J. C. Moore

Constructions sur des complexes d'anneaux

Séminaire Henri Cartan, tome 7, n° 2 (1954-1955), exp. n° 12, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_2_A1_0>

CONSTRUCTIONS SUR DES COMPLEXES D'ANNEAUX

(Exposé de J.C. MOORE, 7.2.1955)

Le but de cet exposé et du suivant est de comparer l'homologie de la bar construction itérée à celle d'un espace $K(\Pi,n)$.

1.- Complexes.

Hypothèse : Λ est un anneau principal choisi une fois pour toutes.

Définitions : Nous appellerons K un complexe si

1) $K = \sum_{q \geqslant 0} K_q$,

2) chaque K_q est libre comme module sur Λ ,

3) il existe des opérateurs de face $\partial_i = K_{q+1} \to K_q$ pour $i = 0 , \ldots , q+1$ et des opérateurs de dégénérescence $s_i : K_q \to K_{q+1}$ pour $i = 0 , \ldots , q$, satisfaisant aux identités suivantes

$$\partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i \quad , \quad i < j \quad ,$$
$$s_i s_j = s_{j+1} s_i \quad , \quad i \leqslant j \quad ,$$
$$\partial_i s_j = s_{j-1} \partial_i \quad , \quad i < j \quad ,$$
$$\partial_j s_j = \partial_{j+1} s_j = \text{identité, et}$$
$$\partial_i s_j = s_j \partial_{i-1} \quad , \quad i > j+1 \quad .$$

Nous définissons $\partial : K_{q+1} \to K_q$ par $\partial = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \partial_i$. Nous disons qu'une fonction $f : K \to L$, où K et L sont des complexes, est une application si elle est un homomorphisme de modules gradués et si de plus nous avons $f\partial_i = \partial_i f$ et $s_i f = f s_i$.

Nous noterons K^n le plus petit sous-complexe de K qui contient $\sum_{q \leqslant n} K_q$ Nous définissons $s(K)$ comme le sous-module de K engendré par toutes les images des opérateurs s_i , et $K_N = K/s(K)$; K_N est libre. Le module $s(K)$ est stable par l'opérateur ∂ , et il est acyclique (voir par exemple [1], p.61).

<u>Définition</u> : Nous disons qu'un complexe R est un <u>complexe d'anneaux</u> si chaque R_q est une algèbre avec unité sur Λ , et si chaque opérateur ∂_i ou s_i est un homomorphisme d'algèbres. Nous noterons 1_q l'élément unité de R_q .

<u>Définition</u> : $\widetilde{\Lambda}$ est l'unique complexe d'anneaux tel que $\partial_0 : \widetilde{\Lambda}_{q+1} \to \widetilde{\Lambda}_q$ soit un isomorphisme pour chaque q et tel que $\widetilde{\Lambda}_0 = \Lambda$. Nous disons qu'un complexe K est <u>augmenté</u> si on s'est donné une application de complexes $\varepsilon : K \to \widetilde{\Lambda}$. Pour un complexe R d'anneaux, nous demandons que ε soit multiplicatif et dans ce cas nous identifierons Λ avec le sous-anneau de R_q qui est engendré par 1_q .

<u>Définition</u> : Si K et L sont des complexes, nous définissons le <u>produit cartésien</u> $K \times L$ par

1) $$(K\times L)_q = K_q \otimes L_q \quad ,$$

2) $$\partial_i(k\times \ell) = (\partial_i k \times \partial_i \ell) \quad , \text{ et}$$

3) $$s_i(k\times \ell) = (s_i k \times s_i \ell) \quad .$$

Evidemment le produit cartésien de deux complexes est un complexe.

<u>Définition</u> : Si K et L sont des complexes, nous définissons $\nabla : K\otimes L \to K\times L$ par $\nabla(a_p \otimes b_q) = \sum_{(\mu,\nu)} \sigma(\mu,\nu)\ (s_{\nu_q} \dots s_{\nu_1} a_p) \times$ $\times\ (s_{\mu_p} \dots s_{\mu_1} b_q)$, où $a_p \in K_p$, $b_q \in L_q$, et (μ,ν) désigne un (p,q)-"shuffle", c'est-à-dire que (μ,ν) est une partition de $\{0 , \dots , p+q-1\}$ en deux suites disjointes telles que $\mu_1 < \dots < \mu_p$ et $\nu_1 < \dots < \nu_q$; $\sigma(\mu,\nu)$ désigne la signature de la permutation $(\mu_1 , \dots, \mu_p , \nu_1 , \dots, \nu_q)$. Nous noterons que $K\otimes L$ n'est pas un "complexe" mais un Λ-module différentiel gradué.

Dans les mêmes conditions nous définissons $f : K\times L \to K\otimes L$ par

$$f(a_q \times b_q) = \sum_{i=0}^{q} \partial^{q-i} a_q \otimes \partial_0^i b_q \ , \quad \text{où } \partial a_r = \partial_r a_r \ \text{ pour } a_r \in K_r \ .$$

Théorème 1.- <u>Si</u> K <u>et</u> L <u>sont des complexes,</u> f <u>et</u> ∇ <u>induisent des fonctions, notées encore</u> f <u>et</u> ∇ , <u>telles que</u>

1) $$f : (K\times L)_N \to K_N \otimes L_N \quad ,$$

2) $$\nabla : K_N \otimes L_N \to (K\times L)_N \quad ,$$

3) $f\partial = \partial f$, $\nabla\partial = \partial\nabla$,

4) $f\nabla$ = identité,

5) il existe une <u>homotopie</u> Φ telle que

$$\partial\Phi + \Phi\partial = \nabla f - 1 \ , \quad \Phi\nabla = 0 \ , \quad f\Phi = 0 \ ,$$

6) f , ∇ , et Φ sont naturelles.

<u>Preuve</u> : voir [2], p. 51, Theorem 2.1 ; et [1], p. 63-65. Posons $h = \nabla f$; alors $\Phi_{q+1} = -\Phi'_q + h'_q s_0$, et $\Phi_0 = 0$. Expliquons les notations Φ'_q et h'_q .

Un opérateur $\beta : K_q \to K_p$ est appelé <u>monotone</u> si $\beta = s_{i_r} \ldots s_{i_1} \partial_{j_r} \ldots \ldots \partial_{j_1}$, où $p > i_r . \ldots > i_1 \geqslant 0$, et $0 \leqslant j_t < \ldots < j_1 \leqslant q$. Nous définissons β' par $\beta' = s_{i_r+1} \ldots s_{i_1+1} \partial_{j_r+1} \ldots \partial_{j_1+1}$. Donc $\beta' : K_{q+1} \to K_{p+1}$. Maintenant, puisque tout opérateur naturel β est une combinaison linéaire d'opérateurs monotones, nous avons défini β' pour n'importe quel opérateur naturel β .

2.- <u>Constructions</u>.

<u>Définition</u> : Etant donné un complexe d'anneaux R , on dit qu'un complexe U est un <u>R-module</u> (à gauche) si on s'est donné une application de $R\times U$ dans U telle que

1) $1_q . u_q = u_q$, et

2) $(r_q . r'_q) . u_q = r_q . (r'_q . u_q)$,

où nous noterons $r_q . u_q$ l'image de $r_q \times u_q$. Nous disons que U est augmenté si R est augmenté, et si on s'est donné une application $\varepsilon : U \to \tilde{\Lambda}$ telle que $\varepsilon(r.u) = \varepsilon(r).\varepsilon(u)$.

Si R , R' sont des complexes d'anneaux, si U est un module sur R , U' un module sur R' , et si $f : R \to R'$ est une application, nous disons que l'application $g : U \to U'$ est <u>compatible avec</u> <u>f</u> si le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R\times U & \xrightarrow{f\times g} & R'\times U' \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{g} & U' \end{array}$$

est commutatif.

<u>Définition</u> : Nous disons que $(R,\bar{U},U)$ est <u>une construction</u> si

1) R est un complexe d'anneaux,

2) $\bar{U}$ est un Λ-module gradué,

3) U est un R-module augmenté tel que $U_q = R_q \otimes \bar{U}_q$ comme R_q-module,

4) $s_i(1_q \otimes \bar{U}_q) \subset 1_{q+1} \otimes \bar{U}_{q+1}$.

Nous nommerons $\hat{R}$ le noyau de $\varepsilon : R \to \tilde{\Lambda}$. Maintenant, $\hat{R}\times U$ est un sous-complexe de U , et $\bar{U}$ est isomorphe à $U/\hat{R}\times U$ d'une manière naturelle. Ainsi nous considérons $\bar{U}$ comme un complexe augmenté.

<u>Définition</u> : Nous disons qu'une construction $(R,\bar{U},U)$ est un <u>produit cartésien tordu</u> si $\partial_i(1_{q+1}\times\bar{U}_{q+1}) \subset 1_q\times\bar{U}_q$ pour $i > 0$. Nous noterons que dans ce cas notre isomorphisme de Λ-modules entre U et $R\times\bar{U}$ est compatible avec tous les opérateurs ∂_i et s_i , sauf ∂_0 .

Nous disons qu'une construction $(R,\bar{U},U)$ <u>satisfait à la condition</u> (W) ,si

1) elle est un produit cartésien tordu,

2) $\partial_0 : 1_{q+1}\times\bar{U}_{q+1} \to U_q$ est un isomorphisme,

3) $\varepsilon : \bar{U}_0 \to \Lambda$ est isomorphisme.

<u>Théorème 2.- Si</u> $(R,\bar{U},U)$ <u>est un produit cartésien tordu</u>, $(R',\bar{U}',U')$ <u>une construction satisfaisant à la condition</u> (W), <u>et si</u> $f : R \to R'$ <u>est une application, il existe une application</u> $g : U \to U'$ <u>telle que</u>

1) g soit compatible avec f ,

2) $g(1_q\times\bar{U}_q) \subset 1_q\times\bar{U}'_q$,

3) $\varepsilon g = \varepsilon$.

<u>De plus, une telle application</u> g <u>est unique</u>.

<u>Preuve</u> : Supposons que nous ayons une telle application g . Appelons g_q l'application induite de U_q dans U'_q . Donc $g_0(1\times y) = \varepsilon(y)$ puisque $U'_0 = \Lambda$ et $\varepsilon g = g\varepsilon$. Notons $S : U_q \to 1_{q+1}\times\overline{U_{q+1}}$ l'inverse de ∂_0 . Puisque $g : 1_q\times\bar{U}_q \to 1_q\times\bar{U}'_q$, on a $g_{q+1}(1_{q+1}\times y) = S\partial_0 g_{q+1}(1\times y) = Sg_q\partial_0(1\times y)$. Par conséquent il existe au plus une application telle que g ; mais les formules ci-dessus nous ont défini un homomorphisme g de Λ-modules tel que $\varepsilon g = g\varepsilon$ et $\partial_0 g = g\partial_0$. Il nous reste à vérifier que $\partial_{i+1}g = g\partial_{i+1}$ et que $s_i g = gs_i$.

Si $y \in U_1$, nous observons que $\partial_1 g(1\times y) = \partial_1 Sg\partial_0(1\times y) = \varepsilon\, g\partial_0(1\times y)$, puisque $(R',\bar{U}',U')$ satisfait à la condition (W), et de plus $\varepsilon g\partial_0(1\times y) = g\,\varepsilon\,\partial_0(1\times y) = g\,\varepsilon\,\partial_1(1\times y)$. Faisons maintenant l'hypothèse de récurrence : $\partial_i g = g\partial_i$ pour $i \leqslant j$. Donc $\partial_{j+1}g(1\times y) = \partial_{j+1}Sg\partial_0(1\times y) = S\partial_j g\partial_0(1\times y) = g(1\times\partial_{j+1}y)$, où $y \in U_{q+2}$.

Maintenant, nous observons que $S : 1_q\times\bar{U}_q \to 1_{q+1}\times\bar{U}'_{q+1}$ est un monomorphisme ; mais puisque $\partial_0 s_0 =$ identité , S n'est pas autre chose que s_0 . Donc $s_0 Sg\partial_0(1\times y) = SSg\partial_0(1\times y) = Sg(1\times y) = Sg\partial_0 s_0(1\times y) = gs_0(1\times y)$.

Enfin $s_{i+1}Sg\partial_0(1\times y) = Ss_i g\partial_0(1\times y) = Sgs_i\partial_0(1\times y)$ par l'hypothèse de récurrence, et $Sgs_i\partial_0(1\times y) = Sg\partial_0 s_{i+1}(1\times y) = gs_{i+1}(1\times y)$. Maintenant la preuve est complète.

Notons que dans la démonstration précédente nous avons prouvé ceci : dans une construction $(R,\bar{U},U)$ satisfaisant à la condition (W), si u est un cycle d'augmentation nulle de U_N , il est le bord d'un élément unique de l'image de $\tilde{\Lambda}\times\bar{U}_N$ dans U_N .

<u>Corollaire</u> : Si $(R,\bar{U},U)$ et $(R,\bar{W},W)$ sont des constructions satisfaisant à la condition (W), et si $f : U \to W$ et $g : W \to U$ sont les applications du théorème précédent, compatibles avec l'identité de R , alors gf et fg sont les applications identiques de U et W . Autrement dit, R étant donné, il existe <u>au plus une</u> construction $(R,\bar{U},U)$ satisfaisant à la condition (W), à un isomorphisme près.

Pour prouver l'<u>existence</u> d'une telle construction, nous allons suivre exactement l'exposé de MacLane [3].

<u>Définition</u> : Soit R un complexe d'anneaux, augmenté. Posons $W_0 = R_0$, $W_{q+1} = R_{q+1}\otimes W_q$, $\bar{W}_0 = \Lambda$, et $\bar{W}_{q+1} = R_q \otimes \bar{W}_q$. Maintenant dans $W(R) = \sum_{q\geqslant 0} W_q$, nous définissons

1) $\partial_0(r_1\otimes r_0) = \partial_0 r_1 . r_0$, $\partial_1(r_1\otimes r_0) = \partial_1 r_1 . \varepsilon(r_0)$ où $r_i \in R_i$, et pour $q > 0$,

2) $\partial_0(r_{q+1}\otimes w_q) = \partial_0 r_{q+1} . w_q$,

3) $\partial_{i+1}(r_{q+1}\otimes w_q) = \partial_{i+1}r_{q+1}\otimes\partial_i w_q$,

4) $s_0(r_{q+1}\otimes w_q) = s_0 r_{q+1}\otimes(1_{q+1}\otimes w_q)$,

5) $s_{i+1}(r_{q+1} \otimes w_q) = s_{i+1}r_{q+1} \otimes s_i w_q$, et

6) $\varepsilon(r_{q+1} \otimes w_q) = \varepsilon(r_{q+1}).\varepsilon(w_q)$.

On désignera $\sum_{q \geqslant 0} \overline{W}_q$ par $\overline{W}(R)$.

Théorème 3.- $(R, \overline{W}(R), W(R))$ est une construction satisfaisant à la condition (W).

Preuve : Il est clair que $\partial_0 : 1 \times \overline{W}_{q+1} \to W_q$ est un isomorphisme. Nous laissons au lecteur le soin de voir que les autres conditions sont remplies.

Notons que ce qui est appelé $\overline{W}(R)$ ici et dans [3], est appelé $W(R)$ dans [1] et [2].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. EILENBERG et S. MacLANE - On the groups $H(\pi,n)$, I, Ann. of Math., vol. 58, 1953, p. 55-106.

[2] S. EILENBERG et S. MacLANE - On the groups $H(\pi,n)$, II, Ann. of Math., vol. 60, 1954, p. 49-139.

[3] S. MacLANE - Constructions Simpliciales Acycliques, Colloque Henri Poincaré, Paris 1954.
