

# SÉMINAIRE HENRI CARTAN

C. CHEVALLEY

## **Le théorème principal de Zariski, I**

*Séminaire Henri Cartan*, tome 8 (1955-1956), exp. n° 11, p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=SHC\\_1955-1956\\_\\_8\\_\\_A11\\_1](http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A11_1)

© Séminaire Henri Cartan  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1955-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

LE THÉORÈME PRINCIPAL DE ZARISKI, I.  
(Exposé de C. CHEVALLEY, le 6.2.1956)

---

1.- Domination régulière.

Soient  $M$  et  $M'$  des localités sur un même corps de constantes  $K$ , contenues dans un même corps  $L$ . Supposons que  $M'$  domine  $M$ ; on dit que  $M'$  domine  $M$  régulièrement, ou est régulière au-dessus de  $M$ , si les conditions suivantes sont satisfaites :

- a)  $M'$  a même niveau que  $M$  ;
- b)  $M'$  a même dimension que  $M$  ;
- c) il n'y a aucune localité  $\neq M'$  qui domine  $M$  et dont  $M'$  soit une spécialisation.

La condition a) signifie que le corps des fractions de  $M'$  est algébrique sur celui de  $M$ . La condition b) exprime que le corps des résidus  $M'/\underline{r}(M')$  est algébrique sur  $M/\underline{r}(M)$ . La condition c) signifie que  $\underline{r}(M)$  n'est contenu dans aucun idéal premier  $\neq \underline{r}(M')$  de  $M'$ , donc que l'idéal engendré par  $\underline{r}(M)$  dans  $M'$  est primaire.

On a en vue le théorème suivant ("main theorem" de Zariski), dont la démonstration fait l'objet de cet exposé et du suivant :

Théorème 1.- Si  $M'$  domine  $M$  régulièrement,  $M'$  est de la forme  $M_{\underline{m}^*}^*$ , où  $M^*$  désigne la fermeture intégrale de  $M$  dans  $M'$ , et  $\underline{m}^*$  un idéal

maximal de  $M^*$ .

Proposition 1.- Soient  $M$  et  $M'$  des localités telles que  $M'$  domine  $M$  et ait même niveau et même dimension que  $M$ . Pour que  $M'$  domine  $M$  régulièrement, il faut et suffit que la condition suivante soit satisfaite : si  $\underline{p}'$ ,  $\underline{q}'$  sont des idéaux premiers de  $M'$  tels que  $\underline{p}' \subset \underline{q}'$ ,  $\underline{p}' \cap M = \underline{q}' \cap M$ , on a  $\underline{p}' = \underline{q}'$ . S'il en est ainsi, et si  $\underline{p}'$  est un idéal premier de  $M'$  et  $\underline{p} = \underline{p}' \cap M$ , alors  $M'/\underline{p}'$  est régulière sur  $M/\underline{p}$ , et  $M'_{\underline{p}'}$  régulière sur  $M_{\underline{p}}$ .

Supposons que  $M'$  domine  $M$  régulièrement. Soit  $\underline{p}'$  un idéal premier de  $M'$ , et soit  $\underline{p} = \underline{p}' \cap M$ . Alors  $M'/\underline{p}'$  domine  $M/\underline{p}$ ; de plus, l'idéal engendré par  $\underline{r}(M)$  dans  $M'$  contient une puissance de  $\underline{r}(M')$ , d'où il résulte que l'idéal engendré par  $\underline{r}(M/\underline{p}) = \underline{r}(M)/\underline{p}$  dans  $M'/\underline{p}'$  est primaire, et par suite que  $M'/\underline{p}'$  n'est spécialisation d'aucune localité différente d'elle-même qui domine  $M/\underline{p}$ . Or on peut considérer  $M/\underline{p}$  et  $M'/\underline{p}'$  comme des localités de schémas affines  $S$  et  $S'$  tels que  $S'$  domine  $S$ ; si  $e$  est la différence entre la dimension de  $S'$  et celle de  $S$ ,  $M'/\underline{p}'$  est spécialisation d'une localité de dimension  $\geq e + \dim M/\underline{p}$  qui domine  $M/\underline{p}$  (exposé 8, théorème 2). On a donc  $\dim M'/\underline{p}' \geq e + \dim M/\underline{p}$ ; mais on a  $\dim M'/\underline{p}' = \dim M' = \dim M = \dim M/\underline{p}$ , d'où  $e = 0$ , ce qui signifie que le corps des fractions de  $M'/\underline{p}'$  est algébrique sur celui de  $M/\underline{p}$ . Soit  $\underline{q}'$  un idéal premier de  $M'$  contenant  $\underline{p}'$  et tel que  $\underline{q}' \cap M = \underline{p}$ . Si  $A'$  est l'algèbre de  $S'$ ,  $\underline{q}'/\underline{p}'$  est l'idéal engendré dans  $M'$  par un idéal premier  $\underline{q}'_0$  de  $A'$ . La dimension de l'algèbre affine  $A'$  est égale à celle de  $S'$ , donc à celle de  $S$ ; de même, la dimension de  $A'/\underline{q}'_0$  est égale au degré de transcendance sur  $K$  du corps des fractions de  $(M'/\underline{p}')/(\underline{q}'/\underline{p}') = M'/\underline{q}'$ , donc aussi au degré de transcendance sur  $K$  du corps des fractions de  $M/\underline{p}$ , i.e. à la dimension de  $S$ . Comme  $A'$  et  $A'/\underline{q}'_0$  ont même dimension, on a  $\underline{q}'_0 = \{0\}$  (exposé 4, proposition 2), d'où  $\underline{q}' = \underline{p}'$ .

Supposons réciproquement les conditions satisfaites. Soit  $\underline{p}'$  un idéal premier de  $M'$  qui contient  $\underline{r}(M)$ ; on a alors  $\underline{p}' \cap M = \underline{r}(M') \cap M$ , d'où  $\underline{p}' = \underline{r}(M')$ ;  $M'$  domine donc  $M$  régulièrement.

Supposons désormais  $M'$  régulière au-dessus de  $M$ . Soient  $\underline{p}'$  un idéal premier de  $M'$  et  $\underline{p} = M \cap \underline{p}'$ ; nous avons vu dans la première partie de la démonstration que  $M/\underline{p}$  et  $M'/\underline{p}'$  ont même niveau. Ces deux localités ont donc même dimension, et l'idéal engendré par  $\underline{r}(M)/\underline{p}$  dans  $M'/\underline{p}'$  est primaire;  $M'/\underline{p}'$  est donc régulière sur  $M/\underline{p}$ . Les localités  $M'_{\underline{p}'}$  et  $M_{\underline{p}}$  ont évidemment

même niveau ; elles ont même dimension puisque  $M'/\underline{p}'$  et  $M/\underline{p}$  ont même niveau. Soit  $\underline{q}''$  un idéal premier de  $M'_p$ , qui contient  $\underline{r}(M'_p)$  ; alors  $\underline{q}'' = M'_{\underline{q}'}$ , où  $\underline{q}'$  est un idéal premier contenu dans  $\underline{p}'$ , et  $\underline{q}' = \underline{q}'' \cap M'$  contient  $\underline{r}(M'_p) \cap M = \underline{p}$ , ce qui montre que  $\underline{q}' = \underline{p}'$ ,  $\underline{q}'' = \underline{r}(M'_p)$  ;  $M'_p$  est donc régulière sur  $M_p$ . Ceci achève la démonstration de la proposition 1.

Corollaire : Soit  $M'$  une localité qui domine régulièrement une localité  $M$ , et soit  $N$  une localité qui domine  $M$  et qui est dominée par  $M'$ . Alors  $M'$  est régulière au-dessus de  $N$ .

On a  $M/\underline{r}(M) \subset N/\underline{r}(N) \subset M'/\underline{r}(M')$  ; comme  $M'/\underline{r}(M')$  est algébrique sur  $M/\underline{r}(M)$ , on a  $\dim M = \dim N = \dim M'$  ; par ailleurs, il est clair que  $M$ ,  $N$  et  $M'$  ont même niveau. Il résulte alors immédiatement de la proposition 1 que  $M'$  est régulière au-dessus de  $N$ .

## 2.- Un théorème préliminaire.

Soit  $B$  un anneau d'intégrité, et soit  $A$  un sous-anneau de  $B$ . L'ensemble  $\underline{f}$  des  $x \in B$  tels que  $xB \subset A$  est manifestement un idéal dans  $B$  (et également dans  $A$ ) ; on l'appelle le conducteur de  $B$  par rapport à  $A$ .

Proposition 2.- Les notations étant comme ci-dessus, soit  $S$  une partie multiplicativement stable  $\neq \emptyset$  de  $A$  ne contenant pas 0 ; si  $B$  est un  $A$ -module de type fini, le conducteur de  $B_S$  par rapport à  $A_S$  est alors l'idéal engendré par  $\underline{f}$  dans  $B_S$ .

Il est clair que  $\underline{f}B_S \subset A_S$ . Soit  $y \in B_S$  tel que  $yB_S \in A_S$  ; soient  $s_1$  un élément de  $S$  tel que  $s_1y \in B$ , et  $x_1, \dots, x_r$  des éléments de  $B$  tels que  $B = Ax_1 + \dots + Ax_r$  ; les  $s_1yx_i$  étant dans  $A_S$ , il y a un  $s_2 \in S$  tels que les  $s_2s_1yx_i$  soient dans  $A$ , d'où  $s_2s_1y \in \underline{f}$ , et  $y$  appartient à l'idéal engendré par  $\underline{f}$ .

Théorème préliminaire.- Soient  $M$  une localité,  $x$  un élément du corps des fractions  $F$  de  $M$ ,  $M^*$  un sous-anneau de  $F$ , contenant  $M[x]$  et entier sur  $M[x]$ ,  $M'$  l'anneau local d'un idéal premier  $\underline{m}^*$  de  $M^*$ . Faisons en outre les hypothèses :

- (i)  $M'$  domine  $M$  régulièrement ;
- (ii)  $M$  est intégralement fermé dans  $M^*$ .

Alors  $M' = M$ .

Avant de commencer la démonstration, traduisons la condition (i) en explicitant les conditions (a), (b) et (c) de la domination régulière : la condition (a) est automatiquement satisfaite, puisque  $M$  et  $M'$  ont même corps des fractions  $F$  ; la condition (b) exprime que  $M'/\underline{r}(M')$  est algébrique sur  $M/\underline{r}(M)$ , ou encore que l'anneau  $M^*/\underline{m}^*$  est algébrique sur  $M/\underline{r}(M)$  ; comme  $M^*/\underline{m}^*$  est algébrique sur  $M[x]/\underline{m}$  (en posant  $\underline{m} = M[x] \cap \underline{m}^*$ ), on voit que la condition (b) s'exprime comme suit :

(b') l'anneau  $M[x]/\underline{m}$  est algébrique sur  $M/\underline{r}(M)$ .

Or ceci exprime qu'il existe un polynôme  $P$  à coefficients dans  $M$ , non tous dans  $\underline{r}(M)$ , tel que  $P(x) \in \underline{m}$  ; on peut supposer que l'un des coefficients de  $P$  est égal à 1, d'où finalement :

(b'') il existe un polynôme unitaire  $P$ , à coefficients dans  $M$ , tel que  $P(x) \in \underline{m}$ .

Quant à la condition (c) de domination régulière, elle se traduit comme suit :

(c')  $\underline{m}^*$  est minimal dans l'ensemble des idéaux premiers de  $M^*$  tels que  $M \cap \underline{m}^* = \underline{r}(M)$ .

Cela posé, montrons d'abord que  $M^*$  est un  $M[x]$ -module de type fini. Il existe une algèbre affine  $A$  et un idéal premier  $\underline{u}$  de  $A$  tels que  $M = A_{\underline{u}}$  ; soit  $S = A - \underline{u}$  ; on a  $M[x] = (A[x])_S$ . Comme  $A[x]$  est affine, sa fermeture intégrale  $B$  dans  $F$  est un  $A[x]$ -module de type fini (Exposé 4, théorème 1). Or  $B_S$  est la fermeture intégrale de  $M[x]$  dans  $F$  (Exposé 1, proposition 5), et contient par suite  $M^*$  ; donc  $M^*$  est un  $M[x]$ -module de type fini.

Lemme.- Sous les hypothèses du théorème préliminaire, soit  $u \in M^*$  tel que  $\underline{u} \subset M[x]$ . Alors  $u \in M[x]$ .

C'est évident si  $x \in M$ , car alors  $M^* = M$  en vertu de (ii). Supposons donc  $x \notin M$  ; alors  $x$  n'est pas entier sur  $M$ , donc  $P(x) \neq 0$ . Puisque  $P(x) \in \underline{m}$  (condition (b'')), on a  $uP(x) \in M[x]$  ;  $uP(x)$  est donc égal à un polynôme en  $x$  à coefficients dans  $M$ , et par suite (identité de la division par un polynôme unitaire  $P$ ) est de la forme  $P(x)Q(x) + R(x)$ , où  $Q$  et  $R$  ont leurs coefficients dans  $M$ , le degré  $t'$  de  $R$  étant strictement inférieur au degré  $t$  de  $P$ . Ainsi

$$u = Q(x) + y, \quad \text{avec } y = (P(x))^{-1}R(x).$$

Le lemme sera démontré si on prouve que  $y \in M$  ; comme  $y \in M^*$ , il suffit de montrer que  $y$  est entier sur  $M$ , c'est-à-dire appartient à tout anneau de

valuation  $V$  du corps  $F$  contenant  $M$ . Or si  $x \in V$ , on a  $M[x] \subset V$ , donc  $M^* \subset V$ , d'où  $y \in V$ . Si  $x \notin V$ ,  $x^{-1}$  est dans  $\underline{r}(V)$ ; on a

$y = (x^{-1})^{t-t'} (P'(x^{-1}))^{-1} R'(x^{-1})$ , où  $P'$  et  $R'$  sont des polynômes à coefficients dans  $M$ , le terme constant de  $P'$  étant 1; comme  $x^{-1} \in \underline{r}(V)$ ,  $P'(x^{-1})$  est inversible dans  $V$ , d'où  $y \in V$ , ce qui achève la démonstration.

Montrons maintenant qu'il suffit de démontrer le théorème lorsqu'on ajoute aux hypothèses de l'énoncé une hypothèse supplémentaire :

(H) pour tout idéal premier  $\underline{p}'$  de  $M'$ , distinct de  $\underline{r}(M')$ , on a  $M'_{\underline{p}'} = M_{\underline{p}}$  (en notant  $\underline{p} = M \cap \underline{p}'$ ).

En effet, soit  $\underline{p}'$  un idéal premier de  $M'$ ; posons  $\underline{p} = M \cap \underline{p}'$ ,  $\underline{p}^* = M^* \cap \underline{p}'$ . Alors  $M'_{\underline{p}'} = M_{\underline{p}^*}$  domine  $M_{\underline{p}}$  régulièrement (proposition 1);  $M_{\underline{p}^*}$  est anneau local d'un idéal premier de l'anneau  $N^* = M_{\underline{p}}[M^*]$ , qui est entier sur  $M_{\underline{p}}$ . Enfin tout élément  $u \in N^*$  qui est entier sur  $M_{\underline{p}}$  est dans  $M_{\underline{p}}$ ; car il existe  $s \in M$ ,  $s \notin \underline{p}$ , tel que  $su \in M^*$  soit entier sur  $M$ , d'où  $su \in M$  et  $u \in M_{\underline{p}}$ . Ainsi  $M_{\underline{p}}$ ,  $N^*$  et  $M'_{\underline{p}'}$  possèdent les mêmes propriétés que  $M$ ,  $M^*$  et  $M'$  (cf. énoncé du théorème). Cela dit, si  $M'$  était  $\neq M$ , choisissons parmi les idéaux premiers  $\underline{p}'$  de  $M'$  tels que  $M'_{\underline{p}'} \neq M_{\underline{p}}$  un élément maximal, soit  $\underline{p}'$ ; le théorème sera démontré si nous le prouvons en remplaçant  $M$ ,  $M^*$  et  $M'$  par  $M_{\underline{p}}$ ,  $M_{\underline{p}}[M^*]$  et  $M'_{\underline{p}'}$ . Et alors l'hypothèse (H) est vérifiée par ces nouvelles données.

Nous ferons donc désormais l'hypothèse (H). Introduisons le conducteur  $\underline{f}$  de  $M^*$  par rapport à  $M[x]$ . On va montrer que  $\underline{f}$  n'est pas contenu dans l'idéal  $\underline{m}^*$ . Tout d'abord, soit  $\underline{p}^*$  un idéal premier de  $M^*$ , contenu dans  $\underline{m}^*$  et  $\neq \underline{m}^*$ ; on a  $M_{\underline{p}^*}^* = M'_{\underline{p}'}$ , où  $\underline{p}'$  est un idéal premier de  $M'$ , distinct de  $\underline{r}(M')$ ; d'après l'hypothèse (H),  $M_{\underline{p}^*}^* = M_{\underline{p}}$ , d'où  $M_{\underline{p}}[M^*] \subset M_{\underline{p}}[x]$ . Il résulte alors de la proposition 2 que l'idéal engendré par  $\underline{f}$  dans  $M_{\underline{p}}[M^*]$ , et a fortiori dans  $M_{\underline{p}^*}^*$ , contient 1, donc que  $\underline{f}$  n'est pas contenu dans  $\underline{p}^*$ . Pour montrer maintenant que  $\underline{f} \not\subset \underline{m}^*$ , raisonnons par l'absurde: si  $\underline{f} \subset \underline{m}^*$ ,  $\underline{m}^*$  serait minimal dans l'ensemble des idéaux premiers de  $M^*$  contenant  $\underline{f}$ , d'après ce qu'on vient de voir. Il existerait donc un  $u \in M^*$ ,  $u \notin \underline{f}$ , tel que  $u\underline{m}^* \subset \underline{f}$  (cf. Exposé 2). Cela signifie l'existence d'un  $v \in M^*$  tel que  $uv \notin M[x]$  et  $uv\underline{m}^* \subset M[x]$ . Or ceci contredit le lemme.

Ainsi  $\underline{f} \not\subset \underline{m}$ . Ceci implique que  $M^* \subset (M[x])_{\underline{m}}$ , et par suite  $M' = (M[x])_{\underline{m}}$ . Donc  $(M[x])_{\underline{m}}$  domine  $M$  régulièrement, et par suite  $\underline{m}$  est minimal dans l'ensemble des idéaux premiers de  $M[x]$  qui contiennent  $\underline{r}(M)$ .

Dans ces conditions, je dis que  $x$  annule un polynome à coefficients dans  $M$ , non tous dans  $\underline{r}(M)$ . Sinon, introduisons l'algèbre  $C$  des polynomes à une lettre  $\tau$ , à coefficients dans  $M/\underline{r}(M)$ ; il existerait un homomorphisme  $\varphi$  de  $M[x]$  dans  $C$ , qui prolonge l'application canonique de  $M$  sur  $M/\underline{r}(M)$  et envoie  $x$  sur  $\tau$ . Le noyau de  $\varphi$  est un idéal premier contenant  $\underline{r}(M)$ , donc est identique à  $\underline{m}$ ; or ce noyau est visiblement l'idéal engendré par  $\underline{r}(M)$  dans  $M[x]$ . Or on sait qu'il existe un polynome unitaire  $P$  tel que  $P(x) \in \underline{m}$ ; ceci donne une équation  $Q(x) = 0$ , où les coefficients du polynome  $Q$  sont dans  $M$  et non tous dans  $\underline{r}(M)$ , contrairement à l'hypothèse.

Ainsi nous avons une équation de la forme

$$x^n(1 + c_1x + \dots + c_sx^s) + b_1x^{n-1} + \dots + b_n = 0,$$

les  $b_j$  étant dans  $M$ , et les  $c_i$  dans  $\underline{r}(M)$ , avec  $n > 0$ . Soit  $y = 1 + c_1x + \dots + c_sx^s$ . On a  $y \notin \underline{m}$ ;  $x$  est entier sur  $M[y^{-1}]$ , donc  $y$ , qui est dans  $M[x]$ , est entier sur  $M[y^{-1}]$ , et ceci exprime que  $y$  est entier sur  $M$ . Alors  $y \in M$  (hypothèse (ii) de l'énoncé). Comme  $y \notin \underline{m}$ , on a  $y \notin \underline{r}(M)$ , donc  $y^{-1} \in M$ ; alors  $x$ , entier sur  $M[y^{-1}]$ , est entier sur  $M$ , donc  $x \in M$ . Ceci implique  $M^* = M$ , d'où finalement  $M' = M$ . Et la démonstration du théorème préliminaire est achevée.

---