P. Cartier

# Erratum à l'exposé 13

*Séminaire Henri Cartan*, tome 8 (1955-1956), p. 1
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A15_0>

Séminaire E.N.S., 1955/56
(H. CARTAN et C. CHEVALLEY)

EXTENSION DU CORPS DE BASE DANS LES SCHÉMAS
(Exposé de P. CARTIER et C. CHEVALLEY, 19.3.1956)

ERRATUM à l'exposé 13

Le 2) du Théorème 1 doit se lire ainsi :

2) Si $K$ est de caractéristique $p \neq 0$, et si $K$ contient $L^p$, alors toute dérivation $D$ définie sur $K$ à valeurs dans un espace vectoriel sur $L$ qui est nulle dans $L^p$, se prolonge en une dérivation $\bar{D}$ de $L$. De plus si on se donne un élément $x$ de $L - K$, on peut toujours choisir $\bar{D}$ de sorte que $\bar{D}(x) \neq 0$.

Démonstration du théorème 1 : Si $K$ est de caractéristique $0$ et $x$ transcendant sur $K$, on peut d'après ce qu'on a vu prolonger $D$ à $K(x)$ de sorte que $D(x) \neq 0$ ; si la caractéristique est $p \neq 0$, et si $x \in L - K$, on a $x^p = u \in K$ et $D(u) = 0$ et on peut donc prolonger $D$ à $K(x)$ de sorte que $D(x) \neq 0$ d'après le c) qui précède. Soit alors d'après le théorème de Zorn $(K', D')$ un prolongement maximal de $(K(x), D)$ ; supposons $K' \neq L$ et soit $y \in L - K'$. Si la caractéristique est $0$, $D'$ se prolonge à $K'(y) \neq K'$ d'après a) et b) ; si la caractéristique est $p \neq 0$, on a $y^p \in K'$ et $D'(y^p) = 0$, et le prolongement est encore possible dans ce cas d'après c). Il en résulte dans tous les cas une contradiction avec le fait que $(K', D')$ est un prolongement maximal de $(K(x), D)$.

Ajoutons deux remarques : tout d'abord, on peut démontrer facilement que pour qu'une dérivation $D$ donnée sur $K$ se prolonge à $L$, il faut et il suffit que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée : a) $K$ est de caractéristique $0$ ; b) $K$ est de caractéristique $p \neq 0$, et pour toute relation $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i^p = 0$ $(x_i \in K, y_i \in L)$, on a aussi $\sum_{i=1}^{n} D(x_i) y_i^p = 0$ (cf. page 12, fin de la page).

De plus page 13-07, ligne 2 : lire $\pi'$ et non $\pi$.

ligne 4 : lire $(N' + f(V))/f(V) = \pi'(N')$.

# EXTENSION DU CORPS DE BASE DANS LES SCHÉMAS

## 1.- Extension des scalaires dans un schéma.

Soient $K$ un corps, $L$ une extension de $K$, $S$ un schéma du corps $L$, $F$ le corps des fractions de $S$, et enfin $K'$ un surcorps de $K$ contenu dans $L$ et algébriquement disjoint de $F$ (cette dernière condition ne sert pas au paragraphe 1).

Proposition 1.- a) La réunion $S^{K'}$ des schémas affines d'algèbres $K'[A]$, où $A$ est une algèbre affine dont le schéma est contenu dans $S$, est un $K'$-schéma ;

b) Toute localité de $S^{K'}$ domine une localité de $S$ ; tout anneau local de $L$ qui contient $K'$ et domine une localité de $S$ domine une localité de $S^{K'}$. Les localités de $S^{K'}$ qui dominent $M \in S$ sont les localités de la forme $K'[M]_{\underline{m}}$ ($\underline{m}$ idéal premier de $K'[M]$ contenant $\underline{r}(M)$, donc contenant l'idéal $\underline{n}$ de $K'[M]$ engendré par $\underline{r}(M)$) ;

c) Si $S$ est réunion de schémas affines $S_i$ d'algèbres affines $A_i$, $S^{K'}$ est réunion des schémas affines $S_i^{K'}$ d'algèbres affines $K'[A_i]$.

Pour préciser le corps de base envisagé, on dira $K$-algèbre affine, $K$-schéma, $K$-localité, etc...

Soit $A$ une $K$-algèbre affine, et $A' = K'[A]$ ; si $M = A_{\underline{p}}$ est une $K$-localité appartenant au $K$-schéma affine $S_A$ d'algèbre $A$, on a $K'[M] = K'[A]_{A-\underline{p}} = A'_{A-\underline{p}}$. La correspondance $\underline{m} \longrightarrow \underline{m} \cap A'$ est une bijection de l'ensemble des idéaux premiers de $K'[M]$ sur l'ensemble des idéaux premiers de $A'$ qui ne rencontrent pas $A - \underline{p}$, i.e. dont l'intersection avec $A$ est contenue dans $\underline{p}$. Il en résulte que cette correspondance est une bijection de l'ensemble des idéaux premiers de $K'[M]$ qui contiennent $\underline{r}(M) = \underline{p}A_{\underline{p}}$ sur les idéaux premiers de $A'$ qui coupent $A$ suivant $\underline{p}$ ; et l'on a $K'[M]_{\underline{m}} = A'_{A' \cap \underline{m}}$.

Rappelons aussi qu'un anneau local $V$ domine $A_{\underline{p}}$ si et seulement si $V \supset A$ et $A \cap \underline{r}(V) = \underline{p}$.

De ce qui précède, on déduit, en faisant varier $\underline{p}$ parmi les idéaux premiers de $A$, que le $K'$-schéma $S_{A'}$ d'algèbre affine $A'$ se compose des $K'$-localités de la forme $M' = K'[M]_{\underline{m}}$, avec $M \in S_A$ et $\underline{m}$ idéal premier de

$K'[M]$ contenant $\underline{r}(M)$ . Comme on a $M = A_{\underline{p}}$ avec $\underline{p} = (\underline{m} \cap A') \cap A = \underline{m} \cap A =$ $= \underline{r}(M') \cap A$ , les localités de $S_{A'}$ qui dominent $M \in S_A$ sont les localités $M' = K'[M]_{\underline{m}}$ où $\underline{m}$ varie.

Si $S$ est alors un schéma quelconque, il résulte du cas affine qu'on vient d'étudier que $S^{K'}$ *est constitué par les* $K'$-*localités* $M' = K'[M]_{\underline{m}}$ *où* $M$ *varie dans* $S$ *et* $\underline{m}$ *parmi les idéaux premiers de* $K'[M]$ *qui contiennent* $\underline{r}(M)$ ; $M'$ domine $M$ , et comme deux localités distinctes de $S$ ne sont pas apparentées, $M$ est la seule localité de $S$ dominée par $M'$ . De plus si $V$ est un anneau local de $L$ contenant $K'$ et dominant $M \in S$ , $V$ domine $K'[M]_{K'[M] \cap \underline{r}(V)} \in S^{K'}$ .

De la caractérisation donnée plus haut de $S^{K'}$ résulte que si $S$ est réunion des schémas $S_i$ , $S^{K'}$ est réunion des ensembles $S_i^{K'}$ ; comme $S$ est réunion d'une famille finie de schémas affines $S_i$ d'algèbres $A_i$ , $S^{K'}$ est réunion des schémas affines $S_i^{K'}$ d'algèbres $K'[A_i]$ en nombre fini. De plus deux localités de $S^{K'}$ ne sont jamais apparentées : en effet soient $M_i' = K'[M_i]_{\underline{m}_i}$ $(i = 1 , 2)$ deux localités de $S^{K'}$ apparentées ; comme $M_i'$ domine $M_i$ , $M_1$ et $M_2$ sont apparentées donc égales, mais comme deux anneaux locaux de la forme $B_p$ et $B_q$ distincts ne sont pas apparentés, on a bien $M_1' = M_2'$ . On a donc démontré que $S^{K'}$ est un $K'$-schéma .

*Corollaire 1 : Si* $S$ *est un* $K$-*schéma complet (resp. projectif)* , $S^{K'}$ *est un* $K'$-*schéma complet (resp. projectif).*

Supposons $S$ complet et soit $V$ un anneau de valuation de $L$ contenant $K'$ ; comme $S$ est complet, $V$ domine une localité de $S$ , donc une localité de $S^{K'}$ d'après la proposition 1 , b), et par suite $S^{K'}$ est complet. Si $S$ est projectif, on peut par définition trouver $n$ éléments $u_i$ $(1 \leq i \leq n)$ de $L$ tel que $S$ soit réunion des schémas affines d'algèbres $K[u_j/u_i]_{1 \leq j \leq n} =$ $= A_i$ , donc $S^{K'}$ est réunion des schémas affines d'algèbres $K'[A_i] = K'[u_j/u_i]_{1 \leq j \leq n}$ , donc est projectif.

*Corollaire 2 : les localités de* $S^{K'}$ *qui dominent une localité* $M \in S$ *sont spécialisation d'un nombre fini d'entre elles, à savoir les localités* $K'[M]_{\underline{m}_i}$ , *où les* $\underline{m}_i$ *sont les idéaux premiers minimaux de l'idéal* $\underline{n}$ *engendré par* $\underline{r}(M)$ *dans* $K'[M]$ .

En effet, les idéaux premiers minimaux $\underline{m}_i$ de $\underline{n}$ sont en nombre fini puisque $K'[M] = K'[A]_{A-\underline{p}}$ ( $M = A_{\underline{p}}$ ) est un anneau noethérien ; tout idéal premier $\underline{m}$ de $K'[M]$ contenant $\underline{n}$ contient l'un des $\underline{m}_i$ , et par suite $K'[M]_{\underline{m}}$ est spécialisation de $K'[M]_{\underline{m}_i}$ .

Les résultats précédents conduisent à introduire les notions suivantes : soit $M$ une K-localité ; on notera $C_{K'}(M)$ l'ensemble des K'-localités de la forme $K'[M]_{\underline{m}}$ où $\underline{m}$ est un idéal premier de $K'[M]$ contenant l'idéal $\underline{n}$ de $K'[M]$ engendré par $\underline{r}(M)$ ; les localités de $C_{K'}(M)$ correspondant aux idéaux premiers minimaux de $\underline{n}$ sont dites <u>les localités déduites de</u> $M$ <u>par l'extension</u> $K'/K$ .

2.- <u>Extensions successives du corps des scalaires.</u>

Soit $K''$ un surcorps de $K'$ contenu dans $L$ . Si $M'$ est une localité déduite de $M$ par l'extension $K'/K$ et $M''$ une localité déduite de $M'$ par l'extension $K''/K'$ , $M''$ est une localité déduite de $M$ par l'extension $K''/K$ . Soit en effet $M' = (K'[M])_{\underline{m}}$ , $M'' = (K''[M'])_{\underline{m}'}$ , où $\underline{m}$ est un idéal premier minimal de l'idéal $\underline{n}$ engendré par $\underline{r}(M)$ dans $K'[M]$, et $\underline{m}'$ un idéal premier minimal de l'idéal $\underline{n}'$ engendré par $\underline{r}(M')$ dans $K''[M']$ . Si $S = K'[M] - \underline{m}$ , on a $M' = (K'[M])_S$ , d'où $K''[M'] = (K''[M])_S$ . Soit $\underline{m}'' = \underline{m}' \cap K''[M]$ ; $M''$ est alors l'anneau local de l'idéal premier $\underline{m}''$ de $K''[M]$ (Exposé 1, proposition 2). Cet idéal contient $\underline{r}(M)$ ; c'est un idéal premier minimal de l'idéal $\underline{n}''$ engendré par $\underline{r}(M)$ dans $K''[M]$ . Soit en effet $\underline{m}''_1$ un idéal premier contenu dans $\underline{m}''$ et contenant $\underline{r}(M)$ ; alors $\underline{m}''_1$ est de la forme $\underline{m}'_1 \cap K''[M]$ , où $\underline{m}'_1$ est un idéal premier de $K''[M']$ contenu dans $\underline{m}'$ et contenant $\underline{r}(M)$ (exposé 1, proposition 1). L'idéal $\underline{m}'_1 \cap M'$ est contenu dans $\underline{r}(M')$ , donc $\underline{m}'_1 \cap K'[M]$ est contenu dans $\underline{m} = \underline{r}(M') \cap K'[M]$ ; comme $\underline{m}'_1 \cap K'[M]$ contient $\underline{n}$ , cet idéal est identique à $\underline{m}$ , et $\underline{m}'_1 \cap M' = \underline{r}(M')$ ; $\underline{m}'_1$ contient donc $\underline{n}'$ ; comme $\underline{m}'_1 \subset \underline{m}'$ , on a $\underline{m}'_1 = \underline{m}'$ , d'où $\underline{m}''_1 = \underline{m}''$ , ce qui montre que $\underline{m}''$ est un idéal premier minimal de $\underline{n}''$ . Il en résulte bien que $M''$ est une localité déduite de $M$ par l'extension $K''/K$ .

Soit réciproquement $M''$ une localité déduite de $M$ par l'extension $K''/K$ . Alors $M''$ est anneau local d'un idéal premier minimal $\underline{m}''$ de l'idéal $\underline{n}''$ engendré par $\underline{r}(M)$ dans $K''[M]$ . Posons $\underline{m} = K'[M] \cap \underline{m}''$ , et soit $M'$

l'anneau local de $\underline{m}$. Montrons que $M''$ est une localité déduite de $M'$ par l'extension $K''/K'$. On a $K''[M] \subset K''[M'] \subset M''$ ; comme $M''$ est anneau local de $\underline{m}''$, c'est aussi l'anneau local de l'idéal premier $\underline{m}' = \underline{r}(M'') \cap K''[M']$ de $K''[M']$. Soit $\underline{n}'$ l'idéal engendré par $\underline{r}(M')$ dans $K''[M']$ ; $\underline{r}(M')$ est engendré par $\underline{m}$, qui est contenu dans $\underline{m}''$, donc dans $\underline{m}'$, d'où $\underline{n}' \subset \underline{m}'$. Montrons que $\underline{m}'$ est un idéal premier minimal de $\underline{n}'$. Si $S = K'[M] - \underline{m}$, $M'$ est l'anneau de fractions de la partie $S$ de $K'[M]$, d'où il résulte que $K''[M']$ est l'anneau des fractions de la partie $S$ de $K''[M]$ ; il suffira donc de montrer que $\underline{m}' \cap K''[M] = \underline{r}(M'') \cap K''[M] = \underline{m}''$ est un idéal premier minimal de $\underline{n}' \cap K''[M]$. Or, $\underline{n}'$ contient $\underline{r}(M')$, donc aussi $\underline{m} = K'[M] \cap \underline{m}''$ qui contient $\underline{r}(M)$ puisque $\underline{r}(M) \subset \underline{m}''$ ; donc $\underline{n}' \cap K''[M]$ contient l'idéal $\underline{n}''$ engendré par $\underline{r}(M)$ dans $K''[M]$ ; on a

$$\underline{n}'' \subset \underline{n}' \cap K''[M] \subset \underline{m}' \cap K''[M] = \underline{m}'' \quad ;$$

comme $\underline{m}''$ est un idéal premier minimal de $\underline{n}''$, c'est aussi un idéal premier minimal de $\underline{n}' \cap K''[M]$. On voit donc que $M''$ est une localité déduite de $M'$ par l'extension $K''/K'$. Par ailleurs, il est clair que $M'$ est une spécialisation d'une localité déduite de $M$ par l'extension $K'/K$ ; de plus, $\underline{r}(M') \cap M = \underline{m} \cap M = \underline{m}'' \cap M = \underline{r}(M)$, ce qui montre que $M'$ domine $M$ ; nous verrons plus loin que si $K''$ est algébriquement disjoint dans $L$ du corps des fractions de $M$, $M'$ est elle-même une localité déduite de $M$ par l'extension $K'/K$.

Avant d'étudier plus en détail les localités déduites d'une localité $M$ par l'extension $K'/K$, nous démontrerons certains résultats auxiliaires sur les idéaux premiers et les extensions entières des anneaux noethériens.

## 3.- Lemmes sur les idéaux premiers.

Les résultats qui suivent sur les idéaux premiers sont des résultats appartenant typiquement à Krull (cf. Idealtheorie, page 910). $A$ désigne un anneau commutatif avec unité.

Proposition 2.- 1) toute partie $S$ de $A$ appartenant à la famille $\mathfrak{S}$ des parties multiplicativement stables ( m.s. ) de $A$ ne contenant pas $0$ est contenue dans un élément maximal de $\mathfrak{S}$ ;

2) pour que la partie $S$ de $A$ soit un élément maximal de $\mathfrak{S}$, il faut et suffit que $\underline{p} = \complement S$ soit un idéal premier minimal de $A$ (nul ou non) ;

3) si $\underline{p}$ est un idéal premier minimal de type fini de $A$, il existe $s \notin \underline{p}$ et $n > 0$ tel que $s\underline{p}^n = 0$, et il existe $x \neq 0$ tel que $x\underline{p} = 0$.

Le 1) résulte du théorème de Zorn, une fois démontré que $\mathfrak{S}$ ordonné par inclusion, est inductif, ce qui est immédiat.

Si $S$ est m.s. et $x \in A$, la plus petite partie m.s. contenant $S$ et $x$ se compose des éléments $sx^n$ ($s \in S$, $n$ entier $\geq 0$) ; par suite si $S$ est un élément maximal de $\mathfrak{S}$, pour que $x \notin S$, il faut et il suffit qu'il n'existe pas de partie m.s. contenant $S$ et $x$, autrement dit qu'il existe $s \in S$ et $n > 0$ tels que $sx^n = 0$. Soient alors $x_i$ $(1 \leq i \leq k)$ $k$ éléments de $\underline{p} = \complement S$ qui vérifient par suite les conditions $s_i x_i^{n_i} = 0$ ( $s_i \in S$, $n_i > 0$ ) ; si l'on pose $s = \prod_i s_i$ $n = \sum_i n_i$, on a pour tous les systèmes de $k$ éléments $a_i$ de $A$ la condition $s(\sum_i a_i x_i)^n = 0$ donc $\sum_i a_i x_i \in \underline{p}$ et $\underline{p}$ est bien un idéal ; cet idéal est premier puisque $S$ est multiplicativement stable. Si $\underline{p}$ contient un idéal premier $\underline{p}'$, $S' = \complement \underline{p}'$ appartient à $\mathfrak{S}$ et contient $S$ donc $S = S'$ et $\underline{p} = \underline{p}'$, ce qui prouve que $\underline{p}$ est un idéal premier minimal. Réciproquement, si $\underline{p}$ est un idéal premier de $A$, $S = \complement \underline{p}$ appartient à $\mathfrak{S}$ et donc d'après ce qu'on a vu, est contenu dans un élément maximal $S'$ de $\mathfrak{S}$, mais alors $\underline{p}' = \complement S'$ est un idéal premier minimal de $A$ contenu dans $\underline{p}$, et par suite si $\underline{p}$ est premier minimal, on a $\underline{p} = \underline{p}'$ et $S = S'$ est maximal dans $\mathfrak{S}$. Ceci montre aussi que tout idéal premier contient un idéal premier minimal.

Enfin, soit $\underline{p}$ un idéal premier minimal de générateurs $x_1, \dots, x_k$, et supposons $s_i x_i^{n_i} = 0$ $(1 \leq i \leq k)$ ; nous poserons $S = S_1 \dots S_k$, $n = n_1 + \dots + n_k$ ; le produit de $s$ par un monôme de degré $n$ en les $x_i$ est nul, car si $m_1 + \dots + m_k = n$ on a $m_i \geq n_i$ pour un certain $i$ et $s_i x_i^{m_i} = 0$. Autrement dit $s\underline{p}^n = (0)$. Choisissant $m$ tel que $s\underline{p}^{m-1} \neq (0)$, $s\underline{p}^m = (0)$, et $x$ non nul dans $s\underline{p}^{m-1}$, on a donc $x\underline{p} = (0)$.

<u>Proposition 3</u>.- <u>Soit</u> $A$ <u>un anneau entier sur un sous-anneau</u> $B$.

1) <u>si</u> $A$ <u>est noethérien, et si, considéré comme</u> $B$<u>-module, il est sans torsion, pour qu'un idéal premier</u> $\underline{q}$ <u>de</u> $A$ <u>soit premier minimal, il faut et il suffit que l'on ait</u> $\underline{q} \cap B = (0)$ ;

2) <u>si</u> $\underline{q}$ <u>est un idéal premier de</u> $A$ <u>tel que</u> $\underline{q} \cap B = (0)$, <u>et si</u> $\underline{p}$ <u>est un idéal premier de</u> $B$, <u>on a</u> $(\underline{q} + A\underline{p}) \cap B = \underline{p}$, <u>donc</u> $\underline{q} + A\underline{p} \neq A$.

Soit $A$ noethérien et $B$-module sans torsion ; si $\underline{q}$ est un idéal premier minimal de $0$ dans $A$, il est de type fini ($A$ noethérien), et d'après la proposition 2, 3), il existe $a \neq 0$ dans $A$ tel que $a\underline{q} = (0)$, donc $a(B \cap \underline{q}) = (0)$, ce qui prouve que $B \cap \underline{q} = (0)$ puisque $A$ est un $B$-module sans torsion. Réciproquement, si $\underline{q}$ est un idéal premier de $A$ tel que $B \cap \underline{q} = (0)$, et si $\underline{q}'$ est un idéal premier de $A$ contenu dans $\underline{q}$, on a $\underline{q} \cap B = \underline{q}' \cap B = (0)$ et donc (corollaire 1 du théorème 3 de l'exposé 1), on a $\underline{q} = \underline{q}'$ (le corollaire en question est vrai même si $A$ n'est pas intègre, comme le montre sa démonstration).

Soit $\underline{q}$ un idéal premier de $A$ tel que $\underline{q} \cap B = (0)$, et soit $\varphi$ l'application canonique de $A$ sur $A' = A/\underline{q}$ ; $\varphi$ applique biunivoquement $B$ sur un sous-anneau $B'$ de $A'$ et l'idéal premier $\underline{p}$ de $B$ sur un idéal premier $\underline{p}'$ de $B'$. De plus $A'$ est entier sur $B'$, donc (théorème 3 de l'exposé 1), il existe un idéal premier $\underline{q}'$ de $A'$ tel que $\underline{q}' \cap B' = \underline{p}'$, d'où a fortiori $(A'\underline{p}') \cap B' = \underline{p}'$, i.e. $(A\underline{p} + \underline{q}) \cap B = \underline{p}$.

<u>Corollaire</u> : <u>Soient</u> $L$ <u>et</u> $K'$ <u>deux extensions d'un corps</u> $K$, $L$ <u>étant de type fini ; les types d'extensions composées de</u> $L$ <u>et</u> $K'$ <u>correspondent biunivoquement aux idéaux premiers minimaux de</u> $0$ <u>dans</u> $L \otimes K'$.

On a déjà vu (Exposé 14) que toute extension composée de $L$ et $K'$ est équivalente à une extension $(F, u, u')$, où $\underline{p}$ est un idéal premier de $L \otimes K'$, $F$ le corps des fractions de $(L \otimes K')/\underline{p}$, $u$ et $u'$ étant les homomorphismes naturels de $L$ et $K'$ dans $F$. Comme les images de $u$ et $u'$ doivent être algébriquement disjointes, ceci signifie que si $K'$ est algébrique sur l'extension transcendante pure $X$, on a $\underline{p} \cap (L \otimes X) = (0)$. Or $L \otimes K'$ est entier sur $L \otimes X$, et comme $K'$ est un module libre sur $X$, $L \otimes K'$ est un module libre sur l'anneau intègre $L \otimes X$, donc sans torsion et on peut appliquer la proposition 3, 1).

Soit $M$ un sous-anneau de $L$ contenant $K$ et admettant $L$ comme corps des fractions. Soit $S$ l'ensemble des éléments de la forme $x \otimes 1$, où $x$ est un élément $\neq 0$ de $M$ ; tout élément de $S$ est inversible dans $L \otimes K'$, et tout élément de $L \otimes K'$ se met sous la forme $s^{-1}z$, où $s \in S$, $z \in M \otimes K'$. Raisonnant comme dans la démonstration de la proposition 1, Exposé 1, on voit que $\underline{u} \longrightarrow \underline{u} \cap (M \otimes K')$ est une bijection de l'ensemble des idéaux premiers de $L \otimes K'$ sur l'ensemble des idéaux premiers de $M \otimes K'$ ne rencontrant pas $S$. En particulier, si $\underline{u}$ est un idéal premier minimal de $0$ dans $L \otimes K'$, $\underline{u} \cap (M \otimes K')$ est un idéal premier minimal de $0$ dans $M \otimes K'$. Réciproquement, si $L/K$ est de type fini, tout idéal premier minimal de $0$ dans $M \otimes K'$ peut se mettre sous cette forme. Soient en effet $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m$ tous les idéaux minimaux de $0$ dans $L \otimes K'$, et soit $\underline{v}_i = \underline{u}_i \cap (M \otimes K')$ ; il y a des $e_i \geqslant 0$ tels que $\underline{u}_1^{e_1} \dots \underline{u}_m^{e_m} = 0$, d'où $\underline{v}_1^{e_1} \dots \underline{v}_m^{e_m} = 0$ ; tout idéal premier de $M \otimes K'$ contient donc au moins l'un des $\underline{v}_i$, ce qui démontre notre assertion.

## 4.- Extension des scalaires dans les localités.

Nous désignerons par $M$ une localité de $L$, par $F$ son corps des fractions et par $K'$, $K''$ des sous-corps de $L$ contenant $K$ et algébriquement disjoints de $F$ par rapport à $K$.

Proposition 4.- Il existe au moins une localité déduite de $M$ par l'extension $K'/K$.

Il suffit de montrer que l'idéal $\underline{n}$ de $K'[M]$ engendré par $\underline{r}(M)$ ne contient pas $1$. Soit $K'$ algébrique sur l'extension transcendante pure $X$ de $K$. Alors $A = M \otimes K'$ est entier sur $B = M \otimes X$, et le noyau $\underline{q}$ de l'homomorphisme canonique de $M \otimes K'$ sur $K'[M]$ ne rencontre pas $B$ puisque $F$ et $K'$ sont algébriquement disjoints. De plus, l'idéal $\underline{p} = \underline{r}(M) \otimes X$ est premier ; en effet, $B/\underline{p}$ est isomorphe à $(M/\underline{r}(M)) \otimes X$, donc est un domaine d'intégrité puisque $X/K$ est une extension transcendante pure. Appliquant la proposition 3, 2), et passant aux quotients modulo $\underline{q}$, on voit que $\underline{n} \cap B$ est l'idéal engendré par $\underline{r}(M)$ dans $B$, donc ne contient pas $1$.

Soient $\underline{p}$ un idéal premier de $M$, $\underline{q}$ l'idéal qu'il engendre dans $K'[M]$ et $\underline{s}$ un idéal premier minimal de $\underline{q}$ dans $K'[M]$. Nous allons considérer le diagramme commutatif

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} M \otimes K' & \xrightarrow{\alpha} & (M/\underline{p}) \otimes K' \\ \beta \downarrow & & \downarrow \gamma \\ K'[M] & \xrightarrow{\delta} & K'[M]/\underline{s} \end{array} .$$

Le noyau de $\alpha$ est $\underline{p} \otimes K' = \overset{-1}{\beta}(\underline{q})$ ; le noyau $\underline{z}$ de $\beta$ est l'intersection avec $M \otimes K'$ du noyau $\underline{z}_1$ de l'application canonique $F \otimes K' \longrightarrow K'[F]$ ; $\underline{z}_1$ est un idéal premier minimal de $0$ dans $F \otimes K'$ (corollaire à la proposition 3), donc $\underline{z}$ est un idéal premier minimal de $0$ dans $M \otimes K'$. Le noyau de $\delta$ est $\underline{s}$ ; celui de $\delta \circ \beta$ est $\overset{-1}{\beta}(\underline{s})$ ; comme $\beta$ est surjective, cette application définit un isomorphisme de $(M \otimes K')/\underline{z}$ sur $K'[M]$, et $\overset{-1}{\beta}(\underline{s})$ est un idéal premier minimal de $\underline{z} + \underline{p} \otimes K' = \underline{z} + \overset{-1}{\alpha}(0)$. Si $\underline{u}$ est le noyau de $\gamma$ , celui de $\gamma \circ \alpha$ est $\overset{-1}{\alpha}(\underline{u})$ ; comme $\gamma \circ \alpha = \delta \circ \beta$ , on a $\overset{-1}{\alpha}(\underline{u}) = \overset{-1}{\beta}(\underline{s})$ ; comme $\alpha$ et $\beta$ sont surjectives, on a

$$\underline{u} = \alpha(\overset{-1}{\beta}(\underline{s})) \qquad \underline{s} = \beta(\overset{-1}{\alpha}(\underline{u})) \quad .$$

Dans le cas où il n'y a qu'un seul type d'extension composée de F et de K' (en particulier si K'/K est primaire, ou F/K primaire), $F \otimes K'$ n'a qu'un seul idéal premier minimal $\underline{z}_1$ de 0 (corollaire à la proposition 3), qui est par suite nilpotent, ce qui montre que $\underline{z}$ est nilpotent. Donc $\underline{z}$ est contenu dans tout idéal premier de $M \otimes K'$ ; comme $\overset{-1}{\beta}(\underline{s})$ est un idéal premier minimal de $\underline{z} + \overset{-1}{\alpha}(0)$ , c'est aussi un idéal premier minimal de $\overset{-1}{\alpha}(0)$ ; comme $\alpha$ est surjective, $\underline{u} = \alpha(\overset{-1}{\beta}(\underline{s}))$ est un idéal premier minimal de 0 dans $(M/\underline{p}) \otimes K'$ . Si R est le corps des fractions de $M/\underline{p}$ , on a $\underline{u} = ((M/\underline{p}) \otimes K') \cap \underline{u}_1$ , où $\underline{u}_1$ est un idéal premier minimal de 0 dans $R \otimes K'$ . Il en résulte d'abord que $\underline{u}$ n'a que 0 en commun avec $(M/\underline{p}) \otimes 1$ , donc que $\overset{-1}{\beta}(\underline{s}) \cap (M \otimes 1) = \underline{p} \otimes 1$ , et par suite que $\underline{s} \cap M = \underline{p}$ . L'application canonique de $(K'[M])_{\underline{s}}$ sur le corps des fractions R' de $K'[M]/\underline{s}$ définit donc un isomorphisme de $M/\underline{p}$ dans R' , qui se prolonge en un isomorphisme de R sur un sous-corps de R' . Comme $\underline{u}_1$ est un idéal premier minimal de 0 dans $R \otimes K'$ , il est clair que l'image de R dans R' est algébriquement disjointe de K' par rapport à K .

<u>Proposition 5.- Si</u> M' <u>est une localité déduite de</u> M <u>par l'extension</u> K'/K , M' <u>a même niveau, même hauteur et même dimension que</u> M .

Comme K' et F sont algébriquement disjoints, il est clair que M et M' ont même niveau ; il suffira donc de montrer que ces localités ont même dimension. La localité M' est l'anneau local d'un idéal premier minimal $\underline{m}$ de l'idéal $\underline{n}$ engendré par $\underline{r}(M)$ dans $K'[M]$ ; soit $R = M/\underline{r}(M)$ ; R et K' s'identifient à des sous-corps de $K'[M]/\underline{m}$ , et $K'[M]/\underline{m} = K'[R]$ ; il en résulte que la dimension de M' est au plus égale à celle de M . Soit $K'_o$ la fermeture algébrique de K dans K' ; on a vu plus haut que M' est une localité déduite par l'extension $K'/K'_o$ d'une localité $M_o$ sur $K'_o$ qui domine M . Le corps $M_o/\underline{r}(M_o)$ contient une image isomorphe du corps R ; son degré de transcendance sur K est donc au moins égal à la dimension de M ; comme $K_o$ est algébrique sur K , il en résulte que la dimension de $M_o$ est au moins égale à celle de M . Il suffira donc de montrer que M' a même dimension que $M_o$ ; on est donc ramené à démontrer la proposition 5 dans le cas où K'/K est une extension primaire. Or, dans ce cas, il résulte de ce qui a été dit plus haut que $R$ et $K'$ sont algébriquement disjoints dans $K'[M]/\underline{m}$ , ce qui démontre la proposition 5.

Corollaire : Si $M''$ est une localité déduite de $M$ par l'extension $K''/K$ , et si $K \subset K' \subset K''$ , il y a une localité $M'$ déduite de $M$ par l'extension $K'/K$ telle que $M''$ soit déduite de $M'$ par l'extension $K''/K'$ .

On a vu plus haut qu'il y a une localité $M'$ sur $K'$ qui est une spécialisation d'une localité $M'_1$ déduite de $M$ par l'extension $K'/K$ et qui est telle que $M''$ soit déduite de $M'$ par l'extension $K''/K'$ . Les dimensions de $M'$ , $M''$ sont donc égales, et par suite toutes deux égales à celle de $M$ , d'où $\dim M' = \dim M'_1 = \dim M$ , et par suite $M' = M'_1$ , puisque $M'$ est spécialisation de $M'_1$ .

Proposition 6.- S'il n'y a qu'un seul type d'extension composée de $K'/K$ et de $(M/\underline{r}(M))/K$ (donc en particulier si l'une de ces extensions est primaire), il n'y a qu'une localité déduite de $M$ par l'extension $K'/K$ ; si l'une au moins des extensions $K'/K$ , $(M/\underline{r}(M))/K$ est séparable, le radical de toute localité déduite de $M$ par l'extension $K'/K$ est engendré par $\underline{r}(M)$ .

Soient $\underline{m}_1, \dots, \underline{m}_h$ tous les idéaux premiers minimaux de l'idéal $\underline{n}$ engendré par $\underline{r}(M)$ dans $K'[M]$ ; nous utiliserons les diagrammes (1) relatifs à $\underline{p} = \underline{r}(M)$ , $\underline{q} = \underline{n}$ , $\underline{s} = \underline{m}_i$ ; les homomorphismes $\alpha$ et $\beta$ sont les mêmes pour tous ces diagrammes ; soient $\gamma_i$ et $\delta_i$ les homomorphismes $\gamma$ et $\delta$ du diagramme relatif à $\underline{m}_i$ . On a ici $M/\underline{p} = M/\underline{r}(M)$ ; nous désignerons ce corps par $R$ . Il résulte de la proposition 5 que le noyau $\underline{u}_i$ de $\gamma_i$ est un idéal premier minimal de $0$ dans $R \otimes K'$ ; on a $\underline{m}_i = \beta(\overset{-1}{\alpha}(\underline{u}_i))$ . S'il n'y a qu'un seul type d'extension composée de $R$ et de $K'$ , $R \otimes K'$ n'a qu'un seul idéal premier minimal de $0$ ; les $\underline{u}_i$ sont donc tous égaux, et il en est de même des $\underline{m}_i$ , d'où $h = 1$ . Dans le cas général, on voit que les $\underline{u}_i$ sont tous distincts ; soient $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_h, \dots, \underline{u}_m$ tous les idéaux premiers minimaux de $0$ dans $R \otimes K'$ ; leur intersection est un idéal nilpotent. Si l'une au moins des extensions $R/K$ , $K'/K$ est séparable, $R \otimes K'$ n'a aucun élément nilpotent $\neq 0$ , d'où $\underline{u}_1 \cap \dots \cap \underline{u}_m = \{0\}$ . Si $i \leq h$ , soit $u_i$ un élément de $R \otimes K'$ n'appartenant pas à $\underline{u}_i$ mais appartenant aux $\underline{u}_k$ d'indices $\neq i$ entre 1 et $m$ : soit $v_i$ un élément de $M \otimes K'$ tel que $\alpha(v_i) = u_i$ ; $\beta(v_i)$ n'est dohc pas dans $\underline{m}_i$ . Soit $x$ un élément de $\underline{m}_i$ ; si $y \in M \otimes K'$ est tel que $\beta(y) = x$ , on a $\alpha(y) \in \underline{u}_i$ , d'où $\alpha(y)u_i = 0$ et $yv_i$ appartient au noyau $\underline{r}(M) \otimes K'$ de $\alpha$ ; il en résulte que $x\,\beta(v_i)$ appartient à $\underline{n}$ ; comme $\beta(v_i) \notin \underline{m}_i$ , il en résulte bien que le radical de $(K'[M])_{\underline{m}_i}$ est engendré par $\underline{n}$ , donc par $\underline{r}(M)$ .

<u>Proposition 7.- Soit</u> P <u>une localité dont</u> M <u>est une spécialisation. Si</u> P' <u>est une localité déduite de</u> P <u>par l'extension</u> K'/K , <u>il y a une localité</u> M' <u>déduite de</u> M <u>par l'extension</u> K'/K <u>qui est une spécialisation de</u> P' .

Soit $\lambda$ l'application canonique $P' \longrightarrow P'/\underline{r}(P')$ ; nous identifierons $K'$ à $\lambda(K')$ . L'extension $K'/K$ est algébriquement disjointe (dans $P'/\underline{r}(P')$) du corps des fractions de $\lambda(P)$ (proposition 5) . Soit $\bar{M} = \lambda(M)$ ; $\bar{M}$ est une localité de radical $\underline{r}(\bar{M}) = \lambda(\underline{r}(M))$ . Soient $\bar{\underline{n}}$ l'idéal engendré par $\underline{r}(\bar{M})$ dans le sous-anneau $K'[\bar{M}]$ de $P'/\underline{r}(P')$ et $\bar{\underline{m}}$ un idéal premier minimal de $\bar{\underline{n}}$ (proposition 4). On a $K'[\bar{M}] = \lambda(K'[M])$ , $\bar{\underline{n}} = \lambda(\underline{n})$ , si $\underline{n}$ est l'idéal engendré par $\underline{r}(M)$ dans $K'[M]$ ; l'ensemble $\underline{m}$ des $x \in K'[M]$ tels que $\lambda(x) \in \bar{\underline{m}}$ est un idéal premier minimal $\underline{m}$ de $\underline{n}$ . L'anneau local M' de $\underline{m}$ est une localité déduite de M par l'extension K'/K . Par ailleurs, $\underline{m}$ contient $\underline{r}(P') \cap K'[M]$ ; comme P' est l'anneau local de $K'[P] \cap \underline{r}(P')$ et comme $K'[P]$ est l'anneau des fractions de la partie multiplicativement stable $M - (\underline{r}(P) \cap M)$ de $K'[M]$ , P' est l'anneau local de $\underline{r}(P') \cap K'[M]$ , et M' est une spécialisation de P' .

<u>Proposition 8.- Soit</u> P <u>une localité dont</u> M <u>est une spécialisation, et soit</u> M' <u>une localité déduite de</u> M <u>par l'extension</u> K'/K . <u>S'il n'y a qu'un seul type d'extension composée de</u> F/K <u>et de</u> K'/K , <u>il y a une localité</u> P' <u>déduite de</u> P <u>par l'extension</u> K'/K <u>dont</u> M' <u>est une spécialisation.</u>

On a $P = M_{\underline{p}}$ , où $\underline{p}$ est un idéal premier de M ; M' est anneau local d'un idéal premier minimal $\underline{m}$ de l'idéal engendré par $\underline{r}(M)$ dans $K'[M]$ . Cet idéal contient l'idéal $\underline{q}$ engendré par $\underline{p}$ dans $K'[M]$ ; $\underline{m}$ contient donc un idéal premier minimal $\underline{s}$ de $\underline{q}$ . Or, il résulte de l'étude que nous avons faite du diagramme (1) que $\underline{s} \cap M = \underline{p}$ . Soit P' l'anneau des fractions de $\underline{s}$ ; c'est une localité qui admet M' comme spécialisation. Puisque $\underline{s} \cap M = \underline{p}$ , P' domine P ; par ailleurs, P' est l'anneau local de l'idéal premier $\underline{r}(P') \cap K'[P]$ de $K'[P]$ , puisque $K'[M] \subset K'[P] \subset P'$ . Montrons que cet idéal premier est un idéal premier minimal de l'idéal $\underline{q}'$ engendré par $\underline{r}(P)$ dans $K'[P]$ . Comme $K'[P]$ est l'anneau de fractions d'une partie multiplicativement stable de $K'[M]$ , il suffit de montrer que $(\underline{r}(P') \cap K'[P]) \cap K'[M] = \underline{s}$ est un idéal premier minimal de $\underline{q}' \cap K'[M]$ ; or $\underline{q}'$ contient $\underline{r}(P) \cap M = \underline{p}$ , donc $\underline{q}'$ contient $\underline{q}$ , et notre assertion résulte de ce que $\underline{s}$ est un idéal premier minimal de $\underline{q}$ .

Remarque : La conclusion de la proposition 8 ne serait pas valable en général sans l'hypothèse qu'il n'y a qu'un seul type d'extension composée de $F$ et de $K'$ . On s'en convaincra par l'exemple suivant. Soient $K$ le corps des nombres réels, $K'$ celui des complexes, $K'[x , y]$ un anneau de polynomes en deux lettres $x$ et $y$ et $A = K[x , ix , y]$ . Soit $\underline{p}$ l'intersection avec $A$ du noyau de l'homomorphisme $K'[x , y] \longrightarrow K'[x]$ qui applique $x$ sur $x$ et $y$ sur $i$ . On voit alors facilement que l'idéal engendré par $\underline{p}$ dans $K'[x , y]$ est l'intersection de l'idéal $\underline{p}'_1$ engendré par $y - i$ et de l'idéal $\underline{p}'_2$ engendré par $x$ et $y + i$ . L'idéal $\underline{m}$ engendré par $x$ , $ix$ et $y^2 + 1$ dans $A$ est premier ; soient $M$ et $P$ les anneaux locaux de $\underline{m}$ et $\underline{p}$ , $M'$ l'anneau local de l'idéal $\underline{p}'_2$ de $K'[x , y]$ ; il n'y a qu'une localité déduite de $P$ par l'extension $K'/K$ : c'est l'anneau local $P'$ de $\underline{p}'_1$ . Par contre, $M'$ est une localité déduite de $M$ par l'extension $K'/K$ ; $M$ est une spécialisation de $P$ , mais $M'$ n'en est pas une de $P'$ .