

# SÉMINAIRE HENRI CARTAN

H. CARTAN

## La formule du produit pour les opérations de Steenrod

*Séminaire Henri Cartan*, tome 7, n° 2 (1954-1955), exp. n° 16 bis, p. 1-5

[http://www.numdam.org/item?id=SHC\\_1954-1955\\_\\_7\\_2\\_A6\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_2_A6_0)

© Séminaire Henri Cartan  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

LA FORMULE DU PRODUIT  
POUR LES OPÉRATIONS DE STEENROD

(Notes de H. CARTAN)

On se propose de donner ici, de la "formule du produit", une démonstration basée uniquement sur les résultats obtenus dans les exposés 14, 15 et 16

Énoncé du résultat : soit  $p$  un entier premier, et soient  $X$  et  $Y$  deux complexes CSS. Si  $x \in H^n(X; Z_p)$  et  $y \in H^r(Y; Z_p)$ , avec  $n \geq 1$ ,  $r \geq 1$ , on a, pour tout entier  $c \geq 0$  et congru à 0 ou 1 mod.  $(2p-2)$ ,

$$(1) \quad \text{St}_p^c(x \otimes y) = \sum_{a,b} (-1)^{ar} \text{St}_p^a x \otimes \text{St}_p^b y,$$

la sommation étant étendue à tous les couples d'entiers  $a$  et  $b \geq 0$ , congrus à 0 ou 1 mod.  $(2p-2)$ , et tels que  $a+b = c$ .

Dans la formule (1), la notation  $x \otimes y$  désigne, par abus de langage, l'élément de  $H^{n+r}(X \times Y; Z_p)$ , image de  $x \otimes y$  par l'application naturelle  $H^*(X; Z_p) \otimes H^*(Y; Z_p) \longrightarrow H^*(X \times Y; Z_p)$ . Même abus de langage pour la notation du second membre de (1).

Cas particuliers : pour  $p=2$ , on retrouve la formule connue (cf. [1])

$$(1') \quad \text{Sq}^c(x \otimes y) = \sum_{a+b=c} \text{Sq}^a x \otimes \text{Sq}^b y.$$

Pour  $p$  impair, et  $c = 2k(p-1)$ , on retrouve la formule de Steenrod

$$(1'') \quad P_p^k(x \otimes y) = \sum_{h+h'=k} P_p^h x \otimes P_p^{h'} y.$$

Il suffit évidemment de prouver (1) lorsque  $X = K(Z_p, n)$ ,  $Y = K(Z_p, r)$  (complexes d'Eilenberg-MacLane), et lorsque  $x$  et  $y$  sont les classes fondamentales de  $H^n(Z_p, n; Z_p)$  et  $H^r(Z_p, r; Z_p)$ . Dans ce cas, l'application naturelle  $H^*(X; Z_p) \otimes H^*(Y; Z_p) \longrightarrow H^*(X \times Y; Z_p)$  est un isomorphisme.

1.- Rappel de propriétés qu'on va utiliser.

$$(I) \quad \text{St}_p^c x = 0 \text{ si } \text{deg}(x) < [c/(p-1)] \text{ (cf. Exp. 16, paragraphe 2)}$$

(On rappelle que la notation  $[u]$  désigne le plus petit entier  $\geq u$ ).

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} St_p^0 \text{ est l'identité ;} \\ St_p^{2k(p-1)+1} = \beta'_p \circ St_p^{2k(p-1)} \quad , \text{ par définition ;} \\ St_p^{2k(p-1)} x = x^p \quad \text{si } \deg(x) = 2k \quad (\text{Exp.15, coroll. du th.3}) ; \\ St_2^k x = x^2 \quad \text{si } \deg(x) = k \quad (\text{Exp.16, prop.5}) . \end{array} \right.$$

Ces propriétés valent dans tout complexe  $X$ . Les propriétés suivantes sont particulières aux complexes d'Eilenberg-MacLane :

(III) les  $St_p^a$  commutent avec la suspension (Exp.16, prop.1) ;

(IV) si  $x$  est la classe fondamentale de  $H^n(Z_p, n; Z_p)$ , les  $St_p^I$  relatifs à toutes les suites "canoniques"  $I = (a_1, \dots, a_i, \dots)$  telles que  $n+q(I) \geq [(pa_1)/(p-1)]$  forment une base du  $Z_p$ -espace vectoriel  $A^*(Z_p, n; Z_p)$  (espace des éléments "additifs" de  $H^*(Z_p, n; Z_p)$ ). Cela résulte du corollaire au théorème 1 (Exp.16, paragraphe 4).

## 2.- Opérations cohomologiques et suspension.

On aura besoin d'un résultat préliminaire :

Théorème.- Soit  $P$  une collection d'opérations cohomologiques

$$H^n(X; Z_p) \longrightarrow H^{n+q}(X; Z_p) \quad ,$$

stable par suspension ( $q$  est donné, et pour chaque  $n$  on a une opération cohomologique  $P$ ). Si  $x \in H^n(\pi, k; Z_p)$  et  $y \in H^r(\pi', k'; Z_p)$ ,  $n \geq 2$ ,  $r \geq 2$ ,  $k \geq 1$ ,  $k' \geq 1$ , on a

$$(2) \quad P({}^t\sigma x \otimes y) = ({}^t\sigma \otimes 1).P(x \otimes y) \quad ,$$

$$(3) \quad P(x \otimes {}^t\sigma y) = (\alpha_x \otimes {}^t\sigma).P(x \otimes y) \quad ,$$

où  ${}^t\sigma$  désigne la suspension en cohomologie mod.  $p$ , et  $\alpha_x$  désigne l'automorphisme de  $H^*(\pi, k; Z_p)$  qui transforme  $u$  en  $u$  si  $\deg(u)$  a même parité que  $n$ , et en  $-u$  dans le cas contraire.

(Précisons que l'on identifie  $H^*(K(\pi, k) \times K(\pi', k'); Z_p)$  au produit tensoriel  $H^*(\pi, k; Z_p) \otimes H^*(\pi', k'; Z_p)$ , ce qui donne la signification précise des seconds membres de (2) et (3). Identification analogue pour les premiers membres).

On va prouver la formule (2). A priori, on a

$$P(x \otimes y) = \sum_i u_i \otimes v_i \quad ,$$

avec  $u_i \in H^*(\Pi, k; Z_p)$ ,  $v_i \in H^*(\Pi', k'; Z_p)$ . Considérons l'application naturelle  $f : L(\Pi, k)/K(\Pi, k-1) \longrightarrow K(\Pi, k)$  (cf. Exposé 14, démonstration du théorème 2). Soient  $x'$  et  $u_i'$  les images de  $x$  et  $u_i$  par

$f^* : H^*(\Pi, k; Z_p) \longrightarrow H^*(L(\Pi, k)/K(\Pi, k-1); Z_p)$ . On a

$$(4) \quad P(x' \otimes y) = \sum_i u_i' \otimes v_i \quad \text{dans} \quad H^*((L(\Pi, k)/K(\Pi, k-1)) \times K(\Pi', k'); Z_p)$$

Soit  $\delta : H^*(\Pi, k-1; Z_p) \longrightarrow H^*(L(\Pi, k)/K(\Pi, k-1); Z_p)$  l'opérateur cobord de la suite exacte de cohomologie. On sait que

$$\delta({}^t\sigma x) = x' \quad , \quad \delta({}^t\sigma u_i) = u_i' \quad ,$$

et par suite (4) donne

$$P\delta({}^t\sigma x \otimes y) = \sum_i \delta({}^t\sigma u_i) \otimes v_i \quad , \quad \text{ou encore}$$

$$(5) \quad P\delta({}^t\sigma x \otimes y) = \delta\left(\sum_i {}^t\sigma u_i \otimes v_i\right) \quad ,$$

où  $\delta$  désigne cette fois l'opérateur cobord

$$H^*(K(\Pi, k-1) \times K(\Pi', k'); Z_p) \longrightarrow H^*((L(\Pi, k)/K(\Pi, k-1)) \times K(\Pi', k'); Z_p).$$

$\delta$  est un isomorphisme, puisque  $L(\Pi, k)$  est acyclique.

Par hypothèse, la collection des opérations  $P$  est stable par suspension. donc, d'après le théorème 2 de l'Exposé 14, on a  $P\delta = \delta P$ .

Finalement, (5) donne

$$\delta P({}^t\sigma x \otimes y) = \delta\left(\sum_i {}^t\sigma u_i \otimes v_i\right) \quad ,$$

d'où, puisque  $\delta$  est un isomorphisme,

$$P({}^t\sigma x \otimes y) = \sum_i {}^t\sigma u_i \otimes v_i \quad ,$$

ce qui est la relation (2) à démontrer.

La relation (3) se prouve de la même manière.

### 3.- Démonstration de la formule (1).

Soient  $x$  et  $y$  les classes fondamentales de  $H^*(Z_p, n; Z_p)$  et  $H^*(Z_p, r; Z_p)$ , avec  $n \geq 1$ ,  $r \geq 1$ . On a

$$x = {}^t\sigma x' \quad , \quad y = {}^t\sigma y' \quad ,$$

$x'$  et  $y'$  étant les classes fondamentales de  $H^*(Z_p, n+1; Z_p)$  et  $H^*(Z_p, r+1; Z_p)$ . D'après le théorème du paragraphe 2 appliqué à  $P = St_p^c$ , on a

$$St_p^c(x \otimes y) = ({}^t\sigma \alpha_x \otimes {}^t\sigma) \cdot St_p^c(x' \otimes y') \quad ;$$

donc  $St_p^c(x \otimes y)$  est dans le produit tensoriel

$A^*(Z_p, n; Z_p) \otimes A^*(Z_p, r; Z_p)$  des sous-espaces vectoriels des éléments "additifs" de la cohomologie modulo  $p$  (cf. Exposé 15, prop.3, d'après laquelle  $A^*(Z_p, n; Z_p)$  est exactement l'image de  $H^*(Z_p, n+1; Z_p)$  par la suspension). Or  $A^*(Z_p, n; Z_p)$  admet pour  $Z_p$ -base les  $St_p^I x$  relatifs à toutes les suites canoniques  $I$  (cf. Exp.16, paragraphe 4, coroll. du théorème 1). On a donc

$$(6) \quad St_p^c(x \otimes y) = \sum_{I, J} (-1)^{q(I)r} \lambda_{IJ} St_p^I x \otimes St_p^J y,$$

les  $\lambda_{IJ}$  étant des éléments de  $Z_p$  (bien déterminés), et la sommation étant étendue à tous les couples  $(I, J)$  de suites canoniques telles que  $q(I) + q(J) = c$ .

Grâce aux formules (2) et (3), et à l'unicité des  $\lambda_{IJ}$ , on voit que les  $\lambda_{IJ}$  ne dépendent pas des degrés  $n$  et  $r$  de  $x$  et  $y$  : c'est pour obtenir ce résultat que, dans (6), on a introduit le signe  $(-1)^{q(I)r}$ .

Il reste seulement à calculer les constantes  $\lambda_{IJ}$ . Pour chacune d'elles, on va choisir convenablement les degrés de  $x$  et de  $y$ . Supposons que les suites  $I = (a_1, \dots, a_i, \dots)$  et  $J = (b_1, \dots, b_i, \dots)$  soient telles que  $q(I) + q(J) = c$  et

$$(7) \quad [pc/(p-1)] > [pa_1/(p-1)] + [pb_1/(p-1)].$$

Prenons alors pour  $x$  et  $y$  les classes fondamentales de degrés  $[pa_1/(p-1)] - q(I)$  et  $[pb_1/(p-1)] - q(J)$  respectivement ; d'après (I), on aura  $St_p^c(x \otimes y) = 0$ , tandis que  $St_p^I x \otimes St_p^J y$  fait partie d'une  $Z_p$ -base de  $A^*(Z_p, n; Z_p) \otimes A^*(Z_p, r; Z_p)$ . La relation (6) implique donc que  $\lambda_{IJ} = 0$  chaque fois que (7) a lieu.

Pour que (7) ait lieu, il suffit que  $a_1 + b_1 < c$  : c'est trivial si  $p = 2$  ; si  $p$  est premier impair, cela tient à ce que  $a_1, b_1$  et  $c$  sont congrus à 0 ou 1 mod.  $(2p-2)$ . Ainsi les seuls  $\lambda_{IJ} \neq 0$  sont ceux pour lesquels  $a_1 + b_1 = c$ , ce qui, à cause de  $q(I) + q(J) = c$ , implique que  $I = (a_1, 0, \dots)$  et  $J = (b_1, 0, \dots)$ . La formule se réduit donc à

$$(6') \quad St_p^c(x \otimes y) = \sum_{a, b} (-1)^{ar} \lambda_{ab} St_p^a x \otimes St_p^b y,$$

la sommation étant étendue à tous les couples d'entiers  $a$  et  $b \geq 0$ , congrus à 0 ou 1 mod.  $(2p-2)$ , et tels que  $a + b = c$ . Il ne reste plus qu'à calculer les coefficients  $\lambda_{ab}$ . On va distinguer plusieurs cas :

Cas  $p = 2$  : prenons pour  $x$  la classe fondamentale de degré  $a$ , pour  $y$  celle de degré  $b$  (avec  $a + b = c$ ). A cause de (I), le seul terme non nul du second membre de (6') est alors  $\lambda_{ab} \text{St}_2^a x \otimes \text{St}_2^b y$ , qui, d'après (II), est égal à  $\lambda_{ab} x^2 \otimes y^2$ . Or, toujours d'après (II), le premier membre de (6') est  $(x \otimes y)^2 = x^2 \otimes y^2$ ; d'où  $\lambda_{ab} = 1$ . Et ceci démontre la formule (1').

Cas où  $p$  est premier impair, et  $c \equiv 0 \pmod{2p-2}$  : alors, pour tout couple  $(a, b)$  du second membre de (6'),  $a$  et  $b$  sont  $\equiv 0 \pmod{2p-2}$ . Donc (6') s'écrit

$$P_p^k(x \otimes y) = \sum_{h+h'=k} \mu_{hh'} P_p^h x \otimes P_p^{h'} y.$$

Prenons pour  $x$  la classe fondamentale de degré  $2h$ , pour  $y$  la classe fondamentale de degré  $2h'$ ; à cause de (I), le seul terme non nul du second membre est  $\mu_{hh'} P_p^h x \otimes P_p^{h'} y = \mu_{hh'} x^p \otimes y^p$ , en vertu de (II). Or, toujours d'après (II), le premier membre est  $(x \otimes y)^p = x^p \otimes y^p$ , puisque  $x$  et  $y$  sont de degrés pairs. On a donc  $\mu_{hh'} = 1$ , et ceci démontre la formule (1'').

Dernier cas :  $p$  premier impair, et  $c \equiv 1 \pmod{2p-2}$  .- Il suffit d'appliquer l'opération de Bockstein  $\beta_p^1$  aux deux membres de (1'') pour obtenir la formule (1) dans ce cas.

La démonstration est ainsi terminée.

---

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] H. CARTAN, Une théorie axiomatique des carrés de Steenrod (C. Rendus, 230, 1950, p.425-427).
- [2] N. STEENROD, Cyclic reduced powers of cohomology classes (Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 39, 1953, p.217-223); voir la formule (6.12).
-