{h'} \cap \ldots \cap (\underline{a}_r)^{h'} \subset \underline{a}_1((\underline{a}_2)^{h'} \cap \ldots \cap (\underline{a}_r)^{h'}) .$$

Il suffit alors de prendre $h = \sup(h', h'')$.

Théorème 3.- Soit $\underline{r}$ le radical d'un anneau noethérien A . Pour tout A-module de type fini M , on a

$$\bigcap_n (\underline{r}^nM) = 0 .$$

Démonstration : soit $P = \bigcap_n (\underline{r}^nM)$. On a $P \subset M$, donc P est de type fini. D'après le théorème 2 , il existe un entier h tel que

$$(\underline{r}^nM) \cap P = \underline{r}^{n-h}(\underline{r}^hM \cap P) \qquad \text{pour } n \geq h .$$

Prenant $n = h + 1$, il vient $P = \underline{r}P$, et ceci implique $P = 0$ (Exposé 1, Appendice).

Interprétation : sur le module de type fini M , considérons la topologie définie par les sous-modules $\underline{i}^nM$, $\underline{i}$ étant un idéal de A contenu dans le radical. Le théorème 3 affirme que cette topologie est séparée (l'intersection des voisinages de 0 est réduite à 0). Pour cette topologie, tout sous-module N est fermé (car le module quotient M/N est séparé) ; de plus, la topologie définie sur N par les sous-modules $\underline{i}^nN$ est la topologie induite par celle de M , en vertu du théorème 2.

Remarque : le théorème 3 s'applique notamment lorsque A est un anneau local noethérien, $\underline{r}$ étant alors l'idéal maximal de A .

4.- Idéaux premiers contenant un idéal donné.

Voici une proposition préliminaire, valable pour tout anneau (non nécessairement noethérien) :

Proposition 5.- Dans un anneau A , l'intersection de tous les idéaux premiers de A se compose des éléments nilpotents.

Démonstration : il est clair qu'un élément nilpotent appartient à tout idéal premier. Réciproquement, soit $\underline{i}(A)$ l'intersection des idéaux premiers de A ; si A est sous-anneau d'un anneau B , $\underline{i}(A)$ est contenu dans le radical $\underline{r}(B)$: car si $\underline{m}$ est un idéal maximal de B , $\underline{m} \cap A$ est premier. Prenons en particulier $B = A[X]$; si $a \in \underline{i}(A)$, aX est dans le radical de $A[X]$, donc $1 - aX$ est inversible dans $A[X]$, ce qui implique que $a^n = 0$ pour un entier n convenable.

(Remarque : on peut donner une autre démonstration : si $a \in A$ n'est pas nilpotent, on montre l'existence d'un idéal premier ne contenant pas a . Pour cela, on utilise l'anneau de fractions A_S , où S désigne l'ensemble des puissances de a ; mais comme dans l'Exposé 1 , la théorie des anneaux de fractions n'a été faite que pour un anneau d'intégrité, nous ne donnons pas ici cette démonstration).

Proposition 6.- Soit $\underline{q}$ un idéal de A ; soit $\underline{q}'$ l'intersection des idéaux premiers contenant $\underline{q}$. Tout élément de $\underline{q}'$ possède une puissance dans $\underline{q}$. Si de plus A est noethérien, on a $\underline{q}'^n \subset \underline{q}$ pour un entier n convenable.

Démonstration : la première assertion résulte de la proposition 5 , appliquée à l'anneau quotient $A/\underline{q}$. Supposons A noethérien, et soit $\{x_1 , \dots , x_n\}$ un ensemble fini de générateurs de $\underline{q}'$; pour chaque i il y a un $n(i)$ tel que $x_i^{n(i)} \in \underline{q}$. Soit $n = n(1) + \dots + n(r)$; tout produit de n éléments de l'ensemble $\{x_1 , \dots , x_r\}$ est alors dans $\underline{q}$, d'où $\underline{q}'^n \subset \underline{q}$.

Théorème 4.- Soient A un anneau noethérien, et $\underline{q}$ un idéal de A . Dans l'ensemble des idéaux premiers contenant $\underline{q}$, il existe des éléments minimaux $\underline{p}_i$; ceux-ci sont en nombre fini, et tout idéal premier contenant $\underline{q}$ contient l'un des $\underline{p}_i$.

Corollaire : avec les notations de la proposition 6, on a $\underline{q}' = \bigcap_i \underline{p}_i$, d'où :

$$\underline{q} \subset \bigcap_i \underline{p}_i \ , \qquad \underline{q} \supset (\bigcap_i \underline{p}_i)^n \text{ pour un entier } n \text{ convenable.}$$

Démonstration du théorème : on utilisera un lemme de la théorie des ensembles, qui est utile en diverses circonstances :

Lemme : Soit E un ensemble de parties d'un ensemble A, tel que l'intersection de deux éléments de E appartienne à E, et que toute suite croissante d'éléments de E soit stationnaire. Un $a \in E$ est dit *réductible* s'il existe $b \in E$, $c \in E$ tels que $a = b \cap c$, $b \neq a$, $c \neq a$; a est dit *irréductible* dans le cas contraire. Alors *tout* $a \in E$ *est intersection d'un nombre fini d'éléments irréductibles*. De plus, s'il est vrai qu'un élément irréductible ne peut jamais contenir une intersection $b \cap c$ sans contenir b ou c, alors *l'ensemble des éléments irréductibles qui contiennent un élément donné* $a \in E$ *possède des éléments minimaux* p_i ; *ceux-ci sont en nombre fini, et tout élément irréductible qui contient* a *contient l'un d'eux* ; a *est donc l'intersection des* p_i .

La démonstration du lemme est immédiate ; on la laisse au lecteur.

Revenons alors au théorème 4 . Prenons pour E l'ensemble des idéaux de A qui sont intersection (finie ou infinie) d'idéaux premiers. On va montrer : pour qu'un idéal $\underline{a} \in E$ soit irréductible (au sens du lemme), il faut et il suffit que $\underline{a}$ soit un idéal premier.

Tout d'abord, si $\underline{a}$ n'est pas premier, $\underline{a}$ est réductible ; en effet, soient $x \in A$, $y \in A$ tels que $xy \in \underline{a}$, $x \notin \underline{a}$, $y \notin \underline{a}$. Pour tout idéal premier $\underline{p}$ contenant $\underline{a}$, on a $x \in \underline{p}$ ou $y \in \underline{p}$; donc $\underline{a} = \underline{b} \cap \underline{c}$, $\underline{b}$ désignant l'intersection des idéaux premiers contenant $\underline{a}$ et l'élément x, et $\underline{c}$ désignant l'intersection des idéaux premiers contenant $\underline{a}$ et l'élément y. Comme $x \in \underline{b}$ et $x \notin \underline{a}$, on a $\underline{b} \neq \underline{a}$; de même $\underline{c} \neq \underline{a}$. Donc $\underline{a}$ est réductible.

Maintenant, montrons que si $\underline{a} \supset \underline{b} \cap \underline{c}$, $\underline{a} \not\supset \underline{b}$, $\underline{a} \not\supset \underline{c}$, alors $\underline{a}$ n'est pas premier. En effet, soient $x \in A$ et $y \in A$ tels que $x \in \underline{b}$, $x \notin \underline{a}$, $y \in \underline{c}$, $y \notin \underline{a}$. Alors $xy \in \underline{a}$, ce qui montre que $\underline{a}$ n'est pas premier. En particulier, si $\underline{a}$ est réductible, $\underline{a}$ n'est pas premier.

Ainsi les éléments irréductibles de l'ensemble E sont exactement les idéaux premiers de l'anneau A. Et si un $\underline{a}$ irréductible contient une intersection $\underline{b} \cap \underline{c}$ d'éléments de E, alors $\underline{a}$ contient $\underline{b}$ ou $\underline{c}$. Le lemme est donc applicable, et donne le théorème.

5.- Anneaux noethériens normaux.

Proposition 7.- Soit B *un anneau local, noethérien et intègre. Si l'idéal maximal* $\underline{m}$ *de* B *est principal,* B *est un anneau de valuation de*

<u>son corps des fractions</u> K , <u>et tout idéal non nul de</u> B <u>est une puissance de l'idéal maximal.</u>

<u>Démonstration</u> : l'intersection des puissances $\underline{m}^k$ est réduite à 0 (théorème 3). Soit $u \in B$, $u \neq 0$; soit n le plus grand entier k tel que $u \in \underline{m}^k$. Si z est un générateur de l'idéal principal $\underline{m}$, on a

$$z^{-n}u \in B \ , \qquad z^{-n}u \notin zB = \underline{m} \ ,$$

et par suite $z^{-n}u$ est un élément inversible de B . Donc l'idéal principal uB est égal à $z^nB = \underline{m}^n$.

Tout idéal $\neq 0$ de B étant une somme d'idéaux principaux $\neq 0$ est aussi une puissance $\underline{m}^n$. Soit alors $v \in K$, $v \neq 0$; on a $v = u/u'$, $u \in B$, $u' \in B$; il existe des entiers $n \geq 0$ et $p \geq 0$ tels que u/z^n et u'/z^p soient des éléments inversibles de B ; donc v ou v^{-1} appartient à B , qui est bien un anneau de valuation de K .

<u>Théorème 5.- Soit</u> A <u>un anneau d'intégrité noethérien, intégralement fermé dans son corps des fractions</u> K . <u>Soit</u> $x \in A$, $x \neq 0$. <u>Soit</u> $\underline{p}$ <u>l'un des éléments minimaux de l'ensemble des idéaux premiers contenant</u> x (théorème 4). Alors :

1°) <u>l'idéal maximal</u> $\underline{p}A_{\underline{p}} = \underline{m}$ <u>de l'anneau local</u> $A_{\underline{p}}$ <u>est engendré par un élément de</u> $\underline{p}$ (donc $A_{\underline{p}}$ est un <u>anneau de valuation de</u> K , d'après la proposition 7) ;

2°) $\underline{p}$ <u>est minimal dans l'ensemble de tous les idéaux</u> $\neq 0$ <u>de</u> A .

<u>Démonstration</u> : d'après la correspondance entre idéaux premiers de $A_{\underline{p}}$ et idéaux premiers de A contenus dans $\underline{p}$ (Exposé 1 , proposition 1), l'idéal maximal $\underline{p}A_{\underline{p}} = \underline{m}$ est l'unique idéal premier de $A_{\underline{p}}$ contenant x . Donc (proposition 6) on a $\underline{m}^k \subset xA_{\underline{p}}$ pour k assez grand. Soit n le plus petit des entiers k ayant cette propriété ; on a $n \geq 1$. Choisissons $y \in \underline{m}^{n-1}$ tel que $y \notin xA_{\underline{p}}$; on a $y\underline{m} \subset xA_{\underline{p}}$. D'où, en posant $xy^{-1} = z \in K$:

$$(1) \qquad z^{-1} \notin A_{\underline{p}} \ , \qquad z^{-1}\underline{m} \subset A_{\underline{p}} \ .$$

On va montrer que $z^{-1}\underline{m} = A_{\underline{p}}$. Comme $z^{-1}\underline{m}$ est un idéal de $A_{\underline{p}}$, il suffit de montrer que $z^{-1}\underline{m} \not\subset \underline{m}$. Raisonnons par l'absurde : si $z^{-1}\underline{m} \subset \underline{m}$, on a $z^{-k}\underline{m} \subset \underline{m}$ pour tout entier $k \geq 0$, donc $z^{-k}x \in \underline{m}$. Ainsi l'anneau $A_{\underline{p}}[z^{-1}]$ est contenu dans $x^{-1}A_{\underline{p}}$, qui est un $A_{\underline{p}}$-module monogène. Comme $A_{\underline{p}}$ est un anneau noethérien (proposition 4) , l'anneau $A_{\underline{p}}[z^{-1}]$ est un $A_{\underline{p}}$-module de type fini, donc z^{-1} est entier sur $A_{\underline{p}}$. Or $A_{\underline{p}}$ est intégralement fermé dans K (Exposé 1, proposition 5) ; d'où $z^{-1} \in A_{\underline{p}}$, contrairement à (3).

Ainsi $z^{-1}\underline{m} = A_{\underline{p}}$; donc $\underline{m}$ est l'idéal principal $zA_{\underline{p}}$, et on peut appliquer à l'anneau $A_{\underline{p}}$ la proposition 7. On a d'ailleurs $\underline{m}^2 \neq \underline{m}$; d'où $\underline{m}^2 \cap A \neq \underline{p}$. Il existe donc $t \in \underline{p}$ tel que $t \notin \underline{m}^2$; dans l'anneau $A_{\underline{p}}$, t est divisible par z et non par z^2, donc $tA_{\underline{p}} = \underline{m}$, ce qui achève de prouver l'assertion 1°) de l'énoncé.

D'après la proposition 7, $\underline{m}$ est l'unique idéal premier $\neq 0$ de $A_{\underline{p}}$. Donc (proposition 1 de l'Exposé 1) $\underline{p}$ est l'unique idéal premier de A contenu dans $\underline{p}$ et $\neq 0$; ceci prouve l'assertion 2°).

Corollaire du théorème 5 : soient A un anneau d'intégrité, K son corps des fractions, x un élément $\neq 0$ de A, $\underline{p}$ un élément minimal de l'ensemble des idéaux premiers contenant x. Si la fermeture intégrale A' de A dans K est un anneau noethérien, $\underline{p}$ est minimal dans l'ensemble des idéaux premiers $\neq 0$ de A.

En effet, soit $\underline{q}$ un idéal premier $\neq 0$ de A tel que $\underline{q} \subset \underline{p}$. D'après l'Exposé 1 (corollaire 1 du théorème 3), il existe des idéaux premiers $\underline{q}'$ et $\underline{p}'$ de A', tels que $\underline{q}' \subset \underline{p}'$, $\underline{q}' \cap A = \underline{q}$, $\underline{p}' \cap A = \underline{p}$. Soit $\underline{r}'$ un idéal premier de A' contenu dans $\underline{p}'$ et contenant x ; alors $\underline{r}' \cap A$ est premier, contient x et est contenu dans $\underline{p}$, donc $\underline{r}' \cap A = \underline{p}$, et par suite $\underline{r}' = \underline{p}'$ (Exposé 1, corollaire 1 du théorème 3). Ainsi $\underline{p}'$ est minimal dans l'ensemble des idéaux premiers de A' contenant x ; donc (théorème 5) $\underline{p}'$ est minimal dans l'ensemble des idéaux premiers $\neq 0$ de A'. Il s'ensuit que $\underline{q}' = \underline{p}'$, donc $\underline{q} = \underline{p}$.