H. Cartan

Opérations cohomologiques, II

Séminaire Henri Cartan, tome 7, nº 2 (1954-1955), exp. nº 15, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_2_A4_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1954/55.

OPÉRATIONS COHOMOLOGIQUES, II.

(Exposé de H. CARTAN, 14.3.1955)

Le but final de cet exposé et du suivant consiste à déterminer toutes les opérations cohomologiques <u>additives</u> $H^n(X ; \Pi) \to H^q(X , G)$ dans le cas où tous les éléments de G sont d'ordre <u>premier</u> p (Π désignant un groupe abélien quelconque). D'après l'Exposé 14 (théorème 5), il revient au même de déterminer les éléments de

$$H^q(\Pi , n ; G) \approx \mathrm{Hom}(H_q(\Pi , n ; Z_p) , G)$$

qui sont "orthogonaux" aux éléments décomposables de $H_q(\Pi , n ; Z_p)$. Ceci nous conduit à introduire l'espace vectoriel (sur le corps Z_p) , quotient de $H_q(\Pi , n ; Z_p)$ par le sous-espace D_q des éléments décomposables ; soit $A_q(\Pi , n ; Z_p)$ cet espace quotient. Alors le sous-espace $A^q(\Pi , n ; G)$, formé des éléments "additifs" de $H^q(\Pi , n ; G)$, s'identifie à $\mathrm{Hom}(A_q(\Pi , n ; Z_p) , G)$. On notera que $A_q(\Pi , n ; G) = 0$ pour $0 < q < n$; on posera

$$A_*(\Pi , n ; Z_p) = \sum_{q \geq 0} A_{n+q}(\Pi , n ; Z_p) ,$$

$$A^*(\Pi , n ; G) = \sum_{q \geq 0} A^{n+q}(\Pi , n ; G) .$$

1.- <u>Opérations homologiques modulo</u> p .

Une opération <u>homologique</u> additive (modulo p) consiste dans la donnée, pour chaque CSS-complexe X , d'une application <u>linéaire</u>

$$T(X) : H_{n+q}(X ; Z_p) \longrightarrow H_n(X ; Z_p) \qquad (n \text{ et } q \text{ donnés}) ,$$

qui soit <u>naturelle</u> dans le sens suivant : si $h : X \to X'$ est CSS-application, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} H_{n+q}(X ; Z_p) \arrow[r, "T(X)"] \arrow[d, "h_*"] & H_n(X ; Z_p) \arrow[d, "h_*"] \\ H_{n+q}(X' ; Z_p) \arrow[r, "T(X')"] & H_n(X' ; Z_p) \end{tikzcd}$$

Soit donnée une telle opération homologique T . Pour chaque groupe abélien Π , considérons l'application composée

$$H^n(X ; \Pi) \longrightarrow H^n(X ; \Pi/p\Pi) \longrightarrow H^{n+q}(X ; \Pi/p\Pi) ,$$

la première application étant naturellement définie par l'homomorphisme de Π sur son quotient $\Pi/p\Pi$, et la seconde étant transposée de $T(X)$: $H_{n+q}(X ; Z_p) \longrightarrow H_n(X ; Z_p)$. On obtient une opération <u>cohomologique</u> additive

$$H^n(X ; \Pi) \longrightarrow H^{n+q}(X ; \Pi/p\Pi) ,$$

dite <u>associée à</u> T . Ceci vaut pour tout groupe abélien Π .

Cette opération cohomologique est définie par un élément $u \in H^{n+q}(\Pi , n ; \Pi/p\Pi)$, qu'on obtient comme suit : l'application

$$H_{n+q}(\Pi , n ; Z_p) \xrightarrow{T} H_n(\Pi , n ; Z_p) \approx \Pi/p\Pi$$

définit un élément de $\mathrm{Hom}(H_{n+q}(\Pi , n ; Z_p) , \Pi/p\Pi)$; c'est l'élément u cherché. Puisque l'opération cohomologique définie par u est additive, u est orthogonal aux éléments décomposables de $H_{n+q}(\Pi , n ; Z_p)$ (Exp. 14, th. 5) ; donc T induit une application linéaire

$$S(\Pi) : A_{n+q}(\Pi , n ; Z_p) \longrightarrow A_n(\Pi , n ; Z_p)$$

et cette application est <u>naturelle</u> vis-à-vis des homomorphismes $\Pi \longrightarrow \Pi'$.

<u>Proposition 1.- Réciproquement, soit donnée une opération additive</u> $S(\Pi)$, <u>pour tout groupe abélien</u> Π , <u>et naturelle vis-à-vis de</u> Π . <u>Alors il existe une opération homologique additive</u> $T(X) : H_{n+q}(X ; Z_p) \longrightarrow H_n(X ; Z_p)$ <u>et une seule, qui donne naissance</u> à $S(\Pi)$.

<u>Démonstration</u> : soit donné X ; posons $H_n(X ; Z_p) = G$, et soit $\xi \in H^n(X ; G) \approx \mathrm{Hom}(H_n(X ; Z_p) , G)$ la classe fondamentale. Elle définit (cf. Exposé 14, th. 1) une classe d'applications $f_\xi : X \longrightarrow K(G , n)$. Composons les applications suivantes

$$H_{n+q}(X ; Z_p) \xrightarrow{(f_\xi)_*} H_{n+q}(G , n ; Z_p) \longrightarrow A_{n+q}(G , n ; Z_p) \xrightarrow{S(G)} G .$$

On obtient une application linéaire $T(X) : H_{n+q}(X ; Z_p) \longrightarrow H_n(X ; Z_p)$. On va voir que $T(X)$ est naturelle, et que si $X = K(\Pi , n)$, $T(X)$ induit $S(\Pi)$. Ce dernier point est évident, en prenant pour f_ξ l'application canonique $K(\Pi , n) \longrightarrow K(\Pi/p\Pi , n)$. Montrons la naturalité de $T(X)$: soit $h : X \longrightarrow X'$; on pose $G' = H_n(X ; Z_p)$, et h définit un homomorphisme $\lambda : G \longrightarrow G'$. Les deux applications composées $X \xrightarrow{h} X' \xrightarrow{f_{\xi'}} K(G', n)$ et $X \xrightarrow{f_\xi} K(G, n) \xrightarrow{(\lambda)} K(G', n)$ sont homotopes, car elles ont même classe caractéristique ; donc le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_{n+q}(X ; Z_p) & \longrightarrow & H_{n+q}(G, n ; Z_p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{n+q}(X' ; Z_p) & \longrightarrow & H_{n+q}(G', n ; Z_p) \end{array}$$

est commutatif, et ceci entraîne aussitôt la naturalité.

2.- <u>Collection d'opérations homologiques, stable par suspension</u>.

Supposons donné un entier q ; et, pour chaque n, une opération homologique additive (naturelle)

$$T_n : H_{n+q}(X ; Z_p) \longrightarrow H_n(X ; Z_p) .$$

Pour chaque groupe abélien π, et chaque entier n, ceci définit un élément $u_n(\pi) \in H^{n+q}(\pi, n ; \pi/p\pi)$. Nous dirons que la collection des T_n est <u>stable par suspension</u> si, pour chaque π, la collection des $u_n(\pi)$ est stable par suspension (i.e : $u_n(\pi)$ est suspendu de $u_{n+1}(\pi)$). Il revient évidemment au même de dire que, pour chaque groupe abélien et chaque entier n, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A_{n+q}(\pi, n ; Z_p) & \xrightarrow{S_n(\pi)} & A_n(\pi, n ; Z_p) \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\ A_{n+q+1}(\pi, n+1 ; Z_p) & \xrightarrow{S_{n+1}(\pi)} & A_{n+1}(\pi, n+1 ; Z_p) ; \end{array}$$

en notant $S_n(\pi)$ l'application induite par T_n. Noter que la suspension $\sigma : H_{n+q}(\pi, n ; Z_p) \longrightarrow H_{n+q+1}(\pi, n+1 ; Z_p)$ s'annule sur les éléments décomposables (Exp. 6, prop. 1), donc passe au quotient et définit une application linéaire $A_{n+q}(\pi, n ; Z_p) \longrightarrow A_{n+q+1}(\pi, n+1 ; Z_p)$, encore notée σ. Noter que $\sigma : A_n(\pi, n ; Z_p) \longrightarrow A_{n+1}(\pi, n+1 ; Z_p)$ est un isomorphisme.

<u>Proposition 2</u>.- <u>Soit</u> (T_n) <u>une collection d'opération homologiques additives, stable par suspension. Alors pour tout groupe abélien</u> π, <u>et tout groupe abélien</u> G <u>tel que</u> $pG = 0$, <u>le diagramme suivant est commutatif</u>

$$\begin{array}{ccc} H^{n+1}(\pi, m+1 ; G) & \longrightarrow & H^{n+q+1}(\pi, m+1 ; G) \\ \downarrow t_\sigma & & \downarrow t_\sigma \\ H^n(\pi, m ; G) & \longrightarrow & H^{n+q}(\pi, m ; G) \end{array}$$

<u>où les homomorphismes horizontaux désignent les opérations cohomologiques additives définies par</u> T_{n+1} <u>et</u> T_n ; <u>on a noté</u> ${}^t\sigma$ <u>la suspension en cohomologie, transposée de la suspension en homologie</u>.

C'est une conséquence facile du théorème 2 de l'Exposé 14.

3.- <u>Détermination des espaces vectoriels</u> $A_*(\Pi, n; Z_p)$.

Rappelons d'abord que, dans les Exposés 6, 7 et 8, on a étudié les opérations suivantes :

1°) <u>la suspension</u> σ ; elle envoie $\Pi/p\Pi$ dans $H_1(\Pi, 1; Z_p)$, et, pour $n \geq 1$, elle envoie $H_q(\Pi, n; Z_p)$ dans $H_{q+1}(\Pi, n+1; Z_p)$. Elle est additive, et s'annule sur les éléments décomposables. La suspension induit donc une application additive (notée encore σ) de $\Pi/p\Pi$ dans $A_1(\Pi, 1; Z_p)$, et de $A_q(\Pi, n; Z_p)$ dans $A_{q+1}(\Pi, n+1; Z_p)$ pour $n \geqslant 1$.

2°) <u>la transpotence</u> φ_p ; elle envoie ${}_p\Pi$ dans $H_2(\Pi, 1; Z_p)$, et, pour $n \geqslant 1$, elle envoie $H_{2k}(\Pi, n; Z_p)$ dans $H_{2kp+2}(\Pi, n+1; Z_p)$. Elle est additive pour p premier impair ; pour $p = 2$, elle est additive modulo les éléments décomposables (cf. relation (2) de l'Exp. 8) . La valeur de φ_p sur un élément décomposable est 0 si p est impair, et est décomposable si $p = 2$ (cf. prop. 3 de l'Exp. 6). La transpotence induit donc une application <u>additive</u> (notée encore φ_p) de ${}_p\Pi$ dans $A_2(\Pi, 1; Z_p)$, et de $A_{2k}(\Pi, n; Z_p)$ dans $A_{2kp+2}(\Pi, n+1; Z_p)$ pour $n \geqslant 1$. Ceci vaut aussi bien pour $p = 2$ que pour p impair.

3°) <u>la puissance k-ième divisée</u> γ_k , définie pour q pair $\geqslant 2$ et $n \geq 1$, et qui envoie $H_q(\Pi, n; Z_p)$ dans $H_{kq}(\Pi, n; Z_p)$. Si k n'est pas une puissance de p , l'élément $\gamma_k(x)$ est décomposable, en vertu de la relation (15) de l'Exposé 7. Si k est une puissance de p , on a $\gamma_{p^i} = \gamma_p \circ \dots \circ \gamma_p$ (i fois), d'après l'Exposé 7, paragraphe 7. Enfin, $\gamma_k(x+y)$ est égal à $\gamma_k(x) + \gamma_k(y)$ modulo les éléments décomposables. De plus, pour $k \geq 2$, $\gamma_k(x)$ est décomposable si x est décomposable, en vertu de la relation (4') de l'Exp. 7. De tout cela, il résulte notamment que γ_p induit des applications <u>additives</u> (encore notées γ_p) de $A_{2k}(\Pi, n; Z_p)$ dans $A_{2kp}(\Pi, n; Z_p)$, pour $k \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$.

Le "théorème fondamental" de l'Exposé 9 (pour p impair) et l'Appendice 1 de l'Exposé 11 (pour p=2) vont alors nous permettre d'expliciter entièrement l'espace vectoriel gradué $A_*(\Pi, n ; Z_p)$.

On a défini (Exp. 9, paragraphe 1) la hauteur et le degré stable d'un mot α , composé avec les lettres σ , γ_p et φ_p ; les mots de première espèce sont ceux terminés (à droite) par σ ; les mots de deuxième espèce sont ceux terminés (à droite) par φ_p . On a défini les mots "admissibles" ; un mot admissible α , de première espèce, de hauteur n et de degré stable q , définit une application linéaire

$$f(\alpha) : \Pi/p\Pi \longrightarrow H_{n+q}(\Pi, n ; Z_p) ;$$

un mot admissible α , de deuxième espèce, de hauteur n et de degré stable q , définit une application linéaire

$$f(\alpha) : {}_p\Pi \longrightarrow H_{n+q}(\Pi, n ; Z_p) .$$

Le théorème fondamental (Exp. 9) dit que les $f(\alpha)$ sont des isomorphismes sur des sous-espaces vectoriels de $H_{n+q}(\Pi, n ; Z_p)$; que la somme $M_{n+q}(\Pi, n ; Z_p)$ de ces sous-espaces est une somme directe ; et que l'algèbre $H_*(\Pi, n ; Z_p)$ est l'algèbre universelle (à puissances divisées) du sous-espace vectoriel gradué $M_*(\Pi, n ; Z_p) = \sum_{q \geq 0} M_{n+q}(\Pi, n ; Z_p)$.

Tout cela vaut pour p premier impair. Pour $p = 2$, c'est encore vrai si Π est un groupe cyclique (cf. Appendice 1 de l'Exp. 11). De là résulte aussitôt :

Théorème 1.- L'espace vectoriel gradué $A_*(\Pi, n ; Z_p) = \sum_{q \geq 0} A_{n+q}(\Pi, n ; Z_p)$ est somme directe des images de $\Pi/p\Pi$ (resp. ${}_p\Pi$) par les applications linéaires

$$g(\alpha) : \Pi/p\Pi \longrightarrow A_*(\Pi, n ; Z_p)$$

$$\text{resp. } g(\alpha) : {}_p\Pi \longrightarrow A_*(\Pi, n ; Z_p)$$

qui correspondent à tous les mots α de première espèce (resp. de deuxième espèce), de hauteur n , qu'on obtient en écrivant à gauche d'un mot admissible un nombre quelconque fois (éventuellement nul) la lettre γ_p .

Ce théorème vaut aussi pour $p = 2$. En effet, il est vrai si Π est cyclique ; il est vrai si Π est somme directe d'un nombre fini de groupes cycliques, car $A_*(\Pi_1 + \Pi_2, n ; Z_p)$ est somme directe de $A_*(\Pi_1, n ; Z_p)$ et $A_*(\Pi_2, n ; Z_p)$; enfin, il est vrai dans le cas général, car le foncteur covariant $A_*(\Pi, n ; Z_p)$ du groupe abélien Π

commute avec les limites directes.

4.- Les espaces vectoriels $A_*(\pi\ , n\ ; Z_p)$ (Suite) .

Dans l'Exposé 9, on a mis en correspondance biunivoque les mots admissibles de hauteur n et de degré stable q , avec les suites d'entiers $(a_1\ , \dots\ , a_i\ , \dots\ )$ qui satisfont aux conditions

(i) $a_i \equiv 0$ ou 1 (mod. $2p-2$)

(ii) $a_i \geqslant pa_{i+1}$

(iii) $\sum_i a_i = q$,

(iv) $pa_1 < (p-1)(n+q)$.

La correspondance s'explicite comme suit : soit donné une suite $(a_1\ , \dots\ , a_i\ , \dots\ )$ satisfaisant à (i) et (ii) ; posons

(1) $a_i = 2k_i(p-1) + u_i$ (k_i entier $\geqslant 0$, $u_i = 0$ ou 1)

(2) $h_{i+1} = k_i - pk_{i+1} - u_{i+1}$ pour $i \geqslant 1$;

alors h_{i+1} est $\geqslant 0$ d'après (ii) . Définissons alors q par (iii) , puis, n étant donné de manière à satisfaire à (iv) , posons

(3) $h_1 = n+q - 2k_1p - 2u_1$.

Le mot α de hauteur n qui correspond à la suite $(a_1\ , \dots\ , a_i\ , \dots\ )$ est

(4) $\sigma^{h_1}\alpha_1\sigma^{2h_2}\alpha_2 \dots \sigma^{2h_i}\alpha_i \dots$

où α_i désigne γ_p si $u_i = 0$, et désigne φ_p si $u_i = 1$. Un tel mot se termine automatiquement, à droite, par σ ou par φ_p ; il est de deuxième espèce s'il y a un a_i égal à 1 , de première espèce dans le cas contraire.

Dans tout cela, p est supposé impair. La condition (iv) exprime que $h_1 \geqslant 0$ si $\alpha_1 = \varphi_p$, et $h_1 \geq 1$ si $\alpha_1 = \gamma_p$. Si maintenant l'on veut avoir non seulement les mots admissibles, mais aussi, comme dans le th. 1 , ceux qu'on obtient en écrivant un nombre quelconque de fois la lettre γ_p à gauche d'un mot admissible, on doit permettre à l'entier h_1 d'être nul même si $\alpha_1 = \gamma_p$. Cela revient simplement à remplacer l'inégalité (iv) par la suivante :

(iv') $pa_1 \leq (p-1)(n+q)$.

En résumé, l'espace vectoriel $A_{n+q}(\Pi , n ; Z_p)$ est somme directe des sous-espaces, images de $\Pi/p\Pi$, resp. de $_p\Pi$, par les applications linéaires $g(\alpha)$ qui correspondent à tous les mots α de la forme (4), dont chacun est indexé par une suite $(a_1 , \dots , a_i , \dots)$ satisfaisant à (i) , (ii) , (iii) et (iv') .

Ce résultat, valable pour p impair, est encore vrai pour $p = 2$, comme le prouve une simple inspection, en se reportant à l'Appendice 1 de l'Exposé 11 .

Introduisons les notations suivantes. Soit $I = (a_1 , \dots , a_i , \dots)$ une suite d'entiers ≥ 0 satisfaisant à (i) et (ii) . Posons

(5) $$q(I) = \sum_i a_i \quad , \qquad n(I) = [pa_1/(p-1)] - q(I) \ ,$$

où le symbole $[u]$ désigne le plus petit entier au moins égal à u .
On notera que $[pa_1/(p-1)] = 2k_1p + 2u_1$. Avec ces notations, (iii) et (iv') s'écrivent

(6) $$q = q(I) \ , \qquad n \geq n(I) \ .$$

La différence $n - n(I)$ n'est autre que l'entier h_1 de la relation (3) . Pour chaque entier $n \geq n(I)$, on notera $g_I(n)$ l'application $g(\alpha)$ relative au mot α de hauteur n défini par I ; $g_I(n)$ est un isomorphisme de $\Pi/p\Pi$ (resp. de $_p\Pi$) sur un sous-espace vectoriel de $A_*(\Pi,n ; Z_p)$, sous-espace que nous noterons $A_I(\Pi,n ; Z_p)$ et $A_*(\Pi,n ; Z_p)$ est somme directe des $A_I(\Pi,n ; Z_p)$. Il sera commode d'introduire aussi une application $g_I(n)$ pour $n < n(I)$, en convenant que $g_I(n) = 0$ dans ce cas ; la notation $A_I(\Pi,n ; Z_p)$ désignera le sous-espace nul de $A_*(\Pi,n ; Z_p)$ lorsque $n < n(I)$. Il est évident que la suspension σ est un isomorphisme de $A_I(\Pi,n ; Z_p)$ sur $A_I(\Pi,n+1;Z_p)$ si $n \geq n(I)$; et qu'elle applique biunivoquement $A_*(\Pi,n ; Z_p)$ dans $A_*(\Pi, n+1 ; Z_p)$.

Théorème 2.- L'application de suspension

$$A_{n+q}(\Pi , n ; Z_p) \longrightarrow A_{n+q+1}(\Pi , n+1 ; Z_p)$$

est un isomorphisme lorsque $n \geq q/(p-1)$.

En effet, pour que ce soit un isomorphisme, il suffit que l'on ait $n \geq n(I)$ pour toutes les suites I telles que $q(I) = q$; or, pour une telle suite I , on a évidemment $a_1 \leq q$; donc, d'après (5) , il suffit que $n \geq [pq/(p-1)] - q$, ce qui achève la démonstration.

+ et $A_*(\Pi , n ; Z_p)$ est somme directe des $A_I(\Pi , n ; Z_p)$.

Puisque la suspension σ applique biunivoquement $A_*(\Pi, n ; Z_p)$ dans $A_*(\Pi, n ; Z_p)$, sa transposée ${}^t\sigma$ applique $A^*(\Pi, n+1 ; G)$ sur $A^*(\Pi, n ; G)$, pour tout groupe abélien G tel que $pG = 0$. D'ailleurs ${}^t\sigma$ est induite par la suspension en cohomologie : $H^*(\Pi, n+1 ; G) \longrightarrow H^*(\Pi, n ; G)$, dont l'image est contenue dans $A^*(\Pi, n ; G)$, car cette image est orthogonale aux éléments décomposables de $H_*(\Pi, n ; Z_p)$ (en vertu de la prop. 1 de l'Exposé 6). Ainsi :

Proposition 3.- L'image de la suspension $H^*(\Pi, n+1 ; G) \longrightarrow H^*(\Pi, n ; G)$ est exactement le sous-espace $A^*(\Pi, n ; G)$ des éléments additifs de la cohomologie, si $pG = 0$.

5.- Les opérations de Steenrod (en homologie et en cohomologie).

(La théorie de Steenrod n'est pas supposée connue).

Théorème 3.- L'entier $k \geqslant 1$ étant donné, il existe une seule collection d'opérations homologiques $T_n : H_{n+2k(p-1)}(X ; Z_p) \longrightarrow H_n(X ; Z_p)$, stable par suspension, et telle que l'application

$$S_{2k}(\Pi) : A_{2kp}(\Pi, 2k ; Z_p) \longrightarrow A_{2k}(\Pi, 2k ; Z_p)$$

définie par T_{2k}, jouisse des propriétés suivantes : elle s'annule sur l'image de la suspension $A_{2kp-1}(\Pi, 2k-1 ; Z_p) \longrightarrow A_{2kp}(\Pi, 2k ; Z_p)$, et pour $x \in A_{2k}(\Pi, 2k ; Z_p)$, elle transforme $\gamma_p(x)$ dans x. Alors T_n est nulle pour $n < 2k$, et la transposée de T_{2k}

$$H^{2k}(X ; Z_p) \longrightarrow H^{2kp}(X ; Z_p)$$

est la puissance p-ième (dans l'anneau de cohomologie $H^*(X ; Z_p)$).

Démonstration : puisque $S_{2k}(\Pi)$ s'annule sur l'image de la suspension, les $S_n(\Pi)$ sont nulles pour $n < 2k$; donc $T_n = 0$ pour $n < 2k$. L'espace vectoriel $A_{2kp}(\Pi, 2k ; Z_p)$ est la somme directe des images de γ_p, σ et φ_p, d'après le théorème 1 ; mais l'image de φ_p est nulle en dimension $2kp$, car $2kp$ n'est pas de la forme $2k'p+2$. De plus, γ_p est un isomorphisme de $A_{2k}(\Pi, 2k ; Z_p)$ sur son image ; donc les conditions de l'énoncé définissent bien une application linéaire et une seule de $A_{2kp}(\Pi, 2k ; Z_p)$ dans $A_{2k}(\Pi, 2k ; Z_p)$. Elle est évidemment naturelle vis-à-vis du groupe Π. D'après la proposition 1, ceci détermine l'opération homologique T_{2k}.

L'existence et l'unicité de T_n pour $n > 2k$ se montrent alors par récurrence sur n, parce que, pour $n \geq 2k$, la suspension $A_{n+2k(p-1)}(\Pi, n ; Z_p) \longrightarrow A_{n+2k(p-1)+1}(\Pi, n+1 ; Z_p)$ est un isomorphisme (théorème 2).

Il reste à montrer que T_{2k}, par transposition, définit une opération cohomologique $H^{2k}(X ; Z_p) \longrightarrow H^{2kp}(X ; Z_p)$ qui n'est autre que la puissance p-ième. Posons $\Pi = Z_p$; il suffit de montrer que

$$T_{2k} : H_{2kp}(\Pi, 2k ; Z_p) \longrightarrow H_{2k}(\Pi, 2k ; Z_p) \approx Z_p$$

définit un élément $\eta \in H^{2kp}(\Pi, 2k ; Z_p)$ qui est la puissance p-ième de la classe fondamentale $\xi \in H^{2k}(\Pi, 2k ; Z_p)$. Or l'isomorphisme de Π avec Z_p définit un générateur a de Π ; les transformés de a par les applications $g_I(2k)$ telles que $n(I) \geq 2k$, et leurs produits, forment une base de l'espace vectoriel $H_*(\Pi, 2k ; Z_p)$. Considérons la base duale de $H^*(\Pi, 2k ; Z_p)$. Les éléments ξ et η en font partie : ξ correspond à $\sigma^{2k}a$, et η à $\gamma_p(\sigma^{2k}a)$. D'après l'Exposé 9, paragraphe 5 (démonstration précédant l'énoncé du théorème 2), il s'ensuit que $\eta = \xi^p$, ce qu'il fallait démontrer.

Le théorème 3 est ainsi entièrement établi.

Corollaire du théorème 3.- L'entier $k \geq 1$ étant donné, il existe une seule collection d'opérations cohomologiques additives

$$H^n(X ; Z_p) \longrightarrow H^{n+2k(p-1)}(X ; Z_p) \qquad \text{(une pour chaque } n)$$

qui soit stable pour la suspension, et se réduise, pour $n = 2k$, à la puissance p-ième. Ces opérations sont nulles pour $n < 2k$.

Or Steenrod [1] a, par des procédés explicites, défini une telle collection d'opérations, notées P_p^k (notation indépendante de n). Les opérations de notre corollaire sont donc celles de Steenrod, dont l'existence se trouve ainsi démontrée à nouveau. De plus, nous considérerons, pour chaque groupe abélien Π, les opérations cohomologiques

$$H^n(X ; \Pi) \longrightarrow H^{n+2k(p-1)}(X ; \Pi/p\Pi)$$

associées aux opérations homologiques dont les opérations de Steenrod sont les transposées. Ces opérations cohomologiques seront encore appelées opérations de Steenrod, et notées P_p^k.

Notons que tout ce qui précède vaut aussi pour $p = 2$.

6.- Compléments.

A titre d'exercice, on va expliciter l'opération homologique

$$T_{2k} : H_{2kp}(X ; Z_p) \longrightarrow H_{2k}(X ; Z_p)$$

dont la puissance p-ième est transposée. A priori, il existe au plus une application linéaire ayant une transposée donnée. Il suffit donc d'en exhiber une.

Soit X^p le complexe-produit $X \times \ldots \times X$ (p facteurs). L'application "diagonale" $X \longrightarrow X^p$ définit une application linéaire

$$\Delta : H_{2kp}(X ; Z_p) \longrightarrow H_{2kp}(X^p ; Z_p) .$$

On va définir une application linéaire $\mu : H_{2kp}(X^p ; Z_p) \longrightarrow H_{2k}(X ; Z_p)$.

Pour cela, prenons une base homogène (e_i) de l'espace vectoriel $H_*(X ; Z_p)$; $H_*(X^p ; Z_p)$ s'identifie au produit tensoriel de p exemplaires de $H_*(X ; Z_p)$, donc possède une base formée des $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p}$, les indices $i_1 , \ldots , i_p$ étant distincts ou non. Nous posons

$$\mu(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p}) = 0 \quad \text{si} \quad i_1 , \ldots , i_p \quad \text{ne sont pas tous égaux ;}$$

$$\mu(e_i \otimes \ldots \otimes e_i) = e_i .$$

Ceci définit bien une application linéaire $\mu : H_*(X^p ; Z_p) \longrightarrow H_*(X ; Z_p)$, qui envoie les éléments de degré 2kp dans ceux de degré 2k . Il est immédiat que si on considère l'application composée

$$\mu \circ \Delta : H_{2kp}(X ; Z_p) \longrightarrow H_{2k}(X ; Z_p) ,$$

sa transposée $H^{2k}(X ; Z_p) \longrightarrow H^{2kp}(X ; Z_p)$ est la puissance p-ième. Donc l'application $\mu \circ \Delta$ <u>ne dépend pas du choix de la base</u> (e_i) , bien que μ en dépende.

Le groupe des permutations sur p éléments opère d'une manière évidente dans $H_*(X^p ; Z_p)$. L'application diagonale Δ envoie $H_*(X ; Z_p)$ dans le sous-espace $\widetilde{H}_*(X^p ; Z_p)$ des éléments <u>invariants</u> de $H_*(X^p ; Z_p)$. On peut vérifier que la restriction de μ à $\widetilde{H}_*(X^p ; Z_p)$ <u>ne dépend pas du choix de la base</u> (e_i) .

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. STEENROD, <u>Cyclic reduced powers of cohomology classes</u>, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 39, 1953, p. 217-223 .