R. Godement

Localités simples. II

Séminaire Henri Cartan, tome 8 (1955-1956), exp. n° 17, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A17_0>

Séminaire E.N.S. 1955/56
(H. CARTAN et C. CHEVALLEY)

LOCALITÉS SIMPLES. II

(Exposés de R. GODEMENT, les 16.4 et 23.4.1956)

1.- Anneaux locaux réguliers.

Soit M un anneau local noethérien de hauteur r ; on dit que M est <u>régulier</u> si l'idéal maximal $\underline{r}(M)$ peut être engendré par r éléments (qui forment nécessairement un système de paramètres de M). Lorsque M est une localité sur un corps, on dit que M est une localité <u>simple</u>. Dans ce qui suit on pose

$$G(M) = \sum \underline{r}(M)^n/\underline{r}(M)^{n+1} \qquad , \qquad L = M/\underline{r}(M) \quad .$$

<u>Théorème 1.- Soit</u> M <u>un anneau local noethérien de hauteur</u> r . <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(a) : M <u>est régulier</u> ;

(b) : $\underline{r}(M)/\underline{r}(M)^2$ <u>est un espace vectoriel de dimension</u> r <u>sur</u> L ;

(c) : <u>l'algèbre graduée</u> $G(M)$ <u>est isomorphe à une algèbre de polynomes.</u>

L'équivalence de (a) et (b) résultera évidemment du lemme suivant :

<u>Lemme 1 : Soit</u> $\underline{q}$ <u>un idéal d'un anneau local noethérien</u> M , tel que $\underline{q} \neq M$; <u>pour que des éléments</u> $x_i \in \underline{q}$ <u>engendrent</u> $\underline{q}$ <u>il faut et il suffit que leurs classes modulo</u> $\underline{q}^2$ <u>engendrent le</u> $(M/\underline{q})$-<u>module</u> $\underline{q}/\underline{q}^2$.

Supposons en effet que les classes $\overline{x_i} \in \underline{q}/\underline{q}^2$ engendrent $\underline{q}/\underline{q}^2$; si $\underline{q}'$ est l'idéal engendré par les x_i on aura évidemment $\underline{q} \subset \underline{q}' + \underline{q}^2$, d'où par récurrence $\underline{q} \subset \underline{q}' + \underline{q}^n$ pour tout $n \geqslant 2$; par suite (Exposé 2, théorème 3)

$$\underline{q} \subset \bigcap_{n \geq 2} (\underline{q}' + \underline{q}^n) = \underline{q}' \qquad ,$$

d'où le lemme.

Montrons maintenant que (c) implique (b) ; en effet si $G(M)$ est isomorphe à une algèbre de polynomes à s variables (nécessairement à coefficients dans L) , la dimension du vectoriel $G_n(M)$ est un polynome en n , de degré $s-1$; on sait par ailleurs que la fonction caractéristique de M filtré par les puissances de $\underline{r}(M)$ est de degré r ; donc $s = r$; par suite

$G_1(M) = \underline{r}(M)/\underline{r}(M)^2$ est de dimension r .

Reste à prouver que (a) implique (c). Supposons $\underline{r}(M)$ engendré par $x_1, \ldots, x_r$ et posons $S = L[X_1, \ldots, X_r]$; on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{a} \longrightarrow S \longrightarrow G(M) \longrightarrow 0$$

de S-modules gradués, et $\underline{a}$ est un idéal homogène de S . On en déduit

$$\binom{n+r-1}{r-1} = \ell g(S_n) = \ell g(G_n(M)) + \ell g(\underline{a}_n) \ ;$$

le premier membre a pour terme de plus haut degré $\frac{n^{r-1}}{(r-1)!}$; d'autre part $\ell g(G_n(M)) = \ell g(M/\underline{r}(M)^{n+1}) - \ell g(M/\underline{r}(M)^n)$ commence par $a.\frac{n^{r-1}}{(r-1)!}$, où a est un entier $\geqslant 1$; comme $\ell g(\underline{a}_n) \geq 0$ on a nécessairement $a = 1$, et on voit que la fonction polynomiale $\ell g(\underline{a}_n)$ est de degré $\leqslant r-2$; on va en déduire $\underline{a} = 0$. En effet si $\underline{a}$ contenait un élément u non nul, homogène de degré k , $\underline{a}_n$ contiendrait $u.S_{n-k} \simeq S_{n-k}$, donc serait de longueur $\geq \binom{n-k+r-1}{r-1}$, ce qui est impossible.

<u>Théorème 2.- Un anneau local régulier est intègre et intégralement clos</u> (en particulier, une localité simple est normale).

Le fait que M soit intègre résulte de ce que $G(M)$ l'est, comme anneau de polynomes sur un corps ; on laisse au lecteur le soin de faire la démonstration.

Montrons maintenant que M est intégralement fermé dans son corps des fractions F . Pour qu'un $x \in F$ soit entier sur M , il faut et il suffit que l'anneau $M[x]$ soit un M-module de type fini, ou (puisque M est noethérien) qu'il soit contenu dans un module de type fini, ce qui signifie qu'il doit exister un $a \in M$ tel que les ax^n soient dans M ; on a alors $x = b/a$ avec $b \in M$. Pour prouver que $x \in M$ il suffit de faire voir que $b \in aM$, donc, d'après le théorème de Krull-Artin, que $b \in aM + \underline{r}(M)^n$ pour tout n , et, en raisonnant par récurrence, tout revient à établir que $b \in aM + \underline{r}(M)^m$ implique $b \in aM + \underline{r}(M)^{n+1}$. Or posons $b = au + v$ avec $u \in M$, $v \in \underline{r}(M)^n$; comme $ax^q \in M$ pour tout q et comme $u \in M$ on a aussi $a(x-u)^q \in M$ pour tout q ; de $b = ax = au + v$ résulte $a(x-u)^q = v^q/a^{q-1}$ donc on a la relation $a.v^q/a^q \in M$ pour tout q ; soit h le plus grand entier tel que $a \in \underline{r}(M)^h$; soient $\bar{v}$ et $\bar{a}$ les images de v et a dans $G_m(M)$ et $G_h(M)$:

on a $\bar{a} \neq 0$, et de $a.v^q/a^q \in M$ pour tout q résulte, puisque $G(M)$ est intègre et noethérien, que $\bar{v}/\bar{a}$ est entier sur $G(M)$, donc appartient à $G(M)$ puisqu'un anneau de polynomes sur un corps est intégralement clos. Il existe donc un $u' \in \underline{r}(M)^{n-h}$ tel que l'on ait $\bar{v} = \bar{a}.\overline{u'}$, où $\overline{u'}$ est l'image de u' dans $G_{n-h}(M)$; cela signifie que $v \equiv au'$ (mod. $\underline{r}(M)^{n+1}$) d'où résulte que $b \equiv a(u + u')$ (mod. $\underline{r}(M)^{n+1}$) ; le théorème est donc démontré.

Corollaire : Soit M un anneau local régulier de hauteur r ; si $x_1 , \ldots , x_r$ engendrent $\underline{r}(M)$, alors pour tout i l'idéal $(x_1 , \ldots , x_i)$ est premier, et l'anneau local $M/(x_1 , \ldots , x_i)$ est régulier et de hauteur $r - i$.

En effet comme les x_k forment un système de paramètres de M , on sait (fin de l'Exposé précédent) que $M/(x_1 , \ldots , x_i)$ est de hauteur $r - i$; or l'idéal maximal de cet anneau est engendré par $r - i$ éléments : cet anneau quotient est donc régulier, donc intègre, ce qui démontre la proposition.

On peut facilement démontrer une réciproque du corollaire précédent : si un idéal premier $\underline{p}$ de M régulier est tel que $M/\underline{p}$ soit régulier, alors $\underline{p}$ est engendré par une partie d'un système de r générateurs de $\underline{r}(M)$.

Soit M un anneau local régulier de hauteur un ; alors $\underline{r}(M)$ est principal, en sorte que M est l'anneau d'une valuation discrète de son corps des fractions (Exposé 2, Proposition 7). De plus, un anneau local M de hauteur un est régulier si et seulement s'il est intègre et intégralement clos ; en effet prenons un $x \in M$ tel que l'idéal xM soit primaire ; alors $\underline{r}(M)$ est un idéal premier minimal de xM (c'est même le seul) ; donc (Exposé 2, théorème 5) l'idéal maximal de $M_{\underline{r}(M)} = M$ est principal, ce qui prouve que M est régulier. D'ailleurs le Théorème 5 de l'Exposé 2 montre en fait qu'on a le résultat plus général que voici :

Théorème 3.- Soit A un anneau d'intégrité noethérien et intégralement clos ; pour tout idéal premier-non-nul minimal $\underline{p}$ de A , l'anneau local $A_{\underline{p}}$ est régulier et de hauteur un.

En effet, l'idéal $\underline{p}.A_{\underline{p}}$ est principal.

Interprétation géométrique du Théorème 3 : toute sous-variété de dimension n-1 d'une variété V normale de dimension n est simple sur V (on dit que $W \subset V$ est simple sur V si l'anneau local de W dans V est régulier).

2.- Simplicité des localités pures.

Soit M une localité sur un corps K ; on dira que M est <u>pure</u> si elle est isomorphe à $A_{\underline{p}}$, où A est une algèbre de polynomes sur K (géométriquement, M est l'anneau local d'une variété par rapport à l'espace affine ambiant).

<u>Théorème 4</u>.- <u>Toute localité pure est simple</u>.

(Autrement dit, un espace affine n'a pas de points multiples).

Posons en effet $M = A_{\underline{p}}$, où $A = K[X_1 , \ldots , X_n]$, et $L = M/\underline{r}(M)$; soit x_i l'image de X_i dans L . Si M est de hauteur r , le degré de transcendance de L sur K est $n - r$; on peut donc supposer $x_1 , \ldots , x_{n-r}$ algébriquement indépendants sur K , et comme $\underline{p}$ est l'idéal des relations entre les x_i on voit que $\underline{p} \cap K[X_1 , \ldots , X_{n-r}] = 0$; donc M contient le corps $K(X_1 , \ldots , X_{n-r})$; en remplaçant K par ce corps, et A par $B = K(X_1 , \ldots , X_{n-r}) [X_{n-r+1} , \ldots , X_n]$, on est évidemment ramené au cas où L est une extension algébrique de K , i.e. au cas où $\underline{p}$ est maximal ; le théorème 4 est alors une conséquence du

<u>Théorème 4bis</u>.- <u>Soit</u> $\underline{p}$ <u>un idéal maximal d'un anneau de polynomes</u> $A = K[X_1 , \ldots , X_n]$; <u>alors</u> $\underline{p}$ <u>est engendré par</u> n <u>éléments</u>.

Considérons toujours le corps

$$L = A/\underline{p} = K[x_1 , \ldots , x_n] = K(x_1 , \ldots , x_n) \quad ;$$

puisque les x_i sont algébriques sur K , les sous-anneaux

$$K_i = K[x_1 , \ldots , x_i]$$

sont des sous-corps de L . Soit

$$\sum_k a_{ik}(x_1 , \ldots , x_{i-1})X^k$$

le polynome minimal de x_i sur le corps K_{i-1} ; les coefficients a_{ik} sont des polynomes en $x_1 , \ldots , x_{i-1}$, à coefficients dans K ; on peut donc former les éléments

$$P_i(X_1 , \ldots , X_i) = \sum_k a_{ik}(X_1 , \ldots , X_{i-1})X_i^k$$

de A ; ils sont évidemment dans $\underline{p}$ et de plus P_i est un polynome <u>unitaire en</u> X_i ; on va prouver qu'ils engendrent $\underline{p}$. Soit en effet un polynome $P \in \underline{p}$, et supposons que P contienne X_i mais non les variables suivantes.

Comme P_i est unitaire par rapport à X_i on peut écrire

$$P = P_i Q_i + R_i$$

où le degré de R_i par rapport à X_i est strictement inférieur à celui de P_i ; on a évidemment $R_i(x_1 , \ldots , x_i) = 0$; comme $P_i(x_1 ,\ldots, x_{i-1} , X)$ est le polynome minimal de x_i sur K_{i-1} , il s'ensuit que $R_i(x_1 , \ldots , x_{i-1} , X)$ est identiquement nul ; on peut donc écrire

$$R_i(X_1 , \ldots , X_i) = \sum_k R_{ik}(X_1 , \ldots , X_{i-1})X_i^k$$

où les R_{ik} sont dans $\underline{p}$, d'où le théorème en raisonnant par récurrence sur i .

3.- Formes linéaires sur $G_1(M)$ et dérivations.

Rappelons (Exposé 13, n° 1) que si M est un anneau on désigne par $D(M)$ le module des différentielles de M ; on a une dérivation $x \longrightarrow dx$ de M à valeurs dans $D(M)$. Si M est une algèbre sur un corps K on note $D_K(M)$ le module des K-différentielles de M ; ici encore on a une dérivation canonique $x \longrightarrow d_K x$ de M à valeurs dans $D_K(M)$. On a évidemment un homomorphisme $D(M) \longrightarrow D_K(M)$, à savoir $dx \longrightarrow d_K x$; il est surjectif, et son noyau est le sous-module de $D(M)$ sur lequel s'annulent toutes les K-dérivations de M (à valeurs dans un M-module quelconque).

Supposons que M soit un anneau local et posons

$$L = M/\underline{r}(M) \quad .$$

Si E est un module sur M , la suite exacte $0 \longrightarrow \underline{r}(M) \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ conduit à la suite exacte $\underline{r}(M) \otimes E \longrightarrow E \longrightarrow L \otimes E \longrightarrow 0$, d'où l'on déduit que

$$L \otimes_M E = E/\underline{r}(M)E \quad .$$

Nous allons maintenant définir un homomorphisme canonique d'espaces vectoriels sur L :

$$G_1(M) = \underline{r}(M)/\underline{r}(M)^2 \longrightarrow L \otimes_M D(M) \quad .$$

Pour cela considérons l'application $d : M \longrightarrow D(M)$; la formule $d(xy) = \ldots$ montre que d applique $\underline{r}(M)^2$ dans $\underline{r}(M)D(M)$, d'où par passage au quotient une application additive $G_1(M) \longrightarrow L \otimes_M D(M)$; celle-ci est compatible avec les structures d'espaces vectoriels sur L , i.e. de M-modules, en vertu du fait que pour $y \in \underline{r}(M)$ on a $d(xy) \equiv xdy$ (modulo $\underline{r}(M)D(M)$) .

Par transposition on voit que toute dérivation $D : M \longrightarrow L$ induit une forme linéaire $\bar{D}$ sur l'espace vectoriel $G_1(M)$, obtenue en prenant la restriction de D à $\underline{r}(M)$ et en observant que celle-ci est nulle sur $\underline{r}(M)^2$. On remarquera que $\bar{D}$ est nulle si et seulement si D est nulle sur $\underline{r}(M)$, i.e. si et seulement si D provient (par l'homomorphisme canonique $M \longrightarrow L$) d'une dérivation $L \longrightarrow L$. On déduit de là qu'on a une suite exacte

$$G_1(M) \longrightarrow L \otimes_M D(M) \longrightarrow D(L) \longrightarrow 0$$

(l'homomorphisme $L \otimes_M D(M) \longrightarrow D(L)$ n'est autre évidemment que $dx \longrightarrow d\bar{x}$, où $\bar{x}$ est la classe de x modulo $\underline{r}(M)$) .

Théorème 5.- Si M est un anneau local qui contient un corps K tel que l'extension L/K soit séparable, la suite

$$0 \longrightarrow G_1(M) \longrightarrow L \otimes_M D_K(M) \longrightarrow D_K(L) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Il suffit évidemment de montrer que toute forme L-linéaire sur $G_1(M)$ est induite par une K-dérivation de M dans L . Montrons d'abord qu'il en est bien ainsi dans le cas où M est somme directe de $\underline{r}(M)$ et d'un sous-anneau N contenant K (ce qui implique que N est un corps). Soit alors, pour $x \in M$, $x = f(x) + g(x)$, $f(x) \in N$, $g(x) \in \underline{r}(M)$; on vérifie aussitôt que g est une K-dérivation de M dans $\underline{r}(M)$; si h est une forme L-linéaire sur $G_1(M)$, h définit une application M-linéaire h^* de $\underline{r}(M)$ dans L et $h^* \circ g$ est une K-dérivation de M qui induit h sur $G_1(M)$. Soit maintenant $M' = M/(\underline{r}(M))^2$, d'où $K \subset M'$ et $G_1(M') = G_1(M)$; il suffit évidemment de démontrer le théorème pour M' , donc de démontrer le théorème sous l'hypothèse que $(\underline{r}(M))^2 = 0$. Il suffira donc d'établir que si un anneau local M contient un corps K et est tel que $L = M/\underline{r}(M)$ soit séparable sur K et que $(\underline{r}(M))^2 = \{0\}$, alors M est somme directe de $\underline{r}(M)$ et d'un sous-anneau contenant K . Puisque M contient un corps K , M a même caractéristique que L . Supposons d'abord cette caractéristique $p > 0$. L'assertion résulte alors du lemme un peu plus général suivant :

Lemme 1 : Soit M un anneau local de caractéristique p , et soit $L = M/\underline{r}(M)$: supposons que $(\underline{r}(M))^n = \{0\}$ pour un certain $n > 0$. Soit K un sous-corps de M sur lequel L est séparable. Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de M qui possède les propriétés suivantes : les images canoniques $\bar{a}_i$ des a_i dans L forment une p-base de L, et il y a une partie I' de I telle que les a_i pour $i \in I'$ forment une p-base de K. Soit q une puissance de p telle que $q \geq n$; M est alors somme directe de l'anneau $N = M^q[(a_i)_{i \in I}]$ et de $\underline{r}(M)$, et N contient K.

On notera que l'existence d'une famille $(a_i)_{i \in I}$ ayant les propriétés indiquées résulte immédiatement du fait que L est séparable sur K. Observons d'abord que l'on a $L = L^p[(\bar{a}_i)_{i \in I}]$, d'où par récurrence, $L = L^{p^h}[(\bar{a}_i)_{i \in I}]$ pour tout $h > 0$, et en particulier pour $p^h = q$; l'image de N dans L est donc L tout entier. Soit E l'ensemble des familles $(e_i)_{i \in I}$ d'entiers ≥ 0 presque tous nuls ; si $e = (e_i)_{i \in I}$, soit $\bar{a}^e = \prod_{i \in I} \bar{a}_i^{e_i}$, $a^e = \prod_{i \in I} a_i^{e_i}$. Si $h > 0$, soit E_h l'ensemble des $e = (e_i)_{i \in I}$ tels que $e_i < p^h$ pour tout i. Les $\bar{a}^e$, $e \in E_1$, forment une base de L/L^p ; les $\bar{a}^{p^k e}$ $(e \in E_1)$ forment donc une base de $L^{p^k}/L^{p^{k+1}}$. Or, tout $e \in E_h$ se met d'une manière et d'une seule sous la forme $e = \sum_{k=0}^{h-1} p^k e_k$, où les e_k sont dans E_1 ; il en résulte aussitôt que les aussitôt que les $\bar{a}^e$, $e \in E_h$, forment une base de L/L^{p^h}. Nous désignerons par F l'ensemble E_h pour la valeur de h telle que $p^h = q$. Il est clair que tout élément u de N se met sous la forme $\sum_{e \in F} c_e^q a^e$, les c_e étant dans M. Supposons que $u \in \underline{r}(M)$; soit alors $\bar{c}_e$ l'image de c_e dans L. On a $\sum_{e \in F} \bar{c}_e^q \bar{a}^e = 0$, d'où $\bar{c}_e^q = 0$, $\bar{c}_e = 0$, $c_e \in \underline{r}(M)$ et $c_e^q = 0$ puisque $q \geq n$. On a donc $N \cap \underline{r}(M) = \{0\}$. Puisque $(a_i)_{i \in I'}$ est une p-base de K, on a $K = K^q[(a_i)_{i \in I'}] \subset N$, et le lemme est démontré.

Supposons maintenant M et L de caractéristique 0 (avec $(\underline{r}(M))^2 = \{0\}$). Parmi les sous-corps de M contenant K, il en existe au moins un maximal, soit N ; soit $\bar{N}$ son image dans L. Soit $\bar{u} \in L$, et soit u un représentant de $\bar{u}$ dans M. Si $\bar{u}$ était transcendant sur $\bar{N}$, on aurait $F(u) \notin \underline{r}(M)$ pour tout polynome $F \neq 0$ à coefficients dans N ; M étant un anneau local, tout élément $\neq 0$ de $N[u]$ y serait inversible, et M contiendrait un corps des fractions de $N[u]$, ce qui est impossible. Donc $\bar{u}$ est algébrique sur $\bar{N}$; soient $\bar{F}$ son polynome minimal, et F le polynome à coefficients dans N qui donne $\bar{F}$ par réduction des coefficients modulo $\underline{r}(M)$. Comme $\bar{N}$ est de caractéristique 0, $\bar{F}'(\bar{u}) \neq 0$, d'où $F'(u) \notin \underline{r}(M)$, et $F'(u)$ est inversible dans M. Soit $u' = u-(F'(u))^{-1}F(u)$; comme $F(u) \in \underline{r}(M)$ et $(\underline{r}(M))^2 = \{0\}$, on a $F(u') = 0$. Comme F est irréductible, $N[u']$ est un corps, d'où $u' \in N$, $\bar{u} \in \bar{N}$. On a donc $\bar{N} = L$. Comme N est un corps, la somme $M = N + \underline{r}(M)$ est directe. Le théorème 5 est donc établi.

Prenant pour K le sous-corps primitif de M, on en déduit que la suite

$$0 \longrightarrow G_1(M) \longrightarrow L \otimes_M D(M) \longrightarrow D(L) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Corollaire au théorème 5 : Soit M un anneau local régulier qui a même caractéristique que son corps des restes $L = M/\underline{r}(M)$; soit $\underline{p}$ un idéal premier de M ; soient r et $r-s$ les hauteurs de M et de $M/\underline{p}$. Pour que $M/\underline{p}$ soit régulier, il faut et suffit qu'il existe s éléments $x_i \in M/\underline{p}$ et s dérivations D_i de M dans L tels que $\det(D_i x_j) \neq 0$. Si de plus L est séparable sur un sous-corps K de M, on peut astreindre les D_i à être des K-dérivations.

En effet, posant $M' = M/\underline{p}$, on doit exprimer que

$$G_1(M') = G_1(M)/\tilde{\underline{p}}$$

(où $\tilde{\underline{p}}$ est l'image de $\underline{p}$ dans $G_1(M)$) est de dimension $r-s$ sur L ; or $G_1(M)$ est de dimension r puisque M est régulier ; tout revient donc à exprimer que l'image de $\underline{p}$ est de dimension s (et l'on sait déjà, puisque $\dim G_1(M') \geq r-s$, qu'elle est de dimension $\leq s$), i.e. contient s vecteurs linéairement indépendants ; comme toute forme linéaire sur $G_1(M)$ provient d'une dérivation (resp. K-dérivation si L est séparable) de M dans L, on trouve immédiatement le résultat cherché.

Bien entendu le corollaire (appliqué à $\underline{p} = 0$) donne une condition nécessaire et suffisante pour que r éléments de $\underline{r}(M)$ engendrent $\underline{r}(M)$.

4.- Le critère de Zariski.

C'est le suivant :

Théorème 6.- Soient A une algèbre de polynomes sur un corps K, $\underline{p}$ un idéal premier de A, s la hauteur de $A_{\underline{p}}$, et $\underline{m}$ un idéal premier de A contenant $\underline{p}$. Pour que la localité $A_{\underline{m}}/\underline{p}A_{\underline{m}}$ (anneau local de $\underline{m}/\underline{p}$ dans $A/\underline{p}$) soit simple, il faut et il suffit qu'il existe s éléments $f_i \in \underline{p}$ et s

<u>dérivations</u> $D_i : A \longrightarrow A$, <u>tels que</u> det $(D_i f_j)$ <u>ne soit pas dans</u> $\underline{m}$. <u>Si de plus le corps</u> $A_{\underline{m}}/\underline{m}A_{\underline{m}}$ <u>est séparable sur</u> K , <u>on peut astreindre les</u> D_i à <u>être des</u> K-<u>dérivations de</u> A .

Soit D une dérivation $A \longrightarrow A$; D se prolonge en une dérivation $A_{\underline{m}} \longrightarrow A_{\underline{m}}$, donc définit une dérivation $A_{\underline{m}} \longrightarrow L$ et par suite une forme linéaire $\overline{D}$ sur $G_1(A_{\underline{m}})$; compte tenu du Corollaire du Théorème 5 (appliqué à la localité simple $A_{\underline{m}}$ et à l'idéal premier $\underline{p}.A_{\underline{m}}$ de la dite), tout revient à prouver que <u>toute forme linéaire sur</u> $G_1(A_{\underline{m}})$ <u>est induite à un facteur constant près</u> (non nul) <u>par une dérivation</u> $A \longrightarrow A$.

Posons $A = K[X_1 , \ldots , X_n]$ et $M = A_{\underline{m}}$; il existe des $p_i \in \underline{m}$ qui engendrent l'idéal $\underline{r}(M)$. Toute forme linéaire sur $G_1(M)$ provient d'une dérivation $D : M \longrightarrow L = M/\underline{r}(M)$; montrons d'abord qu'une telle dérivation se remonte en une dérivation $M \longrightarrow M$.
Puisqu'une dérivation de M (à valeurs dans un M-module arbitraire) est déterminée par sa restriction à K et ses valeurs sur les X_i , et comme ces données peuvent être choisies arbitrairement, il suffit évidemment de montrer que toute dérivation $K \longrightarrow L$ provient d'une dérivation $K \longrightarrow M$; or les dérivations de K (à valeurs dans un vectoriel quelconque sur K) correspondent aux homomorphismes du vectoriel $D(K)$; comme K est un <u>corps</u> il est clair que notre assertion est démontrée (plus généralement : si l'on a un vectoriel E sur K , toute dérivation de K à valeurs dans un quotient de E provient d'une dérivation à valeurs dans E).

Cela étant, on voit que toute forme linéaire sur $G_1(M)$ provient d'une dérivation $D : M \longrightarrow M$. Pour établir le Théorème, il suffit de prouver qu'étant donné $D : M \longrightarrow M$, il existe un $u \in A-\underline{m}$ et une dérivation $D' : A \longrightarrow A$ telle que l'on ait

$$(*) \qquad Dp_i \equiv u.D'p_i \quad \mathrm{mod}.\underline{r}(M)$$

pour tout i (car la forme linéaire sur $G_1(M)$ induite par D est déterminée par les valeurs des Dp_i modulo $\underline{r}(M)$) . Or, soit (a_ρ) la famille <u>finie</u> des coefficients (dans K) des divers polynomes p_i ; pour résoudre (*) il <u>suffit</u> de construire une dérivation $D' : A \longrightarrow A$ et un $u \in A-\underline{m}$ tel que l'on ait

$$Da_\rho = u.D'a_\rho \quad ; \quad DX_i = u.D'X_i \quad ;$$

le seul point non trivial est évidemment de résoudre le système $Da_\rho = u.D'a_\rho$, ce qui ne fait d'ailleurs intervenir que les restrictions de D et D' au corps K (lesquelles sont des dérivations $K \longrightarrow M$ et $K \longrightarrow A$). Or considérons dans $D(K)$ les différentielles da_ρ ; toute relation linéaire (à coefficients dans K) entre celles-ci se transporte aux Da_ρ, et sera automatiquement vérifiée par les $D'a_\rho$; on peut donc se borner au cas où les différentielles da_ρ sont linéairement indépendantes sur K ; mais alors il existe une dérivation $K \longrightarrow A$ qui prend sur les a_ρ des valeurs arbitrairement données, et comme il existe un $u \in A-\underline{m}$ tel que les $u^{-1}.Da_\rho$ soient tous dans A , il est clair que le problème est résolu.

Lorsque de plus L est séparable sur K , on peut prendre pour D une K-dérivation et a fortiori pour D' une K-dérivation, car dans ce cas la meilleure façon de résoudre $D'a_\rho = 0$ est de prendre $D' = 0$ sur K . Le Théorème est donc entièrement démontré.

Pour interpréter géométriquement le théorème 6, prenons un corps algébriquement clos Ω contenant K , et considérons dans l'espace affine Ω^n les K-variétés V et $W \subset V$ qui correspondent aux idéaux premiers $\underline{p}$ et $\underline{m}$ de $A = K[X_1, \dots, X_n]$; M est l'anneau local (sur K) de W dans V , et dire que M est régulier revient (par définition) à dire que W est K-simple sur V . Le Théorème 6 s'interprète alors comme suit ; V étant de dimension n-s , pour que W soit K-simple sur V il faut et il suffit qu'il existe s polynomes f_i nuls sur V , et s dérivations D_i de l'anneau des fonctions polynomes (sur K) de l'espace affine ambiant, tels que les restrictions à W des fonctions $D_i f_j$ aient un déterminant non (identiquement) nul. <u>Si en particulier le corps des fonctions</u> K-<u>rationnelles de</u> W <u>est séparable sur</u> K , W <u>est</u> K-<u>simple sur</u> V <u>si et seulement si la matrice formée par les restrictions</u> <u>à</u> W <u>des fonctions</u> $\partial f_i/\partial X_j$ <u>est de rang</u> $s = n - \dim(V)$, i.e. si l'un des jacobiens

$$\frac{D(f_1, \dots, f_s)}{D(X_{i_1}, \dots, X_{i_s})}$$

n'est pas identiquement nul sur W .

Il résulte immédiatement de là que <u>l'ensemble des localités simples d'un schéma sur</u> K <u>est un ouvert non vide</u> ("non vide" parce que, par exemple, V est toujours simple sur V) .

D'autre part, <u>soient</u> V <u>une</u> K-<u>variété et</u> W <u>une sous-K-variété de</u> V ; <u>si</u> W <u>contient une sous-K-variété</u> K-<u>simple sur</u> V , <u>alors</u> W <u>elle-même est</u> K-<u>simple sur</u> V ; cela résulte trivialement du critère de Zariski. On peut aussi exprimer ce résultat comme suit : <u>si</u> M <u>est une localité simple, alors</u> $M_{\underline{p}}$

est une localité simple pour tout idéal premier p de M. On démontre que ce résultat subsiste pour tous les anneaux locaux noethériens réguliers (la démonstration reposant sur le "théorème des syzygies").

Supposons enfin que K soit algébriquement clos, et soit V une variété irréductible dans K^n. Pour qu'une sous-variété W de V soit simple sur V, il est nécessaire et suffisant qu'elle contienne un point simple de V, comme il résulte du critère jacobien. L'ensemble des points singuliers de V est un sous-ensemble fermé de V (si V est de dimension s, ce fermé est de dimension $\leq s-1$, et même $\leq s-2$ si V est normale), et les sous-variétés non simples de V sont celles qui sont contenues dans cet ensemble.

Notons enfin que dans la géométrie algébrique à la Weil, le critère de K-simplicité est en même temps un critère de simplicité "absolue" ; Weil ne considère en effet (dans le cas affine, et aussi dans le cas abstrait) que des K-variétés dont les fonctions rationnelles sur K forment une extension régulière, et a fortiori séparable, de K ; le critère de K-simplicité s'exprime donc par un jacobien usuel, et subsiste donc par toute extension du corps de base.

Il est d'ailleurs facile de prouver le résultat suivant :

Théorème 7.- *Soient* M *une localité simple sur un corps* K, $L = M/\underline{r}(M)$ *le corps des restes de* M, *et* K' *une extension de* K. *Si* K' *ou* L *est séparable sur* K, *toute localité déduite de* M *par extension à* K' *du corps de base est simple.*