J. C. Moore

Comparaison de la bar-construction à la construction W et aux complexes $K(\pi, n)$

Séminaire Henri Cartan, tome 7, n^o 2 (1954-1955), exp. n^o 13, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_2_A2_1>

COMPARAISON DE LA BAR-CONSTRUCTION
À LA CONSTRUCTION W ET AUX COMPLEXES $K(\Pi, n)$.

(Exposé de J. C. MOORE, 14.2.1955)

1.- Préliminaires sur les modules différentiels filtrés.

Nous conservons les notations de l'Exposé 3 pour la suite spectrale.

Soient A une DGA-algèbre, M un DGA-module sur A, N un DGA-module sur Λ (ayant une Λ-base homogène), et Ψ un DGA-homomorphisme de M sur N. On suppose donnée une filtration sur M, définie par des sous-modules $F_p(M)$ satisfaisant aux conditions de l'Exposé 3 (p. 3-01), et en outre aux conditions suivantes : (1) chaque $F_p(M)$ est stable pour les opérations de A ; (2) l'application $\Psi : M \to N$ envoie $F_p(M)$ sur $\sum_{q \leq p} N_q$.

Considérons $A \otimes N$ comme un DGA-module sur A, avec la différentielle $d(a \otimes n) = (da) \otimes n + (-1)^\alpha a \otimes (dn)$, où $\alpha = \deg(a)$. Considérons la filtration

$$F_p(A \otimes N) = A \otimes \sum_{q \leq p} N_q \quad \text{définie par le degré de } N \text{ ; on a}$$

$$F_p(A \otimes N)/F_{p-1}(A \otimes N) \approx A \otimes N_p \quad \text{muni de la différentielle de } A .$$

Supposons de plus qu'on se soit donné un homomorphisme

$$\varphi^o : E^o(M) \to E^o(A \otimes N) \approx A \otimes N \quad ,$$

c'est-à-dire, pour chaque p, un homomorphisme $F_p(M)/F_{p-1}(M) \to A \otimes N_p$; et que φ^o soit compatible avec les structures de A-module et les différentielles d^o. Supposons en outre que si on compose

$$M_p \to F_p(M)/F_{p-1}(M) \xrightarrow{\varphi^o} A \otimes N_p \to N_p \quad ,$$

où le premier homomorphisme est défini par l'injection $M_p \to F_p(M)$, et où le dernier est $a \otimes n \to (\varepsilon a)n$, on obtienne l'application $M_p \to N_p$ induite par Ψ.

Dans la situation précédente, φ^o induit un homomorphisme des modules de d^o-homologie, c'est-à-dire un homomorphisme

$$\varphi^1 : E^1(M) \to E^1(A \otimes N) \approx H(A) \otimes N \quad .$$

φ^1 est compatible avec les structures de modules à gauche sur l'algèbre graduée $H(A)$. Mais il n'est pas certain que φ^1 soit compatible avec les différentielles d^1. On notera que la différentielle d^1 de $H(A) \otimes N$ envoie $a \otimes n$ dans $(-1)^\alpha a \otimes (dn)$ pour $a \in H(A)$ de degré α.

Proposition 1.- Dans la situation précédente, supposons que φ^1 soit un isomorphisme, et que l'augmentation de A définisse un isomorphisme $H_o(A) \approx \Lambda$. Alors φ^1 est compatible avec d^1, et définit donc un isomorphisme

$$\varphi^2 : E^2(M) \approx H(H(A) \otimes N) .$$

Démonstration : soit $u \in H(A)$, $n \in N_p$. Prenons $m \in M_p$ tel que $\psi(m) = n$; l'image m' de $m \in F_p(M)$ dans $E^1(M)$ est telle que $\varphi^1(m') = 1 \otimes n$. Soit a un cycle de A dont la classe d'homologie soit u ; l'image m'' de $am \in F_p(M)$ dans $E^1(M)$ est $u \otimes n$. Puisque, dans $F_p(M)$, on a

$$d(am) = (-1)^\alpha a(dm) \quad , \quad \alpha = \deg(a) \quad ,$$

il s'ensuit que $\varphi^1(d^1 m'') = (-1)^\alpha a \otimes (dn)$, ce qui démontre la proposition.

2.- La suite spectrale d'une construction.

Soit R un complexe (au sens de l'Exposé 12). La notation R_N désignera le complexe normalisé (Exposé 12, paragraphe 1) muni de sa structure de Λ-module différentiel gradué (R_N n'est pas un "complexe"). Si de plus R est un complexe d'anneaux (Exposé 12, p. 12-02), alors R_N sera considéré comme muni de sa structure d'algèbre différentielle graduée. Rappelons que la multiplication de R_N est alors définie par l'application composée $R_N \otimes R_N \xrightarrow{\nabla} (R \times R)_N \rightarrow R_N$, dont la seconde est définie par la multiplication de chaque algèbre R_q. Rappelons aussi que si la multiplication de R est commutative, celle de R_N est anticommutative (au sens strict).

Soit $(R,\bar{U},U)$ une construction, au sens de l'Exposé 12, paragraphe 2. Alors U_N est un DGA-module sur la DGA-algèbre R_N, pour la multiplication définie par l'application composée $R_N \otimes U_N \xrightarrow{\nabla} (R \times U)_N \rightarrow U_N$. On va se placer dans la situation du paragraphe 1, A étant remplacée par R_N, M par U_N et N par $\bar{U}_N$. L'application ψ du paragraphe 1 est remplacée par l'application naturelle $U_N \rightarrow \bar{U}_N$. Nous définissons une filtration $F_p(U_N)$ comme suit : soit $\bar{U}^p$ le sous-complexe de $\bar{U}$ engendré par les éléments de degré p, c'est-à-dire le plus petit ensemble de $\bar{U}$ contenant $\bar{U}_p$ et stable pour les opérations ∂_i et s_i. Nous posons

$$F_p(U) = R \times \overline{U}^p \quad , \quad F_p(U_N) = \text{image de } F_p(U) \text{ dans } U_N \ .$$

Il est immédiat que cette filtration satisfait aux conditions du paragraphe 1. On va prendre pour $\varphi^o : \sum_p F_p(U_N)/F_{p-1}(U_N) \to R_N \otimes \overline{U}_N$ l'application induite par

$$f : (R \times \overline{U})_N \longrightarrow R_N \otimes \overline{U}_N$$

définie dans l'Exposé 12, p. 12-02 ; f, étant compatible avec les filtrations, induit bien une application $\varphi^o : E^o(U_N) \to E^o(R_N \otimes \overline{U}_N)$.

Si on compose f avec l'application $R_N \otimes \overline{U}_N \to \overline{U}_N$ définie par l'augmentation de R_N , on retrouve bien l'application naturelle $U_N \to \overline{U}_N$. Il faut vérifier que φ^o est compatible avec les opérateurs d^o . Il en est évidemment ainsi dans le cas où la construction $(R,\overline{U},U)$ est un produit cartésien, car alors f est compatible avec les différentielles. Il suffit donc de montrer que la différentielle d^o de $E^o(U_N)$ est la même que pour un produit cartésien.

Or un élément $x \in F_p(U_{p+q})$ est une somme d'éléments de la forme $r_{p+q} \times s_{i_1}\dots s_{i_q}\,\overline{u}_p$, où l'on peut supposer $i_1 > \dots > i_q$, et $\overline{u}_p \in \overline{U}_p$. Le ∂_j de cet élément est

$$(\partial_j r_{p+q}).\partial_j(1 \times s_{i_1}\dots s_{i_q}\,\overline{u}_p) = (\partial_j r_{p+q}).\partial_j s_{i_1}\dots s_{i_q}(1 \times \overline{u}_p) \ .$$

De plus $\partial_j s_{i_1}\dots s_{i_q}(1 \times \overline{u}_p)$ est de filtration au plus $p-1$, sauf si j est égal à l'un des entiers i_1+1, i_1 , i_2+1 , i_2 , ... , i_q+1 , i_q ; si $j = i_r$ ou i_{r+1} (avec $1 \leqslant r \leqslant q$), on a

$$\partial_j s_{i_1}\dots s_{i_q}(1 \times \overline{u}_p) = s_{i_1-1}\dots s_{i_{r-1}-1} s_{i_{r+1}}\dots s_{i_q}(1 \times \overline{u}_p) \ .$$

On aurait évidemment la même formule si U était un produit cartésien $R \times \overline{U}$.

Pour pouvoir appliquer à cette situation la proposition 1 ci-dessus, il reste à vérifier que φ^o définit un <u>isomorphisme</u>

$$\varphi^1 : E^1(U_N) \approx H(R_N) \otimes \overline{U}_N \quad .$$

Or φ^o est induite par f ; dans l'Exposé 12, p. 12-02, on a défini

$$\nabla : R_N \otimes \overline{U}_N \longrightarrow (R \times \overline{U})_N$$

et une homotopie Φ entre ∇f et l'identité ; comme Φ est naturelle,

Φ respecte la filtration, donc (cf. [1]) l'application composée

$$E^{o}(U_N) \xrightarrow{\varphi^{o}} E^{o}(R_N \otimes \bar{U}_N) \xrightarrow{\nabla^{o}} E^{o}(U_N)$$

définit, par passage à l'homologie, l'application identique. Il s'ensuit que φ^1 est un isomorphisme. Finalement, on a prouvé :

Proposition 2.- Si $(R, \bar{U}, U)$ est une construction, et si $H_o(R_N) = \Lambda$, la suite spectrale de la filtration $F_p(U_N)$ a pour terme E^1 le module $H(R_N) \otimes \bar{U}_N$, et la différentielle d^1 envoie $a \otimes u$ dans $(-1)^{\alpha}\, a \otimes (du)$, avec $\alpha = \deg(a)$. On a donc $E^2(U_N) \approx H(H(R_N) \otimes \bar{U}_N)$.

3.- Comparaison de la construction W et de la bar construction.

Soit R un complexe d'anneaux (non supposés commutatifs). On notera $W_N(R)$ le normalisé du complexe $W(R)$ défini dans l'Exposé 12 (p. 12-04, 12-05). L'image de l'application composée $\bar{W}(R) \to W(R) \to W_N(R)$ s'identifie au normalisé $\bar{W}_N(R)$ de $\bar{W}(R)$.

Théorème 1.- Soient A une DGA-algèbre, et R un complexe d'anneaux. Soit $f : A \to R_N$ un DGA-homomorphisme. Alors il existe un DGA-homomorphisme et un seul

$$g : \mathcal{B}(A) \to W_N(R)$$

compatible avec f, et tel que $g(\bar{\mathcal{B}}(A)) \subset \bar{W}_N(R)$. Soit $\bar{g} : \bar{\mathcal{B}}(A) \to \bar{W}_N(R)$ l'application induite par g ; si f induit un isomorphisme $H(A) \approx H(R_N)$, et si $H_o(A) \approx H_o(R_N) \approx \Lambda$, alors $\bar{g}_* : H(\bar{\mathcal{B}}(A)) \to H(\bar{W}_N(R))$ est un isomorphisme.

(Ce théorème, essentiellement dû à Eilenberg-MacLane, est énoncé p. 98 du mémoire cité en [1] dans l'Exposé 12, sous des hypothèses légèrement différentes).

Démonstration : l'existence et l'unicité de g se prouvent exactement comme dans la démonstration du théorème 5 de l'Exposé 4, parce que tout cycle d'augmentation nulle de $W_N(R)$ est le bord d'un unique élément de $\bar{W}_N(R)$ (cf. Exposé 12, démonstration du théorème 2). L'application g est compatible avec les filtrations. D'après la proposition 1, on a $E^1(\mathcal{B}(A)) = H(A) \otimes \bar{\mathcal{B}}(A)$, la différentielle d^1 étant induite par l'opérateur $\bar{d}$ de $\bar{\mathcal{B}}(A)$. D'après la proposition 2, $E^1(W_N(R)) = H(R_N) \otimes \bar{W}_N(R)$, et d^1 est induit par l'opérateur de $\bar{W}_N(R)$. Si de plus f induit un isomorphisme $H(A) \to H(R_N)$, nous sommes exactement dans les conditions d'application du théorème A de l'Exposé 3 (p. 3-04). On en conclut que $\bar{g}_*$: $H(\bar{\mathcal{B}}(A)) \to H(\bar{W}_N(R))$ est un isomorphisme. C.Q.F.D.

Rappelons que si la DGA-algèbre A est anticommutative, $\mathcal{B}(A)$ et $\bar{\mathcal{B}}(A)$ sont douées d'une multiplication qui en fait des DGA-algèbres anticommutatives (Exposé 3, proposition 3 et théorème 4). Il y a une propriété analogue pour la construction W : supposons que le complexe d'anneaux R soit <u>commutatif</u> (alors la DGA-algèbre R_N est anticommutative) : l'application $R \times R \to R$ définie par la multiplication des anneaux R_q est alors multiplicative ; d'après le théorème 2 de l'Exposé 12, elle définit une application g de $W(R \times R) = W(R) \times W(R)$ dans $W(R)$, qui applique $\bar{W}(R \times R) = \bar{W}(R) \times \bar{W}(R)$ dans $\bar{W}(R)$. Il est facile d'expliciter g : rappelons que $W_q(R) = R_q \otimes \ldots \otimes R_o$, et $\bar{W}_q(R) = R_{q-1} \otimes \ldots \otimes R_o$; définissons une multiplication dans $W_q(R)$ par $(r_q \otimes \ldots \otimes r_o).(r'_q \otimes \ldots \otimes r'_o) = (r_q r'_q) \otimes \ldots \otimes (r_o r'_o)$, ce qui induit sur $\bar{W}_q(R)$ la multiplication $(r_{q-1} \otimes \ldots \otimes r_o).(r'_{q-1} \otimes \ldots \otimes r'_o) = (r_{q-1}r'_{q-1}) \otimes \ldots \otimes (r_o r'_o)$. Pour montrer que c'est bien la multiplication g cherchée, il suffit de prouver qu'avec cette multiplication $W(R)$ et $\bar{W}(R)$ sont des complexes d'anneaux augmentés (d'ailleurs commutatifs). Or cela résulte des formules

$$s_i(r_q \otimes \ldots \otimes r_o) = (s_i r_q) \otimes (s_{i-1} r_{q-1}) \otimes \ldots \otimes (s_o r_{q-i}) \otimes 1_{q-i} \otimes r_{q-i-1} \otimes \ldots \ldots \otimes r_o$$

$$\varepsilon(r_q \otimes \ldots \otimes r_o) = (\varepsilon\, r_q) \ldots (\varepsilon\, r_o) ,$$

$$\partial_i(r_q \otimes \ldots \otimes r_o) = (\partial_i r_q) \otimes \ldots \otimes (\partial_o r_{q-i}) r_{q-i-1} \otimes \ldots \otimes r_o ,$$

et du fait que, R étant commutatif, on a

$$(\partial_o r_{q-i}) r_{q-i-1} \cdot (\partial_o r'_{q-i}) r'_{q-i-1} = \partial_o (r_{q-i}\, r'_{q-i}) r_{q-i-1}\, r'_{q-i-1} .$$

<u>Proposition 3</u>.- <u>Soient</u> A <u>une</u> DGA-<u>algèbre anticommutative</u>, R <u>un complexe d'anneaux commutatifs</u>, <u>et</u> $f : A \to R_N$ <u>un</u> DGA-<u>homomorphisme</u>. <u>Alors les</u> DGA-<u>homomorphismes</u> $g : \mathcal{B}(A) \to W_N(R)$ <u>et</u> $\bar{g} : \bar{\mathcal{B}}(A) \to \bar{W}_N(R)$ <u>du théorème 1 sont compatibles avec les structures multiplicatives</u> (ce sont des DGA-homomorphismes de DGA-algèbres).

La démonstration est la même que pour le théorème 5 de l'Exposé 4.

4.- <u>Comparaison des constructions itérées</u>.

Soit R un complexe d'anneaux augmentés, <u>commutatif</u>. Alors $W(R)$ est aussi un complexe d'anneaux augmenté, commutatif. On peut donc définir, par récurrence sur l'entier n, des complexes d'anneaux augmentés, commutatifs, $W^{(n)}(R)$ et $\overline{W}^{(n)}(R)$, comme suit :

$$\overline{W}^{o}(R) = R \,, \quad W^{(n+1)}(R) = W(\overline{W}^{(n)}(R)) \,, \quad \overline{W}^{(n+1)}(R) = \overline{W}(\overline{W}^{(n)}(R)) \,.$$

On posera $\overline{W}_N^{(n+1)}(R) = \overline{W}_N(\overline{W}^{(n)}(R))$.

Soit alors A une DGA-algèbre anticommutative, et $f : A \to R_N$ un DGA-homomorphisme. Grâce à la proposition 3, on définit par récurrence des DGA-homomorphismes

$$\overline{g}^{(n)} : \overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A) \to \overline{W}_N^{(n)}(R) \;,$$

en convenant que $\overline{g}^{(n+1)}$ est l'homomorphisme que le théorème 1 attache au DGA-homomorphisme $\overline{g}^{(n)}$. Si de plus f induit un isomorphisme de $H(A)$ sur $H(R_N)$, et si $H_o(R_N) \approx \Lambda$, alors une application répétée du théorème 1 montre que, pour tout n, $\overline{g}^{(n)}$ <u>induit un isomorphisme de</u> $H(\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$ <u>sur</u> $H(\overline{W}_N^{(n)}(R))$.

Appliquons ceci au cas où A est l'algèbre $Z(\pi)$ d'un groupe abélien π, et où R est l'unique complexe d'anneaux tel que $R_q = Z(\pi)$ pour tout q (les s_i et les d_i étant l'application identique) ; alors $R_N = A$. Prenons pour f l'application identique. On constate, par un calcul direct et élémentaire, que l'application $\overline{g}^{(1)}$ de $\overline{\mathcal{B}}(A)$ dans $\overline{W}_N(R)$ est un isomorphisme (chacune de ces DGA-algèbres s'identifie au complexe non homogène, normalisé, du groupe discret π). A partir de là, on est dans les conditions d'application du théorème 1 ; on trouve donc des DGA-homomorphismes naturels

$$\overline{g}^{(n)} : \overline{\mathcal{B}}^{(n)}(Z(\pi)) \to \overline{W}_N^{(n)}(R)$$

qui, par passage à l'homologie, donnent des <u>isomorphismes</u>.

Il reste à montrer que l'algèbre d'homologie $H(\overline{W}_N^{(n)}(R))$ s'identifie, d'une manière naturelle, à l'algèbre d'homologie $H_*(\pi,n;Z)$ d'un espace du type $\mathcal{K}(\pi,n)$; et que, plus généralement, pour tout anneau Λ de coefficients, $H(\overline{W}_N^{(n)}(R) \otimes \Lambda)$ s'identifie canoniquement à $H_*(\pi,n;\Lambda)$. Cela va résulter de la comparaison du complexe $\overline{W}^{(n)}(R)$ au complexe d'Eilenberg-MacLane $K(\pi,n)$.

5.- <u>Comparaison de</u> $K(\pi,n)$ <u>avec la construction</u> $\overline{W}$ <u>itérée</u>. (Cf. le mémoire cité en [1] dans l'Exposé 12).

Soit π un groupe abélien (noté additivement) ; Δ_q désignant le "simplexe" $\{0,1,\ldots,q\}$ de dimension q , nous notons $C^n(\Delta_q;\pi)$ le groupe des n-cochaînes alternées de Δ_q . On peut le décrire comme le groupe des fonctions u , à valeurs dans π , définies pour chaque suite croissante $\{m_o,\ldots,m_n\}$ d'entiers $\geqslant 0$ et $\leqslant q$, et nulle quand ces entiers ne sont pas tous distincts ; le groupe $C^n(\Delta_q;\pi)$ est nul pour $n > q$. L'opérateur cobord

$$\delta : C^n(\Delta_q;\pi) \to C^{n+1}(\Delta_q;\pi)$$

est défini par

$$(\delta u)(m_o,\ldots,m_{n+1}) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \ (m_o,\ldots,\hat{m}_j,\ldots,m_{n+1}) \ .$$

On a $\delta\delta = 0$. On note $Z^n(\Delta_q;\pi)$ le noyau de $\delta : C^n(\Delta_q;\pi) \to C^{n+1}(\Delta_q;\pi)$, et $B^n(\Delta_q;\pi)$ l'image de $\delta : C^{n-1}(\Delta_q;\pi) \to C^n(\Delta_q;\pi)$. Il est classique que $B^n(\Delta_q;\pi) = Z^n(\Delta_q,\pi)$ pour $n \geqslant 1$.

Considérons la suite exacte

(1) $$0 \to Z^n(\Delta_q;\pi) \to C^n(\Delta_q;\pi) \xrightarrow{\delta} Z^{n+1}(\Delta_q;\pi) \to 0 \ .$$

Définissons $\tau : Z^{n+1}(\Delta_q;\pi) \to C^n(\Delta_q;\pi)$ par

$$(\tau u)(m_o,\ldots,m_n) = u(0,m_o,\ldots,m_n) \ .$$

Un calcul immédiat montre que $\delta\tau$ est l'identité. La suite exacte (1) et τ définissent une décomposition directe

(2) $$C^n(\Delta_q;\pi) \approx Z^n(\Delta_q;\pi) + Z^{n+1}(\Delta_q;\pi) \ ,$$

à savoir : toute n-cochaîne de Δ_q s'écrit d'une seule manière comme somme d'un n-cocycle et d'une n-cochaîne nulle sur toute suite $(m_o,\ldots,m_n)$ telle que $m_o = 0$.

On définit des homomorphismes (de groupes abéliens)

$$\partial_i : C^n(\Delta_{q+1};\pi) \to C^n(\Delta_q;\pi) \ , \quad 0 \leqslant i \leqslant q+1 \ ,$$

$$s_i : C^n(\Delta_q;\pi) \to C^n(\Delta_{q+1};\pi) \ , \quad 0 \leqslant i \leqslant q \ ,$$

comme suit : soit $\lambda_i : \{0,\ldots,q\} \to \{0,\ldots,q+1\}$ l'application telle que $\lambda_i(j) = j$ pour $j < i$, $\lambda_i(j) = j+1$ pour $j \geqslant i$; soit $\eta_i : \{0,\ldots,q+1\} \to \{0,\ldots,q\}$ l'application telle que $\eta_i(j) = j$ pour $j \leqslant i$, $\eta_i(j) = j-1$

pour $j > i$. Alors ∂_i est défini par

$$(\partial_i u)(m_o,\ldots,m_n) = u(\lambda_i(m_o),\ldots,\lambda_i(m_n)) ,$$

et s_i est défini par

$$(s_i u)(m_o,\ldots,m_n) = u(\eta_i(m_o),\ldots,\eta_i(m_n)) .$$

Il est immédiat que les ∂_i et les s_i satisfont aux identités du paragraphe 1 de l'Exposé 12. De plus, ils induisent des applications (encore notées ∂_i, resp. s_i) de $Z^n(\Delta_{q+1};\pi)$ dans $Z^n(\Delta_q;\pi)$, resp. de $Z^n(\Delta_q;\pi)$ dans $Z^n(\Delta_{q+1};\pi)$.

<u>Proposition 4</u>.- <u>L'application composée</u>

$$Z^{n+1}(\Delta_{q+1};\pi) \xrightarrow{\tau} C^n(\Delta_{q+1};\pi) \xrightarrow{\partial_o} C^n(\Delta_q;\pi)$$

<u>est un isomorphisme</u>.

En effet, on a une correspondance biunivoque entre les n-cochaînes de Δ_q , et les n-cochaînes de Δ_{q+1} nulles sur toute suite $(m_o,\ldots,m_n)$ telle que $m_o = 0$.

<u>Définition</u> : les groupes $C^n(\Delta_q;\pi)$ et $Z^n(\Delta_q;\pi)$ étant désormais notés multiplicativement, soit $K_q(\pi,n)$ l'algèbre du groupe $Z^n(\Delta_q;\pi)$ à coefficients dans l'anneau Z des entiers, et soit $L_q(\pi,n+1)$ l'algèbre du groupe $C^n(\Delta_q;\pi)$ à coefficients dans Z . Ce sont des algèbres commutatives à élément unité, et la première s'identifie à une sous-algèbre de la seconde. Les homomorphismes ∂_i et s_i définis ci-dessus induisent des homomorphismes d'algèbres

$$\partial_i : K_{q+1}(\pi,n) \to K_q(\pi,n) \quad , \quad \partial_i : L_{q+1}(\pi,n+1) \to L_q(\pi,n) \quad ,$$

$$s_i : K_q(\pi,n) \to K_{q+1}(\pi,n) \quad , \quad s_i : L_q(\pi,n+1) \to L_{q+1}(\pi,n) \quad .$$

Ainsi $K(\pi,n) = \sum_{q \geqslant 0} K_q(\pi,n)$ et $L(\pi,n+1) = \sum_{q \geqslant 0} L_q(\pi,n+1)$ sont des <u>complexes d'anneaux</u> ; le premier s'identifie à un sous-complexe du second ; ils sont <u>commutatifs</u>. Ces complexes sont munis d'une augmentation évidente, qui envoie chaque élément de la base de $K_q(\pi,n)$ (resp. de $L_q(\pi,n+1)$) dans l'élément $1 \in Z$.

L'application τ définit une application biunivoque

$$K(\pi,n+1) \to L(\pi,n+1) \quad ,$$

qui permet désormais d'identifier le premier de ces complexes à un sous-complexe du second. La décomposition directe (2) montre que $L(\pi,n+1)$ s'identifie alors au produit $K(\pi,n) \times K(\pi,n+1)$; d'une façon précise, on a $L_q(\pi,n+1) \approx K_q(\pi,n) \otimes K_q(\pi,n+1)$ comme algèbre, et on vérifie que

$$s_i(1_q \times x) = 1_{q+1} \times (s_i x) \quad \text{pour} \quad x \in K_q(\pi,n+1) \quad ,$$

$$\partial_i(1_{q+1} \times x) = 1_q \times (\partial_i x) \quad \text{pour} \quad x \in K_{q+1}(\pi,n+1) \quad \text{et} \quad i \geq 1 \; ,$$

et ∂_o induit un isomorphisme de $K_{q+1}(\pi,n+1)$ sur $L_q(\pi,n+1)$: cela résulte de la proposition 4. Enfin, l'augmentation est un isomorphisme $K_o(\pi,n+1)$ sur Z . Ainsi,

$$(K(\pi,n),K(\pi,n+1),L(\pi,n+1))$$

est une construction satisfaisant à la condition (W) (Exposé 12, p. 12-04).

En vertu de l'unicité de la construction W sur un complexe R donné (Exposé 12, p. 12-05), on voit qu'on a un isomorphisme naturel

$$K(\pi,n+1) \approx \overline{W}(K(\pi,n)) \; ,$$

d'où, par récurrence sur n ,

$$\overline{W}^{(n)}(K(\pi,0)) \approx K(\pi,n) \; . \tag{3}$$

D'ailleurs $K(\pi,0)$ est l'unique complexe R tel que $R_q = Z(\pi)$ pour tout q . En combinant l'isomorphisme (3) et l'homomorphisme $\bar{g}^{(n)}$ du paragraphe 3, on obtient des DGA-homomorphismes naturels

$$\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(Z(\pi)) \rightarrow K_N(\pi,n) \tag{4}$$

qui, par passage à l'homologie, donnent des isomorphismes. La notation $K_N(\pi,n)$ désigne le complexe normalisé de $K(\pi,n)$; on sait que $H(K_N(\pi,n)) \approx H(K(\pi,n))$.

Il est classique [2] que le complexe $K(\pi,n)$ est isomorphe à un sous-complexe minimal du complexe singulier de n'importe quel espace X tel que $\pi_i(X) = 0$ pour $i \neq n$, $\pi_n(X) = \pi$; et que si X est un espace multiplicatif de Hopf (ce qu'on peut toujours supposer), alors la multiplication du complexe minimal de X induit la multiplication de $K(\pi,n)$ comme ci-dessus décrite (cf. [3]). Les algèbres d'homologie $H_*(X;\Lambda)$ s'identifient donc aux algèbres d'homologie $H_*(K_N(\pi,n) \otimes \Lambda)$. On a finalement obtenu des isomorphismes naturels

$$H_*(\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(\Lambda(\pi))) \approx H_*(\pi,n;\Lambda) \; .$$

Il est aisé de voir qu'ils commutent avec la suspension.

<u>BIBLIOGRAPHIE</u>.

[1] H. CARTAN - S. EILENBERG - <u>Homological algebra</u> (Princeton Univ. Press, à paraître) ; voir chapitre XV, Proposition 3.1.

[2] S. EILENBERG - S. MAC LANE - <u>Relations between homology and homotopy groups of spaces</u>, I (Ann. of Math. 46, 1945, p. 480-509).

[3] S. MAC LANE - <u>Homology products in</u> $K(\pi,n)$ (Proc. Amer. Math. Soc., 5 1954, p. 41-51).