

# SÉMINAIRE HENRI CARTAN

P. CARTIER

## **Extensions régulières**

*Séminaire Henri Cartan*, tome 8 (1955-1956), exp. n° 14, p. 1-10

[http://www.numdam.org/item?id=SHC\\_1955-1956\\_\\_8\\_\\_A14\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A14_0)

© Séminaire Henri Cartan  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1955-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Séminaire E.N.S., 1955/56  
(H. CARTAN et C. CHEVALLEY)

### EXTENSIONS RÉGULIÈRES

(Exposé de P. CARTIER, le 5.3.1956)

Dans cet exposé,  $K$  est un corps fixé ;  $p$  désigne le nombre 1 si  $K$  est de caractéristique 0 et la caractéristique de  $K$  dans le cas contraire.

$K^{\mathbb{P}^{-\infty}}$  est l'ensemble des  $x$  dans une clôture algébrique de  $K$  tels que  $x^{\mathbb{P}^f} \in K$  pour un entier  $f \geq 0$  assez grand.

#### 1.- Extensions composées.

On appellera extension composée de deux extensions  $L_1$  et  $L_2$  de  $K$  la donnée  $\mathcal{C} = (E, u_1, u_2)$

a) d'une extension  $E$  de  $K$  engendrée par deux sous-extensions  $L_1'$  et  $L_2'$  algébriquement disjointes.

b) pour  $i = 1, 2$ , d'un  $K$ -isomorphisme  $u_i$  de  $L_i$  sur  $L_i'$ .

Deux extensions composées  $(E', u_1', u_2')$  et  $(E'', u_1'', u_2'')$  de  $L_1$  et  $L_2$  sont dites équivalentes (ou de même type) s'il existe un  $K$ -isomorphisme  $j$  de  $E'$  sur  $E''$  tel que  $u_i'' = j \circ u_i'$ , autrement dit s'il existe un  $K$ -isomorphisme  $j$  (nécessairement unique) de  $E'$  sur  $E''$  prolongeant les isomorphismes  $f_i = u_i'' \circ u_i'^{-1}$  de  $L_i'$  sur  $L_i''$ .

Rappelons que deux extensions  $L$  et  $L'$  de  $K$  contenues dans une même extension sont algébriquement disjointes si toute partie  $B$  de  $L$  algébriquement libre sur  $K$  l'est encore sur  $L'$  et que cette propriété est symétrique en  $L$  et  $L'$ .

L'équivalence des extensions composées est visiblement transitive, symétrique et réflexive. On définit de la manière suivante des extensions composées de  $L_1$  et  $L_2$  : soit  $B$  une base de transcendance de  $L_2$  sur  $K$ ,  $\Omega$  une clôture algébrique du corps  $L_1(X_i)_{i \in I}$  des fractions rationnelles par rapport à des indéterminées  $X_i$  en correspondance biunivoque avec les éléments  $x_i \in B$ . On identifie  $K(B) \subset L_2$  à un sous-corps de  $\Omega$  par la correspondance  $x_i \rightleftharpoons X_i$  ; si  $1$  est l'application identique de  $L_1$  dans  $\Omega$  et  $v$  un  $K(B)$ -isomorphisme de  $L_2$  dans  $\Omega$ , alors  $(L_1(v(L_2)), 1, v) = \mathcal{C}(v)$  est une extension composée de  $L_1$  et  $L_2$ , car  $B$  est une base de transcendance de  $v(L_2)$  sur  $K$  qui est algébriquement libre sur  $L_1$ .

De plus pour que  $\mathcal{C}(v)$  et  $\mathcal{C}(v')$  soient équivalentes, il faut et il suffit qu'il existe un  $K$ -isomorphisme de  $L_1(v(L_2))$  sur  $L_1(v'(L_2))$  qui soit l'identité sur  $L_1$  et tel que  $v' = j \circ v$ , ou encore puisque  $v$  et  $v'$  sont l'identité sur  $K(B)$  et que  $\Omega$  est une clôture algébrique de  $L_1(B)$ , qu'il existe un  $L_1(B)$ -automorphisme  $f$  de  $\Omega$  tel que  $v' = f \circ v$ .

Enfin nous allons montrer que toute extension composée  $\mathcal{C} = (E, u_1, u_2)$  de  $L_1$  et  $L_2$  est équivalente à une extension  $\mathcal{C}(v)$  : en effet comme les extensions  $L'_1 = u_1(L_1)$  contenues dans  $E$  sont algébriquement disjointes,  $B' = u_2(B)$  est algébriquement libre sur  $L_1$  et  $E$  est algébrique sur  $L'_1(B')$  ; comme  $B$  est algébriquement libre sur  $L_1$ , il existe un  $K$ -isomorphisme  $j$  de  $L'_1(B')$  sur  $L_1(B)$  qui coïncide avec  $u_1^{-1}$  sur  $L'_1$  et est tel que  $j(u_2(x)) = x$  pour  $x \in B$ . Comme  $\Omega$  est algébriquement close,  $j$  se prolonge en un  $K$ -isomorphisme  $j'$  de  $E$  dans  $\Omega$  coïncidant avec  $u_1^{-1}$  sur  $L'_1$  et avec  $u_2^{-1}$  sur  $K(B')$ , autrement dit  $j'$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$  avec  $\mathcal{C}(j' \circ u_2)$ . On a donc démontré :

Proposition 1. - Soient  $L_1$  et  $L_2$  deux extensions de  $K$ ,  $B$  une base de transcendance de  $L_2$  sur  $K$ , et  $\Omega$  une clôture algébrique de  $L_1(B)$ . Toute extension composée de  $L_1$  et  $L_2$  est équivalente à une extension  $\mathcal{C}(v) = (L_1(v(L_2)), \iota, v)$  où  $v$  est un  $K(B)$ -isomorphisme de  $L_2$  dans  $\Omega$  ;  $\mathcal{C}(v)$  est équivalente à  $\mathcal{C}(v')$  si et seulement si on peut trouver un automorphisme  $f$  de  $\Omega$  sur  $L_1(B)$  tel que  $v' = f \circ v$ .

Corollaire 1 : Si  $L_2$  est une extension de type fini, il n'existe qu'un nombre fini de types d'extensions composées de  $L_1$  et  $L_2$ .

En effet  $L_2$  est alors algébrique de degré fini  $n$  sur  $K(B)$ , et il n'y a par suite qu'un nombre fini  $\leq n$  d'isomorphismes distincts de  $L_2$  dans qui soient l'identité sur  $K(B)$ .

Corollaire 2 : il y a correspondance biunivoque entre les types d'extensions composées de  $L_1/K$  et  $L_2/K$  et les types d'extensions composées de  $L_1(B)/K(B)$  et  $L_2(B)/K(B)$ .

Soit maintenant une extension composée  $\mathcal{C} = (E, u_1, u_2)$  de  $L_1$  et  $L_2$ . On définit un homomorphisme  $h$  de  $L_1 \otimes L_2$  dans  $E$  en posant  $h(x_1 \otimes x_2) = u_1(x_1)u_2(x_2)$  ; le noyau de  $h$  est un idéal premier  $\underline{p}$ . Comme  $L_1$  et  $L_2$  engendrent  $E$ , on voit que  $h$  définit un isomorphisme  $h'$  du corps des fractions  $F$  de  $(L_1 \otimes L_2)/\underline{p}$  sur  $E$ , tel que, en appelant  $v_i$  l'homomorphisme naturel de  $L_i$  dans  $F$ , on ait  $u_i = h' \circ v_i$ . Autrement dit  $\mathcal{C}$  est équivalente

à l'extension composée  $(F, v_1, v_2)$ .

Réciproquement, si  $\underline{p}$  est un idéal premier de  $L_1 \otimes L_2$ , on peut former le corps  $F$  des fractions de  $(L_1 \otimes L_2)/\underline{p}$  et l'homomorphisme naturel  $v_i$  de  $L_i$  dans  $F$  ( $i = 1, 2$ ). Pour que  $(F, v_1, v_2)$  soit une extension composée, i.e. que  $v_1(L_1)$  et  $v_2(L_2)$  soient algébriquement disjoints, il faut et il suffit que les monômes par rapport aux éléments de  $v_2(B)$  soient linéairement indépendants sur  $v_1(L_1)$ , i.e. que  $\underline{p} \cap (L_1 \otimes K[B]) = (0)$ . Or comme

$A = L_1 \otimes_K L_2 \simeq (L_1 \otimes_K K(B)) \otimes_{K(B)} L_2$ , on peut plonger  $L_1 \otimes_K L_2$  dans  $A' = L_1(B) \otimes_{K(B)} L_2$  (car  $L_1 \otimes_K K(B)$  se plonge dans  $L_1(B)$ , cf. lemme 4 plus loin), et  $A'$  s'obtient en adjoignant à  $A$  les inverses des éléments de

$S = (L_1 \otimes K(B)) \cap \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right]$ ; les raisonnements de l'exposé 1 montrent qu'il y a correspondance biunivoque entre les idéaux premiers  $\underline{p}'$  de  $A'$  et les idéaux premiers  $\underline{p}$  de  $A$  tels que  $\underline{p} \cap S = \emptyset$ , par les formules  $\underline{p}' \cap A = \underline{p}$ ,  $\underline{p}' = \underline{p}A'$ .

Enfin comme  $L_2$  est algébrique sur  $K(B)$ ,  $A'$  est réunion de sous-algèbres de rang fini sur  $L_1(B)$ , donc si  $\underline{p}'$  est un idéal premier de  $A'$ ,  $A'/\underline{p}'$  est réunion d'algèbres de rang fini sur  $L_1(B)$ . Or une algèbre de rang fini sur un corps qui n'a pas de diviseurs de 0 est un corps, et il en est donc de même de  $A'/\underline{p}'$ . On a donc prouvé ceci :

Proposition 3.- Soient  $L_1$  et  $L_2$  deux extensions de  $K$ ,  $B$  une base de transcendance de  $L_2$  sur  $K$ ; dans  $L_1(B) \otimes_{K(B)} L_2$ , tout idéal premier est maximal, et il y a correspondance biunivoque entre les idéaux premiers de  $L_1(B) \otimes_{K(B)} L_2$  et les types d'extensions composées de  $L_1$  et  $L_2$ .

## 2.- Extensions primaires.

Nous dirons que l'extension  $L$  de  $K$  est primaire si la fermeture algébrique de  $K$  dans  $L$  est purement inséparable, autrement dit si pour tout  $x \in L$  algébrique sur  $K$ , on peut trouver un entier  $f \geq 0$  tel que  $x^{p^f} \in K$ .

L'introduction des extensions primaires et leur dénomination sont justifiées par le théorème suivant :

Théorème 1.- Si  $L$  est une extension du corps  $K$ , les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- a)  $L$  est extension primaire de  $K$  ;
- b) si  $L'$  est une extension quelconque de  $K$ , il y a un seul type d'extension composée de  $L$  et  $L'$  ;

c) L' étant comme en b) , dans l'algèbre  $L \otimes_K L'$  , tout diviseur de 0 est nilpotent ;

c') dans  $L \otimes \bar{K}$  ( $\bar{K}$  étant une clôture algébrique de  $K$  ) , tout diviseur de 0 est nilpotent.

Nous démontrerons d'abord deux lemmes :

Lemme 1 : Si  $L$  est une extension primaire de  $K$  , et si les  $X_i$  sont des indéterminées, le corps  $L(X_i)_{i \in I}$  est une extension primaire de  $K(X_i)_{i \in I}$ .

Il faut démontrer ceci : si  $z \in L(X_i)_{i \in I}$  et si  $a_k \in K(X_i)_{i \in I}$  ( $1 \leq k \leq n$ ) sont tels que  $z^n + \sum_{k=1}^n a_k z^{n-k} = 0$  , alors on peut trouver un entier  $f \geq 0$  tel que  $z^{P^f} = u \in K(X_i)_{i \in I}$  ; or l'expression de  $z$  et des  $a_k$  ne fait intervenir qu'un nombre fini des  $X_i$  , et on peut donc se contenter de démontrer le lemme lorsque  $I$  est fini ; mais l'hypothèse du lemme étant récurrente, il suffit d'adjoindre les  $X_i$  une à une et donc de démontrer le lemme lorsque  $I = \{1\}$  ,  $X_1 = X$  .

Soit  $f$  un entier  $\geq 0$  tel que  $u = z^{P^f}$  soit algébrique séparable sur  $K(X)$  et supposons  $u \notin K$  . On peut alors poser  $u = P(X)/Q(X)$  , où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes premiers entre eux, et où  $Q$  est unitaire, i.e. le coefficient de son terme de plus haut degré vaut 1 . Soit  $F \not\subset K$  la partie finie de  $L$  formée des coefficients de  $P$  et  $Q$  . On peut alors trouver une  $K$ -dérivation  $D$  non nulle de  $K(F) \not\subset K$  , sinon, comme  $K(F)$  est de type fini sur  $K$  , elle serait algébrique séparable sur  $K$  (Exposé 13, corollaire du théorème 2) ce qui contredirait le fait que  $L$  est primaire sur  $K$  .

$D$  se prolonge de manière bien définie en une dérivation, encore notée  $D$  , de  $K(F)(X)$  , nulle sur  $X$  donc sur  $K(X)$  . Or comme  $u$  est algébrique séparable sur  $K(X)$  , on aura  $Du = 0$  (Exposé 13) , d'où immédiatement :

$$(1) \quad D(P).Q - P.D(Q) = 0 .$$

Comme  $DX = 0$  ,  $D(P)$  et  $D(Q)$  s'obtiennent en appliquant  $D$  aux coefficients de  $P$  et  $Q$  , ce qui comme  $Q$  est unitaire, montre que  $D(Q)$  est de degré strictement plus petit que le degré de  $Q$  . De (1) résulte que  $Q$  divise  $P.D(Q)$  , donc comme il est premier à  $P$  ,  $Q$  divise  $D(Q)$  , ce qui implique  $Q = 0$  pour raison de degré. On est donc parvenu à une contradiction, ce qui prouve que  $u \in K(X)$  .

Lemme 2 : Soient  $L$  une extension de  $K$ ,  $\bar{L}$  une clôture algébrique de  $L$ ,  $\bar{K}$  la fermeture algébrique de  $K$  dans  $\bar{L}$  ( $\bar{K}$  est algébriquement close). Tout  $K$ -automorphisme  $u$  de  $\bar{K}$  qui induit l'identité sur  $L \cap \bar{K}$  se prolonge en un  $L$ -automorphisme de  $\bar{L}$ .

Si  $x \in L^{p^{-\infty}} \cap \bar{K}$ , on a  $x^{p^f} \in L \cap \bar{K}$  et par suite  $x^{p^f}$  est invariant par  $u$ , donc aussi  $x$ ; on va montrer que  $L^{p^{-\infty}}$  et  $\bar{K}$  sont linéairement disjointes sur leur intersection, ce qui prouvera que  $u$  se prolonge de manière unique en un automorphisme  $u'$  de  $\bar{K}(L^{p^{-\infty}})$  sur  $L^{p^{-\infty}}$  puisque  $u$  est l'identité sur  $L^{p^{-\infty}} \cap \bar{K}$ ; comme  $\bar{L}$  est une clôture algébrique de  $\bar{K}(L^{p^{-\infty}})$ ,  $u'$  se prolongera en un automorphisme  $u''$  de  $\bar{L}$  sur  $L$ . Soit alors  $\{x_i\}$  une base de  $L^{p^{-\infty}}$  sur  $\bar{K} \cap L^{p^{-\infty}}$ ; s'il n'y avait pas linéaire disjonction, il existerait une relation linéaire primordiale à coefficients dans  $\bar{K}$ , soit

$\sum_i a_i x_i = 0$ , l'un des  $a_i$  étant égal à 1. Si  $v$  est un  $L$ -automorphisme quelconque de  $\bar{L}$  sur  $L$ , on a  $v(x_i) = x_i$  d'où la relation linéaire

$\sum_i v(a_i) x_i = 0$ . Comme la relation écrite plus haut est primordiale, on peut trouver  $a \in \bar{K}$  avec  $v(a_i) = a a_i$  pour tout  $i$ ; mais comme l'un des  $a_i$  vaut 1, on a  $a = 1$  et  $v(a_i) = a_i$ . Ceci ayant lieu pour tout  $v$ , on a alors  $a_i \in L^{p^{-\infty}} \cap \bar{K}$ , et les  $x_i$  ne seraient pas linéairement indépendants sur  $L^{p^{-\infty}} \cap \bar{K}$ , ce qui est contradictoire.

Venons-en à la démonstration du théorème 1 :

a) implique b) : Soient  $B$  une base de transcendance de  $L'$  sur  $K$ ,  $\Omega$  une clôture algébrique de  $L(B)$ ; d'après la proposition 1 il suffit de montrer que  $\mathcal{C}(v)$  et  $\mathcal{C}(v')$  sont toujours équivalentes, ou encore que l'isomorphisme  $v' \circ v^{-1} = u$  de  $v(L')$  dans  $\Omega$  se prolonge en un  $L$ -automorphisme de  $\Omega$ ; or  $v(L')$  est algébrique sur  $K(B)$  et  $u$  se prolonge donc en un automorphisme  $u'$  de  $\overline{K(B)}$  sur  $K(B)$ . D'après le lemme 1,  $L(B)$  est primaire sur  $K(B)$ , donc  $L(B) \cap \overline{K(B)}$  est purement inséparable sur  $K(B)$ , donc invariant par  $u'$ . Le lemme 2 achève alors la démonstration. b) implique c) : On a vu que les types d'extensions composées de  $L$  et  $L'$  correspondent biunivoquement aux idéaux premiers de  $L(B) \otimes_{K(B)} L' = A_i$  donc s'il n'y a qu'un seul type d'extension composée de  $L$  et  $L'$ , l'anneau  $A$  n'a qu'un seul idéal premier; mais on a alors le lemme :

Lemme 3 : si l'anneau commutatif A ne possède qu'un seul idéal premier p, tout diviseur de 0 dans A est nilpotent.

En effet, dans tout anneau, l'ensemble des éléments nilpotents est l'intersection de tous les idéaux premiers, donc ici  $\underline{p}$  est l'ensemble des éléments nilpotents de A. Or  $\underline{p}$  est aussi le seul idéal maximal de A, qui est donc un anneau local, et par suite tout  $a \in \underline{p}$  est inversible, donc non diviseur de 0.

Ceci étant démontré,  $L \otimes K(B)$  se plonge dans  $L(B)$  et par suite  $L \otimes_K L' \simeq (L \otimes_K K(B)) \otimes_{K(B)} L'$  peut s'identifier à un sous-anneau de A; si a est diviseur de 0 dans  $L \otimes L'$ , il l'est a fortiori dans A, donc nilpotent.

c) implique c') trivialement.

c') implique a) : soit  $x \in L$  algébrique sur K de polynome minimal  $P(X)$ ; comme  $L[X]/(P(X))$  est isomorphe à  $L \otimes K(x)$  dans cet anneau tout diviseur de 0 est nilpotent; autrement dit, si un polynome  $Q(X) \in L[X]$  divise P, P divise une certaine puissance de Q; utilisant une décomposition de P en facteurs premiers dans  $L[X]$ , on voit que  $P(X)$  est égal dans  $L[X]$  à une puissance d'un polynome irréductible, d'où résulte que x est purement inséparable.

C.Q.F.D.

Corollaire 1 : Soient pour  $i = 1, 2$ ,  $L_i$  une extension de K, et  $S_i$  la plus grande extension algébrique séparable de K contenue dans  $L_i$ . Alors le type d'une extension composée  $\mathcal{C}$  de  $L_1$  et  $L_2$ , ne dépend que du type de l'extension composée  $\mathcal{S}$  de  $S_1$  et  $S_2$  induite par  $\mathcal{C}$ .

Soit  $(E, u_1, u_2)$  une extension composée de  $L_1$  et  $L_2$ ; nous identifierons  $L_i$  à son image dans E par  $u_i$  ( $i = 1, 2$ ) et nous appellerons F le sous-corps engendré par  $S_1$  et  $S_2$ . Soit alors  $(E', u'_1, u'_2)$  une extension composée de  $L_1$  et  $L_2$ , induisant une extension composée de  $S_1$  et  $S_2$  équivalente à  $(F, 1, 1)$ ; il existe alors un isomorphisme f de F dans E' se réduisant à  $u'_1$  sur  $S_1$ . Comme  $L_1$  est extension primaire de  $S_1$ , il y a un seul type d'extension composée de  $L_1/S_1$  et  $F/S_1$ , donc f se prolonge en un isomorphisme f' de  $F(L_1) = S_2(L_1)$  dans E qui se réduit à  $u'_1$  sur  $L_1$ . Enfin comme  $L_2$  est primaire sur  $S_2$ , il existe un isomorphisme f'' de E sur E' se réduisant à f' sur  $S_2(L_1)$  et à  $u'_2$  sur  $L_2$ , ce qui prouve l'équivalence cherchée :

$$\begin{array}{ccccc}
 L_1 & \longrightarrow & F(L_1) & \longrightarrow & E \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 S_1 & \longrightarrow & F & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \\
 K & \longrightarrow & S_2 & \longrightarrow & L_2
 \end{array}$$

Corollaire 2 : Si  $L/K$  est une extension primaire, et si  $L'$  est une extension composée de  $L/K$  et  $K'/K$ , l'extension  $L'/K'$  est primaire.

Soit  $M$  une extension quelconque de  $K'$ , et  $\mathcal{C} = (E, u_1, u_2)$  une extension composée de  $L'/K'$  et  $M/K'$ ; on peut identifier  $L$  et  $K'$  à des sous-corps de  $L'$ , et  $L'$  et  $M$  à des sous-corps de  $E$ , donc tous les corps envisagés seront des sous-corps de  $E$ . Si  $B$  est une base de transcendance de  $L/K$ , c'est encore une base de transcendance de  $L'/K'$  puisque  $L$  et  $K'$  sont algébriquement disjoints sur  $K$ ; pour une raison analogue,  $B$  est encore une base de transcendance de  $E$  sur  $M$ , donc  $E$  est extension composée de  $L/K$  et  $M/K$ . Si alors  $\mathcal{C}' = (E', u'_1, u'_2)$  est une autre extension composée de  $L'/K'$  et  $M/K'$ , elle définit une extension composée de  $L/K$ , et  $M/K$  qui est équivalente à l'extension composée  $E$  de  $L/K$  et  $M/K$  par le théorème 2. Autrement dit, il existe un isomorphisme  $f$  de  $E$  sur  $E'$ , prolongeant  $u'_1$  sur  $L$  et  $u'_2$  sur  $M$ ; comme  $L' = L(K')$  et que  $f$  et  $u'_1$  induisent l'identité sur  $K'$ ,  $f = u'_1$  sur  $L'$ , et  $\mathcal{C}'$  est équivalente à  $\mathcal{C}$ , ce qui, en appliquant à nouveau le théorème 2, prouve que  $L'/K'$  est une extension primaire.

Remarques : 1) Supposons que  $L$  soit le corps des fractions d'un anneau d'intégrité  $A$  contenant  $K$ ; comme dans  $L \otimes L'$  tout élément est le produit d'un élément inversible et d'un élément de  $A \otimes L'$ , la condition c) équivaut au fait que, dans  $A \otimes L'$ , tout diviseur de 0 est nilpotent.

2) le lemme 1 implique le résultat suivant qui a son intérêt :

Si  $L$  est une extension de  $K$  et si  $K'$  est la fermeture algébrique de  $K$  dans  $L$ , la fermeture algébrique de  $K(X_i)_{i \in I}$  dans  $L(X_i)_{i \in I}$  est égale à  $K'(X_i)_{i \in I}$  lorsque les  $X_i$  sont des indéterminées.

$K'(X_i)_{i \in I}$  étant algébrique sur  $K(X_i)_{i \in I}$ , il suffit de démontrer qu'il est algébriquement fermé dans  $L(X_i)_{i \in I}$ , et il suffit donc de démontrer notre assertion lorsque  $K = K'$ . Comme dans la démonstration du lemme 1, on se ramène au cas d'une seule indéterminée  $X$ ; enfin comme  $L/K$  est primaire (car  $K$  est algébriquement fermée dans  $L$ ), il suffit de montrer que si  $z^{p^f} \in K(X)$ , alors  $z \in K(X)$ . Posons  $z = P/Q$  et  $z^{p^f} = P'/Q'$  avec  $P, Q \in L[X]$  premiers entre eux,  $Q$  unitaire, et  $P', Q' \in K[X]$  premiers entre eux et  $Q'$  unitaire; l'identité de Bezout montre que  $P'$  et  $Q'$  sont premiers entre eux dans  $L[X]$ , et comme  $P'/Q' = P^{p^f}/Q^{p^f}$  et que  $P^{p^f}$  et  $Q^{p^f}$  sont premiers entre eux et  $Q^{p^f}$  unitaire, on en déduit  $P' = P^{p^f}$  et  $Q' = Q^{p^f}$ ,

ce qui prouve que les coefficients de  $P$  et  $Q$  sont purement inséparables sur  $K$  donc sont dans  $K$ .

### 3.- Extensions régulières.

Nous dirons qu'une extension  $L/K$  est régulière si elle est séparable et primaire ; puisque toute sous-extension d'une extension séparable l'est aussi, et comme une extension algébrique  $\neq K$  de  $K$  ne peut être à la fois séparable et purement inséparable, la condition s'exprime aussi comme suit : une extension  $L/K$  est régulière si  $K$  est algébriquement fermé dans  $L$ , et si  $L$  est séparable sur  $K$ .

Nous allons d'abord donner un certain nombre de formes équivalentes de cette définition.

Théorème 2.- Si  $L$  est une extension du corps  $K$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

- a)  $L$  est extension régulière de  $K$  ;
  - b) si  $L'$  est une extension quelconque de  $K$ , l'algèbre  $L \otimes L'$  est sans diviseurs de  $0$  ;
  - b') si  $\bar{K}$  est une clôture algébrique de  $K$ ,  $L \otimes \bar{K}$  est une algèbre sans diviseurs de  $0$  ;
  - c) si  $M$  est un surcorps quelconque de  $L$ , tout sous-corps  $L'$  de  $M$  contenant  $K$  et algébriquement disjoint de  $L$  sur  $K$ , en est linéairement disjoint ;
  - c') si  $\bar{L}$  est une clôture algébrique de  $L$ ,  $L$  est linéairement disjoint de la clôture algébrique  $\bar{K}$  de  $K$  contenue dans  $L$ .
- c) implique c') trivialement (prendre  $M = \bar{L}$ ,  $L' = \bar{K}$ ) ;
- b) implique b') trivialement de la même manière ;
- c) implique b) : si  $L'$  est une extension de  $K$ , soit  $(M, 1, 1)$  une extension composée de  $L$  et  $L'$ ,  $1$  étant l'identité.  $L$  et  $L'$  étant algébriquement disjoints dans  $M$ , sont linéairement disjoints, et par suite le sous-anneau de  $M$  engendré par  $L$  et  $L'$  est isomorphe à  $L \otimes L'$  qui est donc sans diviseurs de  $0$ .
- c') implique b') : même raisonnement que dans le cas précédent en prenant  $L' = \bar{K}$  et en plongeant  $M$  dans  $\bar{L}$ , ce qui est possible.
- a) implique c) : supposons  $L/K$  régulière et  $L$  algébriquement disjoint

sur  $K$  d'un sous-corps  $L'$  de  $M$  ; comme  $L/K$  est séparable,  $L \otimes L'$  n'a pas d'éléments nilpotents et comme  $L/K$  est aussi primaire, on déduit du théorème 1 que  $L \otimes L'$  n'a pas de diviseurs de 0. Or si  $F$  est le corps des quotients de  $L \otimes L'$ ,  $F$  est de manière évidente une extension composée de  $L$  et  $L'$  dans laquelle  $L$  et  $L'$  sont linéairement disjoints. Mais  $L/K$  étant primaire, il n'y a qu'un seul type d'extension composée de  $L$  et  $L'$ , donc  $L$  et  $L'$  sont linéairement disjoints dans toute extension composée.

C.Q.F.D.

Pour terminer, nous allons indiquer quelques propriétés de permanence des extensions régulières :

Proposition 3 : a) si  $L/K$  est une extension régulière, toute sous-extension  $L'/K$  de  $L/K$  est régulière ;

b) une extension transcendante pure est régulière ;

c) si  $L/K$  est une extension régulière et si  $L'$  est une extension composée de  $L$  et  $K'$ ,  $L'/K'$  est une extension régulière ;

d) si  $L/K$  est une extension composée de deux extensions régulières  $L_1$  et  $L_2$ , c'est une extension régulière ;

e) si  $K$  est algébriquement clos, toute extension  $L/K$  est régulière.

a) résulte de ce que les propriétés d'extension primaire ou séparable se transmettent aux sous-extensions, comme il résulte de la définition de ces notions.

Avant de poursuivre la démonstration, prouvons un lemme :

Lemme 4 : Si  $E/K$  est une extension contenant une sous-extension  $L/K$ , et si  $L$  est linéairement disjoint d'un sous-anneau  $A \subset K$  de  $E$ ,  $L$  est linéairement disjoint du corps  $F$  des fractions de  $A$ .

Supposons les  $x_i \in L$  linéairement indépendants sur  $K$  ; si l'on a

$\sum_i f_i x_i = 0$  ( $f_i \in F$ ), on peut trouver  $a \in A$  tel que  $af_i \in A$  pour tout  $i$  ; on aura alors  $\sum_i (af_i)x_i = 0$ , d'où  $af_i = 0$  puisque  $L$  et  $A$  sont linéairement disjoints, et par suite  $f_i = 0$  pour tout  $i$ , d'où le lemme.

b) soit  $L = K(B)$  une extension pure de  $K$ ,  $B$  une base de transcendance de  $L$  ; si  $L$  est contenu dans le corps  $M$  et algébriquement disjoint de  $L'$  tel que  $K \subset L' \subset M$ , les monômes des éléments de  $B$  forment une base de  $K[B]$

sur  $K$ , et aussi de  $L'[B]$  sur  $L'$  puisque les éléments de  $B$  sont algébriquement indépendants sur  $L'$ ; donc  $L'$  et  $K[B]$  sont linéairement disjoints sur  $K$ , donc aussi  $L'$  et  $K(B)$  par le lemme 4. Ceci prouve que  $L/K$  est régulière.

c) si  $\bar{L}'$  est clôture algébrique de  $L'$ ,  $L$  et  $K'$  sont algébriquement disjoints donc aussi  $L$  et la clôture  $\bar{K}'$  de  $K'$ ; comme  $L/K$  est régulière,  $L$  et  $\bar{K}'$  sont linéairement disjoints, et l'homomorphisme naturel de  $L \otimes_K \bar{K}'$  dans  $\bar{L}'$  est injectif. Comme  $L \otimes_K \bar{K}' \simeq (L \otimes_K K') \otimes_{K'} \bar{K}'$ , il en résulte que  $\bar{K}'$  est linéairement disjoint de  $L[K']$  sur  $K'$ , donc aussi de  $L(K')$  par le lemme 4. Ceci prouve que  $L'/K'$  est régulière.

d) soit  $M$  un surcorps de  $L$ , et supposons  $L$  algébriquement disjoint de  $L'$  sur  $K$ ; comme  $L$  est engendré par  $L_1$  et  $L_2$  qui sont algébriquement disjoints,  $L_1$  est algébriquement disjoint de  $K(L', L_2)$  donc en est linéairement disjoint ( $L_1/K$  régulière), donc  $L_1$  est linéairement disjoint de  $K[L', L_2]$ ; comme  $L_2/K$  est régulière,  $L'$  et  $L_2$  sont linéairement disjoints sur  $K$ , et l'homomorphisme naturel de  $L_2 \otimes L'$  sur  $K[L', L_2]$  est injectif; l'associativité du produit tensoriel et ce qu'on vient de démontrer prouvent que l'homomorphisme naturel de  $L_1 \otimes L_2 \otimes L'$  dans  $M$  est injectif, donc que  $L'$  est linéairement disjoint de  $K[L_1, L_2]$  et donc aussi de  $L$  par le lemme 4.

e) si  $K$  est algébriquement clos, toute extension  $L/K$  est séparable, et  $K$  est évidemment algébriquement fermé dans  $L$ , donc  $L/K$  est régulière.

Remarque finale : on met facilement la condition c') du théorème 2 sous la forme suivante :

Si  $L$  est engendré sur  $K$  par des éléments  $x_i$ , l'idéal des relations algébriques entre les  $x_i$  à coefficients dans  $\bar{K}$ , a une base formée de polynômes à coefficients dans  $K$ .

---