H. Cartan

Opérations cohomologiques, III

Séminaire Henri Cartan, tome 7, n° 2 (1954-1955), exp. n° 16, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_2_A5_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1954/55.

OPÉRATIONS COHOMOLOGIQUES, III.

(Exposé de H. CARTAN , 21.3.1955)

1.- Opérations de Steenrod itérées.

Soit G un groupe abélien tel que $pG = 0$ (p premier, éventuellement égal à 2). On a défini (fin de l'Exposé 15) des opérations de Steenrod $P_p^k : H^n(X;G) \longrightarrow H^{n+2k(p-1)}(X;G)$, pour tout $k \geqslant 1$ et tout $n \geqslant 1$. On va maintenant définir une opération cohomologique St_p^a pour chaque entier $a \equiv 0$ ou 1 (mod. $2p-2$) . On pose

$$(1)\quad \begin{cases} St_p^a = P_p^k \quad \text{si} \quad a = 2k(p-1) & \text{(en convenant que } St_p^0 \text{ est l'identité)} \\ St_p^a = \beta'_p \circ P_p^k \quad \text{si} \quad a = 2k(p-1)+1 \text{ , et en particulier} & St_p^1 = \beta'_p \ , \end{cases}$$

où β'_p désigne l'opération $H^q(X;G) \longrightarrow H^{q+1}(X;G)$, transposée de l'opération de Bockstein $\beta_p : H_{q+1}(X;Z_p) \longrightarrow H_q(X;Z_p)$. Chaque opération $St_p^a : H^n(X;G) \longrightarrow H^{n+a}(X;G)$ est définie pour tous les n , et, pour chaque n , est transposée d'une opération holomogique additive.

Soit maintenant $I = (a_1 , \dots , a_i , \dots)$ une suite d'entiers $\geqslant 0$, tous $\equiv 0$ ou 1 (mod. $2p-2$) , et nuls sauf un nombre fini. Définissons

$$(2)\qquad St_p^I = St_p^{a_1} \circ St_p^{a_2} \circ \dots \circ St_p^{a_i} \circ \dots \ .$$

C'est une opération cohomologique additive

$$H^n(X;G) \longrightarrow H^{n+q(I)}(X;G) \ ,$$

définie pour tout n ; $q(I)$ désigne $\sum_i a_i$ (cf. Exposé 15, formule (5)). Cette opération, pour chaque n , est transposée d'une opération homologique, et la collection de ces opérations homologiques (pour une suite I donnée) est stable par suspension : cela résulte du théorème 3 de l'Exposé 15, et du fait que β_p commute à la suspension (en homologie), d'après la proposition 2 de l'exposé 8 . Bien entendu, ces opérations homologiques sont indépendantes du groupe G .

Proposition 1.- Dans les $H^*(\Pi , m ; G)$, les opérations St_p^I (pour une suite I donnée, et tous les degrés n) commutent avec la suspension t_σ .

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2 de l'Exposé 15.

Proposition 2.- Le sous-espace vectoriel $A^*(\Pi , n ; G)$ des éléments additifs de la cohomologie $H^*(\Pi , n ; G)$ est stable par St_p^I .

En effet, d'après la proposition 3 de l'Exposé 15, si $x' \in A^*(\Pi , n ; G)$, x' est de la forme $t_\sigma(y')$, avec $y' \in A^*(\Pi , n+1 ; G)$; donc $St_p^I x' = St_p^I t_\sigma y' = t_\sigma St_p^I y'$ est dans l'image de la suspension, c'est-à-dire dans $A^*(\Pi , n ; G)$.

2.- Génération de $A^*(\Pi , n ; G)$.

On suppose toujours que $pG = 0$. Désormais, nous considérerons uniquement des suites $I = (a_1 , \dots , a_i , \dots)$ telles que

$$(3) \qquad a_i \equiv 0 \text{ ou } 1 \pmod{2p-2} , \qquad a_i \geq pa_{i+1} .$$

Une telle suite sera dite canonique. Comme au paragraphe 4 de l'Exposé 15, nous introduisons, pour une suite canonique I , les entiers

$$(4) \qquad q(I) = \sum_i a_i , \qquad n(I) = [pa_1/(p-1)] - q(I) ,$$

où le symbole $[u]$ désigne le plus petit entier au moins égal à u . Noter que $q(I)$ est le degré de l'application St_p^I .

Proposition 3.- Si I est une suite canonique, St_p^I s'annule sur les éléments de degré $< n(I)$.

Démonstration : si $I = (2k(p-1) , 0 , \dots)$, c'est-à-dire $St_p^I = P_p^k$, on a $n(I) = 2k$, et l'on sait (Exposé 15, corollaire du théorème 3) que P s'annule sur les éléments de degré $< 2k$.

Envisageons maintenant le cas où $I = (2k(p-1)+1 , 0 , \dots)$, c'est-à-dire $St_p^I = \beta_p' P_p^k$. Alors $n(I) = 2k+1$; il est évident que $\beta_p' P_p^k$ s'annule sur les éléments de degré $< 2k$, et il reste à montrer qu'il s'annule aussi sur le degré $2k$. Par double transposition, on voit qu'il suffit de le prouver lorsque le groupe G est Z_p. Alors P_p^k est la puissance p-ième, et tout revient à vérifier que l'opérateur de Bockstein β_p' s'annule sur x'^p quand le degré de x' est pair ; cela résulte aussitôt de la formule donnant le Bockstein d'un produit.

Ainsi la proposition est démontrée lorsque la suite $I = (a_1, \dots, a_i, \dots)$ a un seul terme $\neq 0$ (si $a_1 = 1$, c'est évident). Passons au cas général : si $a_1 = 2k(p-1)$, on a $St_p^I x' = P_p^k y'$, avec

$$\deg(y') = \deg(x') + q(I) - 2k(p-1) ;$$

de plus, $n(I) = 2kp - q(I)$, donc si $\deg(x') < n(I)$, on a $\deg(y') < 2k$, d'où $P_p^k y' = 0$. Si maintenant $a_1 = 2k(p-1)+1$, on a $St_p^I x' = \beta_p' P_p^k y'$, avec

$$\deg(y') = \deg(x') + q(I) - 2k(p-1)-1 ;$$

de plus, $n(I) = 2kp + 2 - q(I)$, donc si $\deg(x') < n(I)$, on a $\deg(y') < 2k+1$, donc $\beta_p' P_p^k y' = 0$. Ceci achève la démonstration.

Avant d'énoncer le théorème fondamental qui va suivre, introduisons la notation suivante : si I désigne une suite canonique de première espèce $(a_1, \dots, a_i, 0, \dots)$, avec $a_i \neq 0$, on notera I' la suite de deuxième espèce $(a_1, \dots, a_i, 1, 0, \dots)$, qui est aussi canonique. Dans le cas où $I = (0, 0, \dots)$, I' désignera $(1, 0, \dots)$.

<u>Théorème 1</u>.- <u>Soit</u> G <u>un groupe abélien tel que</u> $pG = 0$, <u>et soit</u> n <u>un entier</u> ≥ 1. <u>Pour chaque suite canonique de première espèce</u> I, <u>telle que</u> $n \geq n(I)$, <u>l'application</u> $St_p^I : H^n(\Pi, n ; G) \longrightarrow A^{n+q(I)}(\Pi, n ; G)$ <u>est un isomorphisme sur un sous-espace vectoriel, qu'on notera</u> $A^I(\Pi, n ; G)$. <u>Pour chaque suite canonique de première espèce</u> I, <u>telle que</u> $n+1 \geq n(I)$ (ce qui équivaut à $n \geq n(I')$), <u>l'application</u> St_p^I : $H^{n+1}(\Pi, n ; G) \longrightarrow A^{n+q(I')}(\Pi, n ; G)$ <u>est un isomorphisme sur un sous-espace vectoriel, qu'on notera</u> $A^{I'}(\Pi, n ; G)$. <u>Enfin,</u> $A^*(\Pi, n ; G)$ <u>est somme directe de tous les sous-espaces</u> $A^I(\Pi, n ; G)$ (<u>pour</u> $n(I) \leq n$) <u>et</u> $A^{I'}(\Pi, n ; G)$ (<u>pour</u> $n(I') \leq n$).

(On observera que chaque espace $A^I(\Pi, n ; G)$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}(\Pi, G) \approx H^n(\Pi, n ; G)$, et que chaque espace $A^{I'}(\Pi, n ; G)$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}({}_p\Pi, G) \approx H^{n+1}(\Pi, n ; G))$.

3.- <u>Démonstration du théorème 1</u>.

Rappelons (Exposé 15, paragraphe 4) qu'à chaque suite canonique I, de première espèce, et à chaque entier $n \geq n(I)$, on a associé un homomorphisme

$$g_I(n) : \Pi/p\Pi \longrightarrow A_{n+q(I)}(\Pi , n ; Z_p)$$

qui est un isomorphisme sur un sous-espace $A_I(\Pi , n ; Z_p)$; et qu'à chaque suite canonique I' , de deuxième espèce, et à chaque entier $n \geq n(I')$, on a associé un homomorphisme

$$g_{I'}(n) : {}_p\Pi \longrightarrow A_{n+q(I')}(\Pi ; n ; Z_p)$$

qui est un isomorphisme sur un sous-espace $A_{I'}(\Pi , n ; Z_p)$. De plus, $A_*(\Pi , n ; Z_p)$ est somme directe des $A_I(\Pi , n ; Z_p)$ (pour $n(I) \leq n$) et des $A_{I'}(\Pi , n ; Z_p)$ (pour $n(I') \leq n$) . Rappelons aussi la définition récurrente de $g_I(n)$: si $I = (0 , \ldots)$, on a $g_I(n) = \sigma^n$; si $I = (a_1 , a_2 , \ldots)$, avec $a_1 = 2k_1(p-1) + u_1$ ($k_1 \geq 1$, u_1 égal à 0 ou 1) , posons $K = (a_2 , \ldots)$; alors

$$(5) \quad \begin{cases} g_I(n) = \sigma^{n-n(I)} \gamma_p \, g_K(n(I)) & \text{si } u_1 = 0 , \\ g_I(n) = \sigma^{n-n(I)} \varphi_p \, g_K(n(I)) & \text{si } u_1 = 1 . \end{cases}$$

(Observer que $n(K) \leq n(I)$) . Si $I' = (1 , 0 , \ldots)$, on a $g_{I'}(n) = \sigma^{n-1} \varphi_p$; si $I' = (a_1 , a_2 , \ldots)$, avec $a_1 = 2k_1(p-1) + u_1$, on pose encore $K' = (a_2 , \ldots)$, et on a les mêmes formules que ci-dessus (en y remplaçant I par I' et K par K').

Nous voulons étudier maintenant les relations existant entre la décomposition directe $A_*(\Pi , n ; Z_p) = \sum_I A_I(\Pi , n ; Z_p) + A_{I'}(\Pi , n ; Z_p)$ et les sous-espaces $A^I(\Pi , n ; G)$ et $A^{I'}(\Pi , n ; G)$, images de $H^n(\Pi , n ; G)$ et $H^{n+1}(\Pi , n ; G)$ par les applications St_p^I . Pour cela, nous allons ordonner totalement l'ensemble des suites canoniques I , par l'ordre lexicographique : si $I = (a_1 , \ldots , a_i , \ldots)$ et $J = (b_1 , \ldots , b_i , \ldots)$ sont distinctes, on écrira $I \prec J$ si, i désignant le plus petit des i tels que $a_i \neq b_i$, on a $a_i < b_i$. Cela étant, le théorème 1 résultera évidemment du

<u>Théorème 1 bis</u>.- <u>Pour chaque suite canonique de première espèce</u> I , <u>telle que</u> $n(I) \leq n$, <u>l'application</u> $H^n(\Pi , n ; G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A_I(\Pi,n;Z_p) , G)$ <u>définie par</u> St_p^I <u>est un isomorphisme ; pour chaque suite canonique de première espèce</u> I' , <u>telle que</u> $n(I) \leq n+1$, <u>l'application</u> $H^{n+1}(\Pi , n ; G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A_{I'}(\Pi , n ; Z_p) , G)$ <u>définie par</u> St_p^I <u>est un isomorphisme. Pour chaque</u>

<u>suite canonique de première espèce</u> I , <u>telle que</u> $n(I) \leq n$, <u>l'image de</u>
$St_p^I : H^n(\Pi, n ; G) \longrightarrow A^{n+q(I)}(\Pi, n ; G)$ <u>est orthogonale aux</u>
$A_J(\Pi, n ; Z_p)$ <u>relatifs à toutes les suites canoniques</u> J (<u>de première ou de deuxième espèce</u>) <u>telles que</u> $J \prec I$. <u>Pour chaque suite canonique de première espèce</u> I , <u>telle que</u> $n(I) \leq n+1$, <u>l'image de</u>
$St_p^I : H^{n+1}(\Pi, n ; G) \longrightarrow A^{n+q(I')}(\Pi, n ; G)$ <u>est orthogonale aux</u>
$A_J(\Pi, n ; Z_p)$ <u>relatifs à toutes les suites canoniques</u> J (<u>de première ou de deuxième espèce</u>) <u>telles que</u> $J \prec I'$.

Pour la démonstration, on utilisera la notation suivante :
si $x' \in A^{n+q}(\Pi, n ; G) \approx \mathrm{Hom}(A_{n+q}(\Pi, n ; Z_p), G)$, et si $x \in A_{n+q}(\Pi, n ; Z_p)$, on notera $\langle x , x' \rangle$ l'élément de G , image de x par l'homomorphisme $A_{n+q}(\Pi, n ; Z_p) \longrightarrow G$ défini par x' . On convient en outre que $\langle x , x' \rangle$ est défini, et égal à 0 , quand $x \in A_*(\Pi, n ; Z_p)$ et $x' \in A^*(\Pi, n ; G)$ sont de degrés différents.

Nous nous proposons d'établir les relations suivantes :

(6) $\langle g_I(n)s , St_p^I x' \rangle = \langle \sigma^n s , x' \rangle$ pour $s \in \Pi/p\Pi$,
$x' \in H^n(\Pi, n ; G)$, I désignant une suite canonique de première espèce telle que $n(I) \leq n$.

(7) $\langle g_{I'}(n)t , St_p^I y' \rangle = \langle \sigma^{n-1} \varphi_p t , y' \rangle$ pour $t \in {}_p\Pi$,
$y' \in H^{n+1}(\Pi, n ; G)$, I désignant une suite canonique de première espèce telle que $n(I) \leq n+1$.

(8) $\langle g_J(n)s , St_p^I x' \rangle = 0$ pour $s \in \Pi/p\Pi$, $x' \in H^n(\Pi, n ; G)$,
I désignant une suite canonique de première espèce telle que $n(I) \leq n$, et J une suite canonique de première espèce telle que $J \prec I$.

(9) $\langle g_J(n)t , St_p^I x' \rangle = 0$ pour $t \in {}_p\Pi$, $x' \in H^n(\Pi, n ; G)$,
I désignant une suite canonique de première espèce telle que $n(I) \leq n$, et J une suite canonique de deuxième espèce telle que $J \prec I$.

(10) $\langle g_J(n)s , St_p^I y' \rangle = 0$ pour $s \in \Pi/p\Pi$, $y' \in H^{n+1}(\Pi, n ; G)$,
I désignant une suite canonique de première espèce telle que $n(I) \leq n+1$, et J une suite canonique de première espèce telle

que $J \prec I'$.

(11) $\langle g_J(n)t \, , \, St_p^I \, y' \rangle = 0$ pour $t \in {}_p\pi$, $y' \in H^{n+1}(\pi \, , n \, ; G)$,

I désignant une suite canonique de première espèce telle que $n(I) \leq n+1$, et J une suite canonique de deuxième espèce telle que $J \prec I'$.

Il est clair que ces relations établiront le théorème 1 bis. D'ailleurs elles sont triviales si $q(I) = 0$, car St_p^I est alors l'application identique, $g_I(n)$ est σ^n , et $g_{I'}(n)$ est $\sigma^{n-1}\varphi_p$. Nous allons prouver les relation (6)-(11) par <u>récurrence sur</u> $q(I)$.

On va se servir de la formule récurrente (5) . Nous posons donc

$$J = (a_1 \, , a_2 \, , \ldots) \, , \qquad I = (b_1 \, , b_2 \, , \ldots) \, .$$

Alors $St_p^I = St_p^{b_1} \, St_p^K$, et $g_J(n) = \sigma^{n-n(J)}\gamma_p g_L(n(J))$ si $a_1 \equiv 0 \ (2p-2)$

$$g_J(n) = \sigma^{n-n(J)}\varphi_p g_L(n(J)) \quad \text{si} \quad a_1 \equiv 1 \ (2p-2)$$

On a posé $K = (b_2 \, , \ldots)$, et $L = (a_2 \, , \ldots)$. Observons que si $J \prec I$ et $q(J) = q(I)$, on a $n(J) \leq n(I)$, donc $n(J) \leq n$ si $n(I) \leq n$; si $J \prec I'$ et $q(J) = q(I')$, on a $n(J) \leq n(I')$, donc $n(J) \leq n$ si $n(I) \leq n+1$.

Remplaçons St_p^I et $g_J(n)$ par les valeurs précédentes dans le premier membre de l'une quelconque des relations (6)-(11) à démontrer ; dans (8), par exemple, on obtient

(12) $\langle \gamma_p g_L(n(J))s \, , \, St_p^{b_1} \, St_p^K ({}^t\sigma)^{n-n(J)} \, x' \rangle$ si $a_1 \equiv 0 \ (2p-2)$

(12') $\langle \varphi_p g_L(n(J))s \, , \, St_p^{b_1} \, St_p^K ({}^t\sigma)^{n-n(J)} \, x' \rangle$ si $a_1 \equiv 1 \ (2p-2)$

(on a tenu compte de la commutation des St_p^I avec la suspension ${}^t\sigma$). On est ainsi ramené au cas où $n = n(J)$, et où $g_J(n)$ commence (à gauche) par γ_p ou φ_p . Si $a_1 = b_1$, on va prouver que l'expression (12) ou (12') est égale à :

$$\langle g_L(n(J))s \, , \, St_p^K ({}^t\sigma)^{n-n(J)} \, x' \rangle$$

ce qui nous ramènera au cas où la suite I est remplacée par la suite K , telle que $q(K) < q(I)$; ceci démontrera (6) et (8) par récurrence. Si $a_1 < b_1$, on montrera que l'expression (12) ou (12') est nulle, ce qui démontre (8). On raisonnera de même pour les autres cas. On voit que tout revient à prouver les lemmes suivants :

Lemme 1.- Soient $x \in A_*(\Pi, n ; Z_p)$ de degré pair, et $x' \in A^*(\Pi, n ; G)$ tel que $\gamma_p x$ et $P_p^k x'$ aient même degré. Alors

$$\langle \gamma_p x , P_p^k x' \rangle = \langle x , x' \rangle \quad \text{si} \quad \deg(x) = 2k ,$$
$$= 0 \quad \text{si} \quad \deg(x) < 2k .$$

Lemme 2.- Soient $x \in A_*(\Pi, n ; Z_p)$ de degré pair, et $x' \in A^*(\Pi, n ; G)$ tel que $\gamma_p x$ et $\beta'_p P_p^k x'$ aient même degré. Alors

$$\langle \gamma_p x , \beta'_p P_p^k x' \rangle = 0 \quad \text{si} \quad \deg(x) \leq 2k .$$

Lemme 3.- Soient $x \in A_*(\Pi, n ; Z_p)$ de degré pair, et $x' \in A^*(\Pi, n+1 ; G)$ tels que $\varphi_p x$ et $P_p^k x'$ aient même degré ; alors

$$\langle \varphi_p x , P_p^k x' \rangle = 0 \quad \text{si} \quad \deg(x) < 2k .$$

Lemme 4.- Soient $x \in A_*(\Pi, n ; Z_p)$ de degré pair, et $x' \in A^*(\Pi, n+1 ; G)$ tels que $\varphi_p x$ et $\beta'_p P_p^k x'$ aient même degré. Alors

$$\langle \varphi_p x , \beta'_p P_p^k x' \rangle = \langle x , {}^t\sigma x' \rangle \quad \text{si} \quad \deg(x) = 2k ,$$
$$= 0 \quad \text{si} \quad \deg(x) < 2k .$$

Démonstration des lemmes 1 à 4 : dans les hypothèses du lemme 1 , si le degré de x est $< 2k$, le degré de $P_p^k x'$ est $< 2kp$, donc celui de x' est $< 2k$, et par suite $P_p^k x' = 0$ (Exposé 15, corollaire du théorème 3). Il reste à examiner le cas où, dans les hypothèses du lemme 1 , x et x' ont le même degré $2k$. On va prouver la relation

$$\langle \gamma_p x , P_p^k x' \rangle = \langle x , x' \rangle$$

sous ces hypothèses. Si le groupe G est Z_p , la relation s'écrit $\langle \gamma_p x , x'^p \rangle = \langle x , x' \rangle$; elle résulte de la détermination de l'algèbre de cohomologie $H^*(\Pi, n ; Z_p)$ faite au paragraphe 5 de l'Exposé 9 . Il s'ensuit que l'opération homologique (dans $H_*(\Pi, n ; Z_p)$) dont la puissance p-ième des éléments de degré $2k$ est la transposée, transforme $\gamma_p(x)$ dans x , pour $x \in H_{2k}(\Pi, n ; Z_p)$. Par transposition dans $A^*(\Pi, n ; G)$, on obtient la relation cherchée.

Passons au lemme 2. Si x est de degré $\leq 2k$, $\beta'_p P_p^k x'$ est de degré $\leq 2kp$, donc x' est de degré $\leq 2k-1$, et par suite $\beta'_p P_p^k x'$

est nul. D'où le lemme 2.

On prouve de même le lemme 3 : si $\deg(x) < 2k$, le degré de $P_p^k x'$ est $\leq 2p(k-1)+2$, donc le degré de x' est $\leq 2k - 2(p-1) < 2k$, et par suite $P_p^k x' = 0$.

Enfin, passons au lemme 4 , en nous rappelant que $\beta_p \varphi_p = \sigma \gamma_p$ dans $A_*(\Pi , n ; Z_p)$, même pour $p = 2$ (cf. théorème 1 de l'Exposé 8) ; il vient

$$\langle \varphi_p x , \beta_p' P_p^k x' \rangle = \langle \beta_p \varphi_p x , P_p^k x' \rangle = \langle \sigma \gamma_p x , P_p^k x' \rangle$$
$$= \langle \gamma_p x , P_p^k \, {}^t\sigma x' \rangle \quad ,$$

et on est ramené au lemme 1 .

Ainsi sont démontrés les lemmes 1 à 4 , d'où, par récurrence sur $q(I)$, les relations (6) à (11) , lesquelles entraînent le théorème 1 bis (et, par suite, le théorème 1).

<u>Problème ouvert</u> : si I est une suite canonique de première espèce, le sous-espace $A^I(\Pi , n ; G)$ est-il orthogonal à tous les espaces $A_J(\Pi , n ; Z_p)$ relatifs aux suites canoniques J autres que I ? Et le sous-espace $A^{I'}(\Pi , n ; G)$ est-il orthogonal à tous les espaces $A_J(\Pi , n; Z_p)$ relatifs aux suites canoniques J autres que I' ? Nous ne savons pas répondre à cette question (voir Appendice ci-dessous).

4.- <u>Détermination de toutes les opérations cohomologiques additives $H^n(X ; \Pi) \longrightarrow H^q(X ; G)$, quand</u> $pG = 0$.

Elles correspondent aux éléments de $A^*(\Pi , n ; G)$ (cf. le préambule de l'Exposé 15), et sont donc nulles pour $0 < q < n$. On supposera $q \geq n$.

Comme dans l'Exposé 14, nous noterons $T(u)$ l'opération cohomologique définie par un élément $u \in A^{n+q}(\Pi , n ; G)$. Toute opération cohomologique additive $H^n(X ; \Pi) \longrightarrow H^{n+q}(X , G)$ est canoniquement la somme d'opérations cohomologiques dont chacune est associée à l'un des sous-espaces $A^I(\Pi , n ; G)$, resp. $A^{I'}(\Pi , n ; G)$ du théorème 1 , pour les suites canoniques I de première espèce telles que $n(I) \leq n$ et $q(I) = q$, resp. $n(I) \leq n+1$ et $q(I) = q-1$. Tout revient à expliciter une opération associée à un élément de $A^I(\Pi , n ; G)$, resp. de $A^{I'}(\Pi , n ; G)$; une telle opération sera appelée <u>opération élémentaire de première espèce</u>, resp. <u>de deuxième espèce</u>.

<u>Détermination des opérations élémentaires de première espèce</u> :

Une telle opération $H^n(X ; \Pi) \longrightarrow H^{n+q}(X ; G)$ est de la forme $T(u)$, où u est de la forme $St_p^I x'$, avec $x' \in H^n(\Pi , n ; G) \approx \mathrm{Hom}(\Pi , G)$, et I est une suite canonique de première espèce, telle que $n(I) \leq n$ et $q(I)=q$. Donc une telle opération est déterminée par le choix d'une suite I et d'un homomorphisme $\lambda : \Pi \longrightarrow G$, ou, ce qui revient au même, d'un homomorphisme $\Pi/p\Pi \longrightarrow G$. En vertu de la relation (8') de l'Exposé 14, on a

$T(St_p^I x').\xi = St_p^I(T(x').\xi)$ pour $\xi \in H^n(X ; \Pi)$. Mais il est évident que l'opération $T(x') : H^n(X ; \Pi) \longrightarrow H^n(X ; G)$ est simplement l'application définie par l'homomorphisme $\lambda : \Pi \longrightarrow G$ des coefficients.

Ainsi, <u>l'opération élémentaire définie par la suite canonique</u> I <u>et l'homomorphisme</u> λ <u>s'obtient en faisant d'abord l'application</u> $H^n(X ; \Pi) \longrightarrow H^n(X ; G)$ <u>définie par</u> λ, <u>puis en effectuant la transformation de Steenrod</u> $St_p^I : H^n(X ; G) \longrightarrow H^{n+q}(X ; G)$, q <u>désignant l'entier</u> $q(I)$.

<u>Remarques</u> : cette même opération élémentaire peut se décomposer aussi comme suit : on effectue l'application naturelle $H^n(X ; \Pi) \longrightarrow H^n(X ; \Pi/p\Pi)$, puis l'opération $St_p^I : H^n(X ; \Pi/p\Pi) \longrightarrow H^{n+q}(X ; \Pi/p\Pi)$, et enfin l'application $H^{n+q}(X ; \Pi/p\Pi) \longrightarrow H^{n+q}(X ; G)$ définie par λ.

<u>Détermination des opérations élémentaires de deuxième espèce</u> :

une telle opération $H^n(X ; \Pi) \longrightarrow H^{n+q}(X ; G)$ est de la forme $T(u)$, où u est de la forme $St_p^I y'$, avec $y' \in H^{n+1}(\Pi , n ; G) \approx \mathrm{Hom}({}_p\Pi , G)$, et I est une suite canonique de première espèce, telle que $n(I) \leq n+1$ et $q(I) = q-1$. Donc une telle opération est déterminée par le choix d'une suite I et d'un homomorphisme $\mu : {}_p\Pi \longrightarrow G$. On a alors

$T(St_p^I y').\xi = St_p^I(T(y').\xi)$ pour $\xi \in H^n(X ; \Pi)$. Tout revient à déterminer l'opération cohomologique

$$T(y') : H^n(X ; \Pi) \longrightarrow H^{n+1}(X ; G)$$

définie par la donnée d'un homomorphisme $\mu : {}_p\Pi \longrightarrow G$. Alors toute opération élémentaire de deuxième espèce s'obtiendra en composant l'opération $T(y')$ et une opération St_p^I, I désignant une suite canonique de première espèce, telle que $n(I) \leq n+1$ et $q(I) = q-1$.

<u>Proposition 4</u>.- L'opération $T(y')$ définie par un homomorphisme $\mu : {}_p\Pi \longrightarrow G$ n'est autre que <u>l'opération de Bockstein généralisée</u>, définie comme suit : soit $\xi \in H^n(X\,;\Pi)$; l'application naturelle $H^n(X\,;\Pi) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n(X)\,,\Pi)$ associe à ξ un homomorphisme $g : H_n(X) \longrightarrow \Pi$. Considérons l'application composée

$$H_{n+1}(X\,;\,Z_p) \xrightarrow{\delta_p} H_n(X) \xrightarrow{g} \Pi$$

où δ_p désigne l'opération de Bockstein en homologie (Exposé 8, paragraphe 2) ; l'image de l'application composée est contenue dans le sous-groupe ${}_p\Pi$; d'où une application linéaire $H_{n+1}(X\,;\,Z_p) \longrightarrow {}_p\Pi$, laquelle définit à son tour un élément de $H^{n+1}(X\,;\,{}_p\Pi)$; en composant avec l'application $H^{n+1}(X\,;\,{}_p\Pi) \longrightarrow H^{n+1}(X\,;\,G)$ définie par $\mu : {}_p\Pi \longrightarrow G$, on obtient un élément de $H^{n+1}(X\,;\,G)$, qui est le transformé de $\xi \in H^n(X\,;\Pi)$ par l'opération "de Bockstein" que l'on voulait définir.

<u>Démonstration</u> : soit $f_\xi : X \longrightarrow K(\Pi, n)$ une application de la classe définie par $\xi \in H^n(X\,;\Pi)$ (Exposé 14, corollaire du théorème 1) . Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
H_{n+1}(X;Z_p) & \xrightarrow{(f_\xi)_*} & H_{n+1}(\Pi,n;Z_p) & \longrightarrow & A_{n+1}(\Pi,n;Z_p) \approx {}_p\Pi & \xrightarrow{\mu} & G \\
\downarrow{\scriptstyle \delta_p} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_p} & & \downarrow \qquad\qquad \downarrow{\scriptstyle \text{injection}} & & \\
H_n(X) & \xrightarrow{(f_\xi)_*} & H_n(\Pi,n,Z) \approx & & A_n(\Pi,n;Z) \approx \Pi & &
\end{array}$$

L'application composée de la ligne supérieure $H_{n+1}(X\,;\,Z_p) \longrightarrow G$ définit l'élément $\eta \in H^{n+1}(X\,;\,G)$, transformé de ξ par $T(y')$: il suffit de remonter aux définitions. L'application composée de la ligne inférieure $H_n(X) \longrightarrow \Pi$ est l'homomorphisme g défini par $\xi \in H^n(X\,;\Pi)$. La commutativité du diagramme montre alors que η est le transformé de ξ par l'opération "de Bockstein" définie dans l'énoncé de la proposition 4 , qui est ainsi prouvée.

<u>Remarque</u> : on peut, d'une manière naturelle, associer à chaque homomorphisme $\mu : {}_p\Pi \longrightarrow G$ (G étant un groupe abélien tel que $pG = 0$) une classe d'extensions de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow F \longrightarrow \Pi \longrightarrow 0 \quad \text{(suite exacte, } F \text{ abélien)} ,$$

et on obtient même ainsi une correspondance biunivoque entre les éléments de $\mathrm{Hom}({}_p\Pi\,, G)$ et les classes d'extensions de Π par G (voir le livre à paraître de CARTAN-EILENBERG, Homological Algebra, Ch. VII, Exer. 8 ; voir aussi [1] , theorem 26.5). Or la donnée d'une suite exacte comme ci-dessus définit une suite exacte de cohomologie ; on peut montrer que son opérateur "cobord" : $H^n(X;\Pi) \longrightarrow H^{n+1}(X;G)$ est, au signe près, l'opération de Bockstein généralisée.

Autre remarque : comme dans le cas d'une opération élémentaire de première espèce, une opération élémentaire de deuxième espèce, définie par une suite canonique I et un homomorphisme $\mu : {}_p\Pi \longrightarrow G$, peut aussi se décomposer comme suit : on effectue d'abord l'opération de Bockstein $H^n(X;\Pi) \longrightarrow H^{n+1}(X;{}_p\Pi)$ (relative à l'application identique ${}_p\Pi \longrightarrow {}_p\Pi$) ; puis on fait $St_p^I : H^{n+1}(X;{}_p\Pi) \longrightarrow H^{n+q}(X;{}_p\Pi)$, q désignant $q(I)+1$; enfin, on fait l'application $H^{n+q}(X;{}_p\Pi) \longrightarrow H^{n+q}(X;G)$ définie par l'homomorphisme $\mu : {}_p\Pi \longrightarrow G$.

Remarque finale : lorsque $\Pi = G$, avec $pG = 0$, et que μ est l'application identique de G , l'opération de Bockstein $H^n(X;G) \longrightarrow H^{n+1}(X;G)$ est évidemment la transposée de $\beta_p : H_{n+1}(X;Z_p) \longrightarrow H_n(X;Z_p)$. Autrement dit, c'est l'opération St_p^1 . En particulier, l'opération de Bockstein $H^n(\Pi, n; G) \longrightarrow H^{n+1}(\Pi, n; G)$ n'est autre que l'application $\mathrm{Hom}(\Pi, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}({}_p\Pi, G)$ induite par l'inclusion ${}_p\Pi \longrightarrow \Pi$. Revenant alors au théorème 1, on obtient :

Corollaire au théorème 1 : soit Π un groupe abélien tel que $p\Pi = 0$. Alors, pour G tel que $pG = 0$, $A^*(\Pi, n; G)$ est somme directe des images (biunivoques) des $St_p^I : H^n(\Pi, n; G) \longrightarrow H^{n+q(I)}(\Pi, n; G)$ relatifs à toutes les suites canoniques I (de première ou de deuxième espèce) telles que $n(I) \leq n$.

5.- Complément dans le cas $p = 2$.-

Les opérations de Steenrod St_2^a sont définies pour toute valeur de l'entier $a \geq 0$; on les note aussi Sq^a ("carré de Steenrod") .

Par définition, on a $Sq^{2k+1} = \beta_2' \, Sq^{2k}$, et, en particulier, $Sq^1 = \beta_2$. De plus, si $G = Z_2$, on a $Sq^{2k}\xi = \xi^2$ (carré de ξ) lorsque est de degré $2k$. Tout cela n'est qu'une spécialisation de propriétés valables pour tout p premier. Mais, pour $p=2$, on a en outre :

Proposition 5.- Dans l'algèbre de cohomologie $H^*(X ; Z_2)$, on a

$$Sq^{2k+1}\xi = \xi^2 \quad \text{pour } \xi \text{ de degré } 2k+1 .$$

Démonstration : désignons par π le groupe cyclique d'ordre 2 , et soit x' la classe fondamentale de $H^{2k+1}(\pi , 2k+1 ; Z_2)$. Il suffit de montrer que $Sq^{2k+1}x' = x'^2$. Or, utilisons la détermination de l'algèbre de cohomologie $H^*(\pi , 2k+1 ; Z_2)$ faite dans l'Exposé 10, théorème 2 ; on voit qu'il suffit de montrer : 1° que $Sq^{2k+1}x'$ est orthogonal aux éléments de $A_{4k+2}(\pi , 2k+1 ; Z_2)$ situés dans l'image de la suspension ; 2° que l'on a

$$\langle \gamma_2 y , Sq^{2k+1}x' \rangle = \langle y , x' \rangle$$

y désignant le générateur de $A_{2k+1}(\pi, 2k+1 ; Z_2)$ (qui est un groupe cyclique d'ordre 2).

Démontrons 1° : si $u \in A_{4k+1}(\pi , 2k ; Z_2)$, on a

$$\langle \sigma u , Sq^{2k+1}x' \rangle = \langle u , Sq^{2k+1}({}^t\sigma x') \rangle ,$$

et comme ${}^t\sigma x'$ est de degré $2k$, $Sq^{2k+1}({}^t\sigma x')$ est nul (cf. proposition 3 ci-dessus). Démontrons 2° : on a $y = \sigma x$, x désignant le générateur de $A_{2k}(\pi , 2k ; Z_2)$. Donc $\gamma_2 y = \gamma_2 \sigma x$, qui, d'après l'Exposé 8 (proposition 1) , est égal à $\varphi_2 x$. Ainsi

$$\langle \gamma_2 y , Sq^{2k+1}x' \rangle = \langle \varphi_2 x , \beta_2' \, Sq^{2k}x' \rangle ,$$

ce qui, d'après le lemme 4 ci-dessus, est égal à $\langle x , {}^t\sigma x' \rangle = \langle y , x' \rangle$. Ceci achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. EILENBERG-S. MAC LANE, On the groups $H(\pi , n)$, II (Annals of Math. 60, 1954, p. 49-139).

APPENDICE

A la fin du paragraphe 3, on a posé le problème de comparer les deux décompositions directes de $A^*(\pi, n ; G)$: celle donnée par le théorème 1, et celle qui résulte (par transposition) de la décomposition directe de $A_*(\pi, n ; Z_p)$ suivant les $A_I(\pi, n ; Z_p)$ et les $A_{I'}(\pi, n ; Z_p)$. Nous ne savons pas résoudre ce problème, mais on peut faire quelques remarques.

La décomposition directe de $A^*(\pi, n ; G)$ donnée au théorème 1 provient, par transposition, d'une décomposition directe de $A_*(\pi, n ; Z_p)$ qui ne dépend pas de G , et qu'on va expliciter.

Notons St_J^p l'opération homologique dont St_p^J est la transposée. Soit alors I une suite canonique de première espèce, telle que $n(I) \leq n$; on notera $B_I(\pi, n ; Z_p)$ l'intersection des noyaux des $St_J^p : A_{n+q(I)}(\pi, n ; Z_p) \longrightarrow A_n(\pi, n ; Z_p)$ relatifs aux suites canoniques J de première espèce, telles que $J \neq I$, $n(J) \leq n$ et $q(J) = q(I)$, et des $St_J^p = A_{n+q(I)}(\pi, n ; Z_p) \longrightarrow A_{n+1}(\pi, n ; Z_p)$ relatifs aux suites canoniques J de première espèce, telles que $n(J) \leq n+1$ et $q(J) = q-1$. De même, soit I' une suite canonique de première espèce, telle que $n(I) \leq n+1$; on notera $B_I(\pi, n ; Z_p)$ le noyau des $St_J^p : A_{n+q(I')}(\pi, n ; Z_p) \longrightarrow A_n(\pi, n ; Z_p)$ relatifs aux suites canoniques J de première espèce, telles que $n(J) \leq n$ et $q(J) = q(I')$, et des $St_J^p : A_{n+q(I')}(\pi, n ; Z_p) \longrightarrow A_{n+1}(\pi, n ; Z_p)$ relatifs aux suites canoniques J de première espèce, telles que $J \neq I$, $n(J) \leq n+1$ et $q(J)=q(I')-1$. Alors St_I^p est un <u>isomorphisme</u> de $B_I(\pi, n ; Z_p)$ sur $A_n(\pi, n ; Z_p) \approx \pi/p\pi$; et St_I^p est un <u>isomorphisme</u> de $B_{I'}(\pi, n ; Z_p)$ sur $A_{n+1}(\pi, n ; Z_p) \approx {}_p\pi$.

L'isomorphisme réciproque est un isomorphisme (naturel) θ_I de $\pi/p\pi$ sur $B_I(\pi, n ; Z_p)$ (pour $n(I) \leq n$) , resp. un isomorphisme (naturel) $\theta_{I'}$ de ${}_p\pi$ sur $B_{I'}(\pi, n ; Z_p)$ (pour $n(I) \leq n+1$) . D'autre part, on a considéré, au paragraphe 3, un isomorphisme naturel $g_I(n)$ (que nous noterons simplement g_I) de $\pi/p\pi$ sur $A_I(\pi, n ; Z_p)$, pour $n(I) \leq n$; et un isomorphisme naturel $g_{I'}(n)$ (que nous noterons simplement $g_{I'}$) de ${}_p\pi$ sur $A_{I'}(\pi, n ; Z_p)$, pour $n(I) \leq n+1$.

Il s'agit de comparer les deux décompositions directes, naturelles, de $A_*(\pi, n ; Z_p)$: l'une, suivant les $A_I(\pi, n ; Z_p)$ et les $A_{I'}(\pi, n ; Z_p)$; l'autre, suivant les $B_I(\pi, n ; Z_p)$ et les $B_{I'}(\pi, n ; Z_p)$. On peut écrire, a priori, pour $x \in \pi/p\pi$, et $n(I) \leq n$:

$$g_I(x) = \sum_{n(J) \leq n} \theta_J\,(\alpha_{JI}(x)) + \sum_{n(J) \leq n+1} \theta_{J'}\,(\beta_{JI}(x)),$$

les α_{JI} étant des homomorphismes <u>naturels</u> $\pi/p\pi \longrightarrow \pi/p\pi$,

et les β_{JI} étant des homomorphismes naturels $\pi/p\pi \longrightarrow {}_p\pi$.

De même, pour $y \in {}_p\pi$, et $n(I) \leq n+1$:

$$g_{I'}(y) = \sum_{n(J) \leq n} \theta_J\,(\gamma_{JI}(y)) + \sum_{n(J) \leq n+1} \theta_{J'}\,(\delta_{JI}(x)),$$

les γ_{JI} étant des homomorphismes naturels ${}_p\pi \longrightarrow \pi/p\pi$,
et les δ_{JI} étant des homomorphismes naturels ${}_p\pi \longrightarrow {}_p\pi$.

Il résulte du théorème 1 bis que α_{II} est l'identité, et que δ_{II} est l'identité ; de plus, $\alpha_{JI} = 0$ pour $I \prec J$, et $\delta_{JI} = 0$ pour $I \prec J$. De plus, on voit facilement que tout homomorphisme naturel $\pi/p\pi \longrightarrow {}_p\pi$ est <u>nul</u>, ainsi que tout homomorphisme naturel ${}_p\pi \longrightarrow \pi/p\pi$. Donc $\beta_{JI} = 0$, $\gamma_{JI} = 0$. Enfin, on voit facilement que tout homomorphisme naturel $\pi/p\pi \longrightarrow \pi/p\pi$, resp. ${}_p\pi \longrightarrow {}_p\pi$, est de la forme $x \longrightarrow kx$, où $k \in Z_p$. Tout revient, finalement, à déterminer les éléments $\alpha_{JI} \in Z_p$ et $\delta_{JI} \in Z_p$, pour $I \succ J$. Il est plausible de conjecturer qu'ils sont nuls.

En tout cas, on voit que

$$\sum_{n(I) \leq n} A_I(\pi, n ; Z_p) = \sum_{n(I) \leq n} B_I(\pi, n ; Z_p),$$

et que $\displaystyle\sum_{n(I) \leq n+1} A_{I'}(\pi, n ; Z_p) = \sum_{n(I) \leq n+1} B_{I'}(\pi, n ; Z_p)$.