Séminaire Henri Cartan

J. C. Moore

Le théorème de Freudenthal, la suite exacte de James et l'invariant de Hopf généralisé

Séminaire Henri Cartan, tome 7, n° 2 (1954-1955), exp. n° 22, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_2_A12_0>

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LE THEORÈME DE FREUDENTHAL, LA SUITE EXACTE DE JAMES ET L'INVARIANT DE HOPF GÉNÉRALISÉ.

(Exposé de J.C. MOORE, 6.6.1955)

1.- Définition diverses.

Dans tout ce qui suit, chaque espace considéré sera muni d'un point-base (qu'on ne mentionnera pas toujours) ; si on considère un couple (X , Y) formé d'un espace X et d'un sous-espace Y , il sera sous-entendu que le point-base appartient à Y . Etant donnés des espaces X_i , on notera $\bigvee_i X_i$ le quotient de l'espace-somme $\bigcup_i X_i$ par la relation d'équivalence obtenue en identifiant les points-base des X_i .

Soit X un espace. On note $E(X)$ l'espace des chemins de X commençant au point-base ; on note $\Omega(X)$ l'espace des lacets de X commençant (et finissant) au point-base. L'élément neutre de $\Omega(X)$ sera le lacet réduit au point-base. On rappelle que l'espace $E(X)$ est contractile, et que, si X est connexe par arcs, l'application $p : E(X) \longrightarrow X$ (qui associe à tout chemin son extrémité) fait de $E(X)$ un espace fibré (au sens de Serre) de base X et de fibre $\Omega(X)$.

Pour tout espace X, on note $\pi_q(X)$ le q-ième groupe d'homotopie de X (basé au point-base de X). On note S_n la sphère de dimension n.

Suspension : notons I le segment $[0,1]$ de la droite numérique. Pour tout espace X, soit $s(X)$ l'espace-quotient de $X \times I$ par la relation d'équivalence suivante :

$(x, 0) \sim (x', 0)$, et $(x, 1) \sim (x', 1)$ pour x et $x' \in X$;

$(x_0, t) \sim (x_0, 0)$ si $x_0 \in X$ est le point-base, quel que soit $t \in I$. L'espace $s(X)$, muni du point-base, image de $(x_0, 0)$ par l'application naturelle $\eta : X \times I \longrightarrow s(X)$, s'appelle la suspension de X. Il est clair que $s(X)$ est connexe ; si X est connexe, alors $s(X)$ est simplement connexe.

Soit X un espace tel qu'il existe une fonction λ continue sur X, à valeurs réelles ≥ 0, nulle au point-base x_0, et > 0 ailleurs. Une telle fonction λ définit une application continue $i : X \longrightarrow \Omega(s(X))$ comme suit : au point $x \in X$ elle associe le chemin de $s(X)$, qui consiste en une application continue $i(x)$ du segment $[0, \lambda(x)]$ dans $s(X)$, à savoir :

1) si $x=x_0$, le segment ponctuel $[0, \lambda(x_0)]$ est envoyé au point-base de $s(X)$;

2) si $x \neq x_0$, et $0 \leq t \leq \lambda(x)$, l'application $i(x)$ envoie t dans $\eta(x, t/\lambda(x))$.

Remarque : l'application i ne dépend pas (à une homotopie près) du choix de λ. Si λ n'existait pas, on remplacerait X par l'espace X', quotient de la réunion $X \cup I$, obtenu en identifiant le point-base de X et l'extrémité 1 de I ; l'image de $0 \in I$ dans X' est prise pour point-base de X', et on définit $\lambda(t) = t$ pour $t \in I$, $\lambda(x) = 1$ pour $x \in X$. L'espace X' est un rétracte de déformation de X.

Définition de l'homomorphisme de suspension, et de l'invariant de Hopf généralisé : l'homomorphisme de suspension

$$E : \pi_q(X) \longrightarrow \pi_q(\Omega(s(X)))$$

est, par définition, induit par le plongement $i : X \longrightarrow \Omega(s(x))$.

L'invariant de Hopf généralisé est

$$H : \pi_q(\Omega(s(X))) \longrightarrow \pi_q(\Omega(s(X)) , X) ,$$

où le dernier groupe est un groupe d'homotopie relatif.

Observons que, puisque $E(s(X))$ est contractile, on a,

$$\pi_q(\Omega(s(X))) \approx \pi_{q+1}(s(X)) ,$$

de sorte que E s'interprète comme un homomorphisme $\pi_q(X) \longrightarrow \pi_{q+1}(s(X))$. Dans le cas particulier important où $X = S_n$, on a $s(X) = S_{n+1}$, et on retrouve la suspension de Freudenthal (définie initialement [1] par une autre méthode). Dans le cas plus particulier où $q = 2n$, l'application

$$H : \pi_{2n}(\Omega(S_{n+1})) \longrightarrow \pi_{2n}(\Omega(S_{n+1}) , S_n)$$

sera étudiée plus loin ; c'est l'homomorphisme de Hopf, introduit [2] sous une forme quelque peu différente. L'homomorphisme de Hopf a été généralisé tout d'abord par G.W. Whitehead ([3] et [4]).

Les applications E et H se placent dans la suite exacte d'homotopie

$$\cdots \longrightarrow \pi_{q+1}(X) \xrightarrow{E} \pi_{q+1}(\Omega(s(X))) \xrightarrow{H} \pi_{q+1}(\Omega(s(X)),X) \xrightarrow{\partial^{\#}} \pi_q(X) \longrightarrow \cdots$$

Soient $\alpha \in \pi_p(X)$ et $\beta \in \pi_q(X)$. A côté du produit de Whitehead $[\alpha , \beta] \in \pi_{p+q-1}(X)$ (cf. Exposé 20, paragraphe 1), on va définir un élément $[\alpha , \beta]' \in \pi_{p+q}(\Omega(s(X)),X)$ comme suit :

Soient $f : S_p \longrightarrow X$ et $g : S_q \longrightarrow X$ des applications dans les classes de α et de β. Définissons $h : S_p \times S_q \longrightarrow \Omega(s(X))$ par

$h(x,y) = (if(x)).(ig(y))$ (multiplication dans l'espace des lacets). Alors h envoie $S_p \vee S_q$ dans X ; en effet, si x_o est le point-base de S_p, on a $if(x_o) = e$, donc $h(x_o,y) = ig(y)$; de même, si y_o est le point-base de S_q, on a $h(x,y_o) = if(x)$. Ainsi h définit une application, encore notée $h : (S_p \times S_q , S_p \vee S_q) \longrightarrow (\Omega(s(X)),X)$. Les sphères S_p et S_q étant supposées orientées, le groupe $\pi_{p+q}(S_p \times S_q, S_p \vee S_q)$ possède un élément générateur, dont l'image par h est l'élément cherché $[\alpha , \beta]'$ de $\pi_{p+q}(\Omega(s(X)),X)$.

On va maintenant définir, pour $\alpha \in \pi_p(\Omega(X))$ et $\beta \in \pi_q(\Omega(X))$, un élément $\{\alpha , \beta\} \in \pi_{p+q}(\Omega(X))$. Soient $f : S_p \longrightarrow \Omega(X)$ et $g : S_q \longrightarrow \Omega(X)$ des applications dans les classes de α et β. Soit

$h : S_p \times S_q \longrightarrow \Omega(X)$ définie par

$h(x,y) = f(x)g(y)\overline{f(x)}\,\overline{g(y)}$ (rappelons que $u \longrightarrow \bar{u}$ désigne l'involution canonique de l'espace des lacets, qui à chaque lacet associe le même lacet parcouru en sens inverse). Alors h applique $S_p \vee S_q$ dans le sous-espace $\Omega_o(X)$ de $\Omega(X)$, formé des produits de la forme $u\bar{u}$; $\Omega_o(X)$ est contractile. Ainsi h définit

$$\pi_{p+q}(S_p \times S_q\ ,\ S_p \vee S_q) \longrightarrow \pi_{p+q}(\Omega(X)\ ,\Omega_o(X)) \approx \pi_{p+q}(\Omega(X))$$

pour $p+q > 0$. Alors $\{\alpha,\beta\}$ est, par définition, l'image, dans $\pi_{p+q}(\Omega(X))$, de l'élément générateur de $\pi_{p+q}(S_p \times S_q\ ,\ S_p \vee S_q)$. Si $p = q = 0$, on définit $\{\alpha,\beta\}$ comme le <u>commutateur</u> de α et β.

Enfin, pour $\alpha \in H_p(\Omega(X))$ et $\beta \in H_q(\Omega(X))$, on notera $\alpha.\beta$ le <u>produit de Pontrjagin</u>, élément de $H_{p+q}(\Omega(X))$ défini par la multiplication dans l'espace $\Omega(X)$.

2.- <u>Théorèmes de Freudenthal, de Bott et Samelson, de G. Whitehead.</u>

On utilise les notations suivantes : $\varphi : \pi_q(X) \longrightarrow H_q(X)$ désigne l'homomorphisme naturel du groupe d'homotopie dans le groupe d'homologie ; même notation $\varphi : \pi_q(X,A) \longrightarrow H_q(X,A)$ pour l'homotopie et l'homologie relatives. D'autre part, S désignera l'homomorphisme de suspension en homologie $H_q(\Omega(X)) \longrightarrow H_{q+1}(X)$ (considérer l'espace fibré contractile $E(X)$), et également l'isomorphisme $\pi_q(\Omega(X)) \approx \pi_{q+1}(X)$, inverse de l'homomorphisme $\partial^{\#}$ de la suite exacte d'homotopie de l'espace fibré $E(X)$.

<u>Proposition 1</u>.- Soit X un espace connexe par arcs, et soient $\alpha \in \pi_p(\Omega(X))$, $\beta \in \pi_q(\Omega(X))$. On a

(1) $\quad S\{\alpha,\beta\} = (-1)^p\,[S\alpha, S\beta]$,

(2) $\quad \varphi\{\alpha,\beta\} = \varphi(\alpha).\varphi(\beta) - (-1)^{pq}\varphi(\beta).\varphi(\alpha)$ si $p+q > 0$,

(2') $\quad \varphi\{\alpha,\beta\} = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\alpha)^{-1}\varphi(\beta)^{-1}$ si $p = q = 0$.

<u>Proposition 2</u>.- Soit X un espace connexe par arcs, et soient $\alpha \in \pi_p(X)$, $\beta \in \pi_q(X)$. On a

(3) $\quad \varphi[\alpha,\beta]' = H(\varphi(E\alpha).\varphi(E\beta))$, où H désigne

$$H_{p+q}(\Omega(s(X))) \longrightarrow H_{p+q}(\Omega(s(X)),X) ;$$

(4) $\quad \partial^{\#}[\alpha,\beta]' = [\alpha,\beta]$, où $\partial^{\#}$ désigne $\pi_{p+q}(\Omega(s(X)),X) \longrightarrow \pi_{p+q-1}(X)$;

(5) $$H\{E\alpha, E\beta\} = [\alpha, \beta]' - (-1)^{pq}[\beta, \alpha]' .$$

Les démonstrations suivent directement des définitions et sont laissées au lecteur.

Théorème 1 : Soit X un espace connexe par arcs, tel que $\pi_q(X) = 0$ pour $q < n$ (et $\pi_1(X)$ abélien si $n = 1$). Alors :

1) $\pi_q(\Omega(s(X)),X) = 0$ pour $q < 2n$;

2) l'application $\alpha \otimes \beta \longrightarrow [\alpha, \beta]'$ de $\pi_n(X) \otimes \pi_n(X)$ dans $\pi_{2n}(\Omega(s(X)),X)$ est un isomorphisme.

Démonstration : l'espace des chemins $E(s(X))$ a une suite spectrale dont le terme E^2 est $H(s(X) ; H(\Omega(s(X))))$ (homologie de $s(X)$ à coefficients dans l'homologie de $\Omega(s(X))$) , et le terme E^{∞} est 0 . Les coefficients sont simples, puisque $s(X)$ est simplement connexe. De plus, l'homomorphisme composé $H_q(X) \xrightarrow{E} H_q(\Omega(s(X))) \xrightarrow{S} H_{q+1}(s(X))$ est un isomorphisme pour $q > 0$ (cf. théorème 3 ci-dessous). Comme S est un isomorphisme pour $q < 2n$, il s'ensuit que $E : H_q(X) \longrightarrow H_q(\Omega(s(X)))$ est un isomorphisme pour $q < 2n$. De plus, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_{2n}(X) \arrow[r, "E"] \arrow[dr, "\approx"'] & H_{2n}(\Omega(s(X))) \arrow[r, "H"] \arrow[d, "S"] & H_{2n}(\Omega(s(X)),X) \arrow[r] & 0 \\ & & H_{2n+1}(s(X)) & & \end{tikzcd}$$

dont la première ligne est exacte, et on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow H_n(\Omega(s(X))) \otimes H_n(\Omega(s(X))) \longrightarrow H_{2n}(\Omega(s(X))) \xrightarrow{S} H_{2n+1}(s(X)) \longrightarrow 0 .$$

On en déduit que H induit un isomorphisme $H_n(\Omega(s(X))) \otimes H_n(\Omega(s(X))) \approx H_{2n}(\Omega(s(X)),X)$. Cela étant, l'assertion 1) de l'énoncé résulte du fait que $H_q(\Omega(s(X)),X) = 0$ pour $q < 2n$; et l'assertion 2) résulte de la formule (3) (prop. 2) et des isomorphismes

$\pi_n(X) \approx H_n(X)$ et $\pi_{2n}(\Omega(s(X)),X) \approx H_{2n}(\Omega(s(X)),X)$ des premiers groupes d'homotopie (resp. d'homologie) non nuls.

Corollaire du théorème 1 ("théorème de Freudenthal") : soit X connexe par arcs, tel que $\pi_q(X) = 0$ pour $q < n$ (et $\pi_1(X)$ abélien si $n = 1$). Alors :

1) la suspension $E : \pi_q(X) \longrightarrow \pi_q(\Omega(s(X)))$ est un isomorphisme pour $q < 2n-1$;

2) la suite

$$\pi_n(X) \otimes \pi_n(X) \xrightarrow{W} \pi_{2n-1}(X) \xrightarrow{E} \pi_{2n-1}(\Omega(s(X))) \longrightarrow 0$$

est exacte, W désignant l'application définie par le produit de Whitehead.

Cela résulte aussitôt du théorème 1 et de la formule (4) (prop. 2).

Théorème 2 (Samelson-Bott) : Soit X un espace connexe et simplement connexe, et soit Λ un anneau commutatif avec élément unité jouissant des propriétés suivantes : $H_{q+1}(X;\Lambda)$ est un Λ-module libre pour tout $q \geqslant 0$ (nécessairement nul pour $q = 0$), et

$$S : H_q(\Omega(X);\Lambda) \longrightarrow H_{q+1}(X;\Lambda)$$

est un épimorphisme pour tout $q \geqslant 0$. Alors l'algèbre d'homologie $H_*(\Omega(X);\Lambda)$ est canoniquement isomorphe à l'algèbre tensorielle $T(A)$, A désignant le Λ-module gradué tel que $A_q = H_{q+1}(X;\Lambda)$ pour $q \geqslant 0$ (donc $A_0 = 0$).

(Cas particulier : X est une sphère de dimension $n \geq 2$, Λ étant quelconque).

Démonstration : soit $C_N\Omega(X)$ le groupe des chaînes singulières normalisées de l'espace $\Omega(X)$ (à coefficients entiers). Puisque A possède une Λ-base homogène, il existe une application Λ-linéaire

$$f : A \longrightarrow Z(C_N\Omega(X) \otimes \Lambda)$$

telle que l'application composée

$$A \xrightarrow{f} Z(C_N\Omega(X) \otimes \Lambda) \longrightarrow H(\Omega(X);\Lambda) \xrightarrow{S} H(X;\Lambda)$$

soit l'application identique (qui envoie A_q sur $H_{q+1}(X;\Lambda)$). Comme $Z(C_N\Omega(X) \otimes \Lambda)$ est une algèbre associative, f se prolonge en une application multiplicative $f : T(A) \longrightarrow C_N\Omega(X) \otimes \Lambda$, qui est un DGA-homomorphisme.

Or considérons la construction $(T(A), H(X), T(A) \otimes H(X))$, où l'opérateur différentiel de $T(A) \otimes H(X)$ est défini par l'homomorphisme $d : H(X) \longrightarrow A$ qui abaisse le degré de 1. Il est immédiat que c'est une construction acyclique, et que le terme E^2 de la suite spectrale est $T(A) \otimes H(X)$. De plus, f possède une extension naturelle en un homomorphisme de cette construction dans la construction

$$(C_N\Omega(X) \otimes \Lambda\ ,\ \overline{W}(C_N\Omega(X) \otimes \Lambda)\ ,\ W(C_N\Omega(X) \otimes \Lambda))\ .$$

Mais en vertu de l'appendice à l'Exposé 19 (th. 7), on a un isomorphisme

$H(\bar{W}(C_N\Omega(X) \otimes \Lambda)) \approx H(X ; \Lambda)$. Alors le théorème 1 de l'Exposé 13 donne un isomorphisme $H(\Omega(X) ; \Lambda) \approx T(A)$.

<u>Corollaire du théorème 2 : soit</u> X <u>un espace connexe, et soit</u> Λ <u>un anneau commutatif (avec élément unité) tel que</u> $H_q(X ; \Lambda)$ <u>soit un</u> Λ<u>-module libre pour tout</u> $q \geqslant 0$. <u>Alors on a un isomorphisme naturel de l'algèbre d'homologie</u> $H_*(\Omega(s(X)) ; \Lambda)$ <u>avec l'algèbre tensorielle</u> $T(\sum_{q>0} H_q(X ; \Lambda))$.

En effet, $SE : H_q(X) \longrightarrow H_{q+1}(s(X))$ est un isomorphisme pour $q > 0$, ce qui permet d'appliquer le théorème 2 à l'espace $s(X)$. La naturalité de l'isomorphisme de l'énoncé est due à ce que cet isomorphisme provient de l'application naturelle $E : H_q(X ; \Lambda) \longrightarrow H_q(\Omega(s(X)) ; \Lambda)$.

<u>Théorème 3</u> : <u>Si</u> X <u>est un espace connexe,</u> $H_n(\Omega(s(X)))$ <u>est isomorphe à la somme directe de</u> $\sum_{\substack{r+s=n \\ r>0}} H_r(X) \otimes H_s(\Omega(s(X)))$ <u>et de</u> $\sum_{r+s=n-1} \mathrm{Tor}(H_r(X) , H_s(\Omega(s(X))))$; on a supposé $n \geq 1$.

<u>Démonstration</u> : pour $n \geqslant 1$, on a

$$H_n(\Omega(s(X))) \approx H_{n+1}(E(s(X)) , \Omega(s(X))) .$$

Soit I_+ le segment $1/2 \leqslant t \leqslant 1$, et I_- le segment $0 \leqslant t \leqslant 1/2$; soit $s_+(X) = \eta(X \times I_+)$, $s_-(X) = \eta(X \times I_-)$. Alors $s(X) = s_+(X) \cup s_-(X)$, et l'intersection $s_+(X) \cap s_-(X)$ est naturellement homéomorphe à X . Comme $s_+(X)$ et $s_-(X)$ sont contractiles, on a

$$H_{n+1}(E(s(X)) , \Omega(s(X))) \approx H_{n+1}(E(s(X)) , p^{-1}(s_+(X))) ,$$

en notant p la projection canonique $E(s(X)) \longrightarrow s(X)$. Par l'isomorphisme d'excision, ceci est isomorphe à $H_{n+1}(p^{-1}(s_-(X)),p^{-1}(s_+(X) \cap s_-(X)))$. En se servant d'une contraction de $s_-(X)$, on peut trouver une application $\lambda : s_-(X) \longrightarrow p^{-1}(s_-(X))$ telle que $p\lambda$ soit l'identité ; alors l'application $(x,f) \longrightarrow \lambda(x).f$ de $s_-(X) \times \Omega(s(X))$ dans $p^{-1}(s_-(X))$ définit un isomorphisme des groupes d'homotopie de $(s_-(X),s_+(X) \cap s_-(X)) \times \Omega(s(X))$ sur ceux de $(p^{-1}(s_-(X)) , p^{-1}(s_+(X) \cap s_-(X)))$. Finalement, on obtient un isomorphisme

$$H_n(\Omega(s(X))) \approx H_{n+1}((s_-(X) , s_+(X) \cap s_-(X)) \times \Omega(s(X))) .$$

Le groupe d'homologie du second membre se calcule par la formule de

Künneth. On observe alors que $H_r(s_-(X), s_+(X) \cap s_-(X)) = 0$ pour $r \leq 1$, et que, pour $r \geq 2$,

$$H_r(s_-(X), s_+(X) \cap s_-(X)) \approx H_{r-1}(s_+(X) \cap s_-(X)) = H_{r-1}(X) ,$$

d'où le théorème.

La démonstration précédente est due à G.W. Whitehead [4], bien qu'elle n'ait été formulée que dans le cas où X est la sphère S_n.

3.- La suite exacte de James.

Reprenons la suite exacte d'homotopie du couple $(\Omega(s(X)), X)$ dans le cas où X est la sphère S_n :

$$\ldots \longrightarrow \pi_q(S_n) \xrightarrow{E} \pi_{q+1}(S_{n+1}) \xrightarrow{H} \pi_q(\Omega(S_{n+1}), S_n) \xrightarrow{\partial^{\#}} \pi_{q-1}(S_n) \longrightarrow \ldots$$

On se propose d'interpréter les groupes d'homotopie relatifs $\pi_q(\Omega(S_{n+1}), S_n)$. D'après le théorème 1 et son corollaire, on a

$$\pi_q(\Omega(S_{n+1}), S_n) = 0 \quad \text{pour} \quad q < 2n ,$$

$$\pi_{2n}(\Omega(S_{n+1}), S_n) = Z .$$

Or on a $\pi_q(\Omega(S_{2n+1})) = 0$ pour $q < 2n$, et $\pi_{2n}(\Omega(S_{2n+1})) = Z$.

<u>Lemme</u> : il existe un espace Y contenant S_n ; une application $g : Y \longrightarrow \Omega(S_{n+1})$ prolongeant l'application canonique $i : S_n \longrightarrow \Omega(S_{n+1})$ et telle que $g^{\#} : \pi_q(Y) \longrightarrow \pi_q(\Omega(S_{n+1}))$ soit un isomorphisme pour tout q ; et une application $f : Y \longrightarrow \Omega(S_{2n+1})$, qui envoie S_n dans l'élément neutre e de $\Omega(S_{2n+1})$, et est telle que $f^{\#} : \pi_{2n}(Y, S_n) \longrightarrow \pi_{2n}(\Omega(S_{2n+1}))$ soit un isomorphisme.

Admettons ce lemme (pour sa démonstration, voir l'Appendice). On va en déduire d'importantes conséquences.

<u>Théorème 4</u> (James) : <u>Soit</u> n <u>impair. Si</u> f <u>désigne l'application du lemme, alors</u> $f^{\#} : \pi_q(Y, S_n) \longrightarrow \pi_q(\Omega(S_{2n+1}))$ <u>est un isomorphisme pour tout</u> q.

<u>Commentaire</u> : on a donc des isomorphismes (canoniques)

$$\pi_q(\Omega(S_{n+1}), S_n) \approx \pi_q(\Omega(S_{2n+1})) ,$$

c'est-à-dire $\pi_q(\Omega(S_{n+1}), S_n) \approx \pi_{q+1}(S_{2n+1})$.

D'où la <u>suite exacte de James</u> (pour n <u>impair</u>) :

$$(6) \quad \ldots \longrightarrow \pi_q(S_n) \xrightarrow{E} \pi_{q+1}(S_{n+1}) \xrightarrow{H} \pi_{q+1}(S_{2n+1}) \xrightarrow{\partial^{\#}} \pi_{q-1}(S_n) \longrightarrow \ldots$$

<u>Démonstration du théorème 4</u> : La cohomologie (à coefficients entiers) $H_*(Y)$ est celle de l'espace des lacets $H^*(\Omega(S_{n+1}))$. Or Serre a établi (dans sa Thèse) que $H^*(\Omega(S_{n+1}))$ est isomorphe à l'algèbre universelle $U(M)$ d'un Z-module gradué M (cf. Exposé 8, paragraphe 4), où M est donné comme suit :

- si n est pair, $M_q = 0$ pour $q \neq n$, et $M_n = Z$;
- si n est impair, $M_q = 0$ pour $q \neq n$ et $\neq 2n$, $M_n = Z$, $M_{2n} = Z$.

Dans le cas qui nous occupe, n est impair, donc $U(M)$ est le produit tensoriel d'une algèbre extérieure (à un générateur de degré impair n), et d'une "algèbre de polynômes divisée" (à un générateur de degré pair $2n$). On peut donc écrire

$$H^*(Y) = H^*(S_n) \otimes H^*(\Omega(S_{2n+1})) ,$$

et l'application $f^* : H^*(\Omega(S_{2n+1})) \longrightarrow H^*(Y)$ définie par l'application f du lemme est l'application $u \longrightarrow 1 \otimes u$.

On peut maintenant supposer que f est réalisée par une application fibrée $X \longrightarrow \Omega(S_{2n+1})$ dont la fibre F contient S_n (l'espace X ayant même type d'homotopie que Y, donc que $\Omega(S_{n+1})$). Le terme E^2 de la suite spectrale de cohomologie est alors $H^*(F) \otimes H^*(\Omega(S_{2n+1}))$. On en déduit $H^n(F) \approx H^n(S_n)$ et $H^q(F) = 0$ pour $0 < q < n$. Donc

$$E_2^{p,o} = E_\infty^{p,o} ,\ E_2^{p,n} = E_\infty^{p,n} ,\ \text{et}\ E_2^{r,s} = 0 \ \text{pour}\ s \neq 0 \ \text{et}\ \neq n .$$ Ainsi $H^q(F) \approx H^q(S_n)$ pour tout q, et on a par suite

$$\pi_q(\Omega(S_{2n+1})) \approx \pi_q(X,F) \approx \pi_q(X,S_n) \approx \pi_q(\Omega(S_{n+1}),S_n)$$

pour tout q ; d'où le théorème.

<u>Théorème 5</u> (James) : <u>Soit</u> n <u>pair. Si</u> f <u>désigne l'application du lemme, alors</u> $f^{\#} : \pi_q(Y,S_n) \longrightarrow \pi_q(\Omega(S_{2n+1}))$ <u>a pour noyau et conoyau des groupes finis d'ordre impair, et cela pour tout</u> q.

(Autrement dit, $f^{\#}$ est un C-<u>isomorphisme</u>, C désignant la classe des groupes finis d'ordre impair).

<u>Commentaire</u> : les groupes $\pi_q(\Omega(S_{n+1}),S_n)$ et $\pi_{q+1}(S_{2n+1})$ sont donc C-isomorphes pour n pair. Donc <u>la suite (6) est définie et exacte si on néglige les composantes</u> p-<u>primaires pour tous les</u> p <u>premiers impairs</u>.

<u>Démonstration du théorème 5</u> : $H^*(Y)$ possède une Z-base formée d'un

élément a_i dans chaque degré ni ; la multiplication est donnée par $a_i a_j = (i,j)\, a_{ij}$, où (i,j) désigne le coefficient binomial $\frac{(i+j)!}{i!j!}$. De même, $H^*(\Omega(S_{2n+1}))$ possède une Z-base formée d'un élément b_i dans chaque degré $2ni$, et la multiplication est donnée par $b_i b_j = (i,j)\, b_{ij}$. Pour l'application f du lemme, on a $f^*(b_1) = a_2$, d'où $f^*(b_i) = \frac{(2i)!}{i!\, 2^i}\, a_{2i}$. Le coefficient de a_{2i} , dans cette formule, est un entier impair. Alors le raisonnement de suite spectrale fait dans la démonstration du théorème 4 reste valable si on raisonne en cohomologie à coefficients dans Z_2 (corps des entiers modulo 2). Il en résulte que les groupes d'homologie relatifs $H_q(F,S_n)$ sont des groupes finis d'ordre impair ; il en est alors de même des groupes d'homotopie relatifs [11] . D'où le théorème.

4.- Le problème de l'invariant de Hopf.

Soit i_n le générateur de $\pi_n(S_n) \approx \pi_n(\Omega(S_{n+1}))$; alors $[i_n, i_n]'$ est un générateur de $\pi_{2n}(\Omega(S_{n+1}), S_n)$, d'après le théorème 1 .

Soit $f : S_{2n+1} \longrightarrow S_{n+1}$ une application ; considérons l'homomorphisme composé

$$\pi_{2n+1}(S_{2n+1}) \xrightarrow{f_\#} \pi_{2n+1}(S_{n+1}) \overset{S^{-1}}{\approx} \pi_{2n}(\Omega(S_{n+1})) \xrightarrow{H} \pi_{2n}(\Omega(S_{n+1}), S_n) .$$

L'image du générateur i_{2n+1} est de la forme $k\,[i_n, i_n]'$, où k est un entier bien déterminé ; k s'appelle l'invariant de Hopf de l'application $f : S_{2n+1} \longrightarrow S_{n+1}$. Pour que

$$H : \pi_{2n}(\Omega(S_{n+1})) \longrightarrow \pi_{2n}(\Omega(S_{n+1}), S_n)$$

soit un épimorphisme, il faut et il suffit qu'il existe une application $f : S_{2n+1} \longrightarrow S_{n+1}$ dont l'invariant de Hopf soit 1 .

Comme la suite

$$\pi_{2n}(\Omega(S_{n+1})) \xrightarrow{H} \pi_{2n}(\Omega(S_{n+1}), S_n) \xrightarrow{\partial_\#} \pi_{2n-1}(S_n)$$

est exacte, la relation (4) (prop. 2) montre : pour qu'il existe une application $S_{2n+1} \longrightarrow S_{n+1}$ d'invariant de Hopf égal à k , il faut et il suffit que $k\,[i_n, i_n] = 0$. Pour n impair, il existe donc une application d'invariant de Hopf égal à 2 .

Chaque application $f : S_{2n+1} \longrightarrow S_{n+1}$ définit un espace $X = S_{n+1} \cup_f e_{2n+2}$, obtenu en attachant une $(2n+2)$-cellule à S_{n+1} au moyen de l'application f du bord de cette cellule. Les seuls groupes de cohomologie

$\neq 0$ de X sont $H^o(X)$, $H^{n+1}(X)$ et $H^{2n+2}(X)$, tous isomorphes à Z . Le cup-carré du générateur de $H^{n+1}(X)$ est k fois le générateur de $H^{2n+2}(X)$, k désignant l'invariant de Hopf de l'application f . La condition d'existence d'une application d'invariant égal à 1 est celle d'une application telle que $Sq^{n+1} : H^{n+1}(X;Z_2) \longrightarrow H^{2n+2}(X;Z_2)$ soit un isomorphisme. D'après Adem [12] , ceci n'est possible que si $n+1$ est une puissance de 2 ; on sait que c'est effectivement possible si $n+1 = 2,4,8$ (classique), et que c'est impossible pour $n+1 = 16$ (Toda).

Sous cette forme, le problème peut être généralisé : on cherche s'il existe une application $f : S_{n+q} \longrightarrow S_{n+1}$ telle que, si X désigne l'espace $S_{n+1} \cup_f e_{n+q+1}$, l'application $St_p^q : H^{n+1}(X;Z_p) \longrightarrow H^{n+q+1}(X;Z_p)$ soit un isomorphisme. Bien entendu, ceci exige que q soit congru à 0 ou 1 mod.$(2p-2)$, p premier. On se bornera à envisager le cas où $q \equiv 0$ mod.$(2p-2)$. Grâce aux relations entre opérations de Steenrod itérées, on peut montrer que St_p^q ne peut être un isomorphisme que si q est de la forme $2p^r(p-1)$. Il est bien connu que c'est effectivement possible si $q = 2(p-1)$; d'après des résultats inédits de Cartan, c'est aussi possible pour $q = 2p(p-1)$.

Ce dernier problème peut être formulé autrement. S_{n-1} se plonge dans $\Omega(S_n)$, lequel se plonge à son tour dans $\Omega\Omega(S_{n+1}) = \Omega^2(S_{n+1})$. On a une suite exacte

$$\ldots \longrightarrow \pi_q(S_{n-1}) \longrightarrow \pi_q(\Omega^2(S_{n+1})) \xrightarrow{H^2} \pi_q(\Omega^2(S_{n+1}),S_{n-1}) \longrightarrow \pi_{q-1}(S_{n-1}) \ldots$$

Supposons que n soit pair ; alors $\pi_q(\Omega^2(S_{n+1}),S_{n-1})$ a une composante p-primaire qui est nulle si $q < pn-2$, et égale à Z_p si $q = pn-2$. Alors H^2 est un épimorphisme en dimension $pn-2$ si et seulement s'il existe une application $f : S_{pn} \longrightarrow S_{n+1}$ telle que, si X désigne l'espace $S_{n+1} \cup_f e_{pn+1}$, $St_p^{n(p-1)}$ soit un isomorphisme de $H^{n+1}(X;Z_p)$ sur $H^{pn+1}(X;Z_p)$.

Pour une autre formulation du problème, voir [10] .

APPENDICE.

Le but de cet Appendice est de démontrer le lemme du paragraphe 3 .

Soit G un groupe abélien, et n un entier > 0 ; on notera $Y(G,n)$ tout CW-complexe X tel que $\pi_q(X) = 0$ pour $q < n$, $\pi_n(X) = G$, et $H_q(X) = 0$ pour $q > n$. Il existe toujours un tel espace X , et son type d'homotopie est bien déterminé, compte tenu du fait que X est un CW-complexe (cf. [9]).

Proposition 3.- Soit X un espace topologique, et soit $\varphi : G \longrightarrow \pi_n(X)$ un homomorphisme (G : groupe abélien, n entier > 0) . Alors il existe un espace $Y(G,n)$ et une application $f : Y(G,n) \longrightarrow X$ telle que l'homomorphisme $\pi_n(Y(G,n)) \longrightarrow \pi_n(X)$ induit par f soit précisément φ .

Démonstration : soit $\{\alpha_j\}_{j \in J}$ un système de générateurs de G . Soit Y^o le "bouquet" de sphères obtenu en prenant la réunion de J exemplaires de S_n et en identifiant leurs points-base. Soit $f_j : S_n \longrightarrow X$ une application dans la classe de α_j , et soit $f^o : Y^o \longrightarrow X$ l'application déterminée par les f_j . Il existe un CW-complexe $Y(G,n)$, obtenu en attachant des $(n+1)$-cellules à Y^o ; alors f^o se prolonge en une application $f : Y(G,n) \longrightarrow X$ qui répond aux conditions de l'énoncé.

X désignant un espace topologique, on notera $\pi_n(X;G)$ l'ensemble des classes d'homotopie d'applications $f : Y(G,n) \longrightarrow X$ (avec point-base fixe). Si $n > 1$, on peut supposer que $Y(G,n)$ est une suspension ; donc $\pi_n(X;G)$ est un groupe pour $n > 1$, et ce groupe est abélien pour $n > 2$. Pour chaque $f : Y(G,n) \longrightarrow X$, on notera $[f]$ l'élément de $\pi_n(X;G)$ défini par f . Soit $\lambda : \pi_n(X;G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G, \pi_n(X))$ l'application naturelle.

Tout CW-complexe $Y(G,n)$ se plonge dans un CW-complexe contractile $Y^*(G,n)$. Soit alors (X,A) un couple formé d'un espace X et d'un sous-espace A ; on notera $\pi_{n+1}(X,A;G)$ l'ensemble des classes d'homotopie d'applications $f : (Y^*(G,n), Y(G,n)) \longrightarrow (X,A)$ (avec point-base fixe), et on notera encore $\lambda : \pi_{n+1}(X,A;G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G, \pi_{n+1}(X,A))$ l'application naturelle.

Proposition 4.- L'application $\lambda : \pi_{n+1}(X,A;G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G, \pi_{n+1}(X,A))$ est surjective $(n > 0)$.

Démonstration : écrivons G comme un quotient F/R , où F est abélien libre, et soit donné un homomorphisme $\varphi : G \longrightarrow \pi_{n+1}(X,A)$. Il existe une application $f_1 : (Y^*(F,n), Y(F,n)) \longrightarrow (X,A)$ telle que $\lambda[f_1] = \varphi \circ \xi$, où ξ désigne l'application naturelle $F \longrightarrow G$. En effet, on peut prendre pour $Y(F,n)$ un bouquet de sphères, et pour $Y^*(F,n)$ la réunion des cellules dont elles sont le bord, avec un point commun pour ces cellules. De plus, il existe $f_2 : (Y^*(R,n),Y(R,n)) \longrightarrow (Y^*(F,n),Y(F,n))$ telle que $\lambda[f_2]$ soit l'homomorphisme d'inclusion $R \longrightarrow F$, et que $f_1 f_2$ soit inessentielle ; et on peut supposer que f_2 est une application cellulaire d'inclusion. Soit $B' \subset Y^*(F,n)$, tel que B' soit homéomorphe à $Y^*(R,n)$ et $B' \cap Y^*(R,n) = B' \cap Y(F,n) = Y(R,n)$. Alors $B = Y(F,n) \cup B'$ est du type d'homotopie de $Y(G,n)$. Soit W un CW-complexe contractile contenant B' et tel que $W \cap Y^*(F,n) = Y^*(R,n)$; et soit $Y = Y^*(F,n) \cup W$. Alors Y est contractile, et f_1 peut être prolongée en une application $f : (Y,B) \longrightarrow (X,A)$, ce qui démontre la proposition.

Proposition 5.- Soient X et Y deux espaces connexes (par arcs), et soit $f : X \longrightarrow Y$ une application telle que l'homomorphisme $\pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$ défini par f soit un isomorphisme. Alors il existe une suite d'espaces X^n $(n=1,2,\dots)$ et une suite d'applications $f^n : X^n \longrightarrow Y$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) $X^1 = X$, $f^1 = f$;

(2) $X^n \subset X^{n+1}$, (X^{n+1}, X^n) est un CW-complexe relatif, et la restriction de f^{n+1} à X^n est f^n ;

(3) f^n induit des isomorphismes $\pi_q(X^n) \approx \pi_q(Y)$ pour $q < n$, et un épimorphisme $\pi_n(X^n) \longrightarrow \pi_n(Y)$;

(4) l'inclusion $X \subset X^n$ induit des isomorphismes $H_q(X) \approx H_q(X^n)$ pour $q > n$.

Démonstration : supposons que X^r et f^r soient définis pour $r \leq n$ et satisfassent aux conditions de l'énoncé. On va définir X^{n+1} et f^{n+1} . Soit X_{f^n} le "mapping cylinder" de f^n . Soit f_n une application $(Y^*(\pi_{n+1}(X_{f^n},X^n),n),Y(\pi_{n+1}(X_{f^n},X^n))) \longrightarrow (X_{f^n},X^n)$ telle que $\lambda[f_n]$ soit l'application identique $\pi_{n+1}(X_{f^n},X^n) \longrightarrow \pi_{n+1}(X_{f^n},X^n)$. Dans l'espace $X^n \cup Y^*(\pi_{n+1}(X_{f^n},X^n),n)$, identifions chaque point $y \in Y(\pi_{n+1}(X_{f^n},X^n),n)$ avec $f_n(y) \in X^n$. Soit X^{n+1} l'espace-quotient. Définissons $\bar{f}^{n+1} : X^{n+1} \longrightarrow X_{f^n}$ qui envoie x en x pour $x \in X^n$, et envoie y en $f_n(y)$ pour $y \in Y^*(\pi_{n+1}(X_{f^n},X^n),n)$. Soit $f^{n+1} = g \circ \bar{f}^{n+1}$, où $g: X_{f^n} \longrightarrow Y$

est la rétraction standard. Alors l'espace X^{n+1} et l'application f^{n+1} satisfont aux conditions de l'énoncé.

Dans la situation du théorème 4, nous dirons que $\{X^n, f^n\}$ est une décomposition de l'application f . L'application f_n de la démonstration s'appellera la n-ième application d'attachement. On notera que $\pi_{n+1}(X_{f^n}, X^n) \approx H_{n+1}(X_{f^n}, X^n) \approx H_{n+1}(X_f, X)$.

Dans la situation de la proposition 5, on définit l'espace $X^\infty = \bigcup_n X^n$, et l'application $f^\infty : X^\infty \longrightarrow Y$ dont la restriction à X^n est f^n .

On va appliquer la proposition 5 dans le cas où l'application $f : X \longrightarrow Y$ est le plongement canonique $i : X \longrightarrow \Omega(sX)$ du paragraphe 1 . On sait que $\pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(\Omega(sX))$ est un isomorphisme, ce qui rend la proposition 5 applicable. On considère donc une décomposition $\{X^n, i^n\}$ de l'application i , et on note f_n la n-ième application d'attachement. L'espace X^∞ contient X , et l'application $i^\infty : X^\infty \longrightarrow \Omega(sX)$ prolonge i et définit un isomorphisme des groupes d'homotopie relatifs $\pi_q(X^\infty, X) \approx \pi_q(\Omega(sX), X)$.

Proposition 6.- Avec les notations précédentes, la suspension sf_n de la n-ième application d'attachement est inessentielle.

Démonstration : considérons les applications

$$Y(\pi_{n+1}(X_{f^n}, X^n), n) \xrightarrow{f_n} X^n \xrightarrow{i^n} \Omega(sX) \xrightarrow{g^n} \Omega(sX^n) .$$

On sait que $i^n f_n$ est inessentielle ; donc $g^n i^n f_n$ est inessentielle.
Or ceci signifie que $sf_n : Y(\pi_{n+1}(X_{f^n}, X^n), n+1) \longrightarrow sX^n$ est une application inessentielle.

Proposition 7.- Soit X connexe, à groupe fondamental abélien. Soit Y l'espace $(sX) \vee U$, où U désigne $\bigvee_{n=1}^{\infty} Y(H_n(\Omega(sX), X), n+1)$. Alors il existe une application $f : Y \longrightarrow s\Omega(sX)$ telle que l'homomorphisme $\pi_q(Y) \longrightarrow \pi_q(s\Omega(sX))$ défini par f soit un isomorphisme pour tout q .

Démonstration : l'application $i^\infty : X^\infty \longrightarrow \Omega(sX)$ définit des isomorphismes $\pi_q(X^\infty) \approx \pi_q(\Omega(sX))$ pour tout q . Donc sf^∞ définit des isomorphismes $\pi_q(sX^\infty) \approx \pi_q(s\Omega(sX))$. D'après la proposition 6 , toutes les applications d'attachement qui servent à construire sX sont inessentielles ; d'où la proposition 7 .

Corollaire de la proposition 7 : Soit X connexe, à groupe fondamental abélien. Pour chaque entier r, il existe une application $(X^\infty, X) \longrightarrow (\Omega(Y(H_r(\Omega(sX),X),r+1)),e)$, où e est l'élément neutre, qui définit un isomorphisme des groupes d'homologie H_r.

Par la proposition précédente, on a une application f de Y dans $s\Omega(sX)$ telle que l'homomorphisme $\pi_q(Y) \longrightarrow \pi_q(s\Omega(sX))$ défini par f soit un isomorphisme pour tout q. D'ailleurs, on a une application de sX^∞ dans $s\Omega(sX)$ telle que l'homomorphisme $\pi_q(sX^\infty) \longrightarrow \pi_q(s\Omega(sX))$ soit un isomorphisme pour tout q. Soit Y_f le cylindre d'application de f. On peut déformer l'application donnée de sX^∞ dans $s\Omega(sX) \subset Y_f$, en une application de sX^∞ dans Y (parce que X^∞ est un CW-complexe). Alors, on a $X^\infty \longrightarrow \Omega(sX^\infty) \longrightarrow \Omega(Y) \longrightarrow \Omega(Y(H_r(\Omega(sX),X),r+1))$, d'où le corollaire.

Appliquons ceci au cas où $x = S_n$ et $r = 2n$; on obtient une application $X^\infty \longrightarrow \Omega(S_{2n+1})$, ce qui prouve enfin le lemme du paragraphe 3, avec $Y = X^\infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. FREUDENTHAL, Über die Klassen der Sphärenabbildungen (Compositio Math., 5, 1937, p. 299-314).

[2] H. HOPF, Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedriger Dimension (Fund. Math., 25, 1935, p. 427-440).

[3] G.W. WHITEHEAD, A generalization of the Hopf invariant (Ann. of Math., 51, 1950, p. 192-237).

[4] G.W. WHITEHEAD, On the Freudenthal theorems (Ann. of Math., 57, 1953, p. 209-228).

[5] J.H.C. WHITEHEAD, On adding relations to homotopy groups (Ann. of Math., 42, 1941, p. 409-428).

[6] I.M. JAMES, à paraître aux Annals of Math.

[7] I.M. JAMES, à paraître aux Annals of Math.

[8] H. TODA, Topology of standard path spaces, Homotopy theory I (Proc. Jap. Acad., 29, 1953, p. 299-304).

[9] J.C. MOORE, On homotopy groups of spaces with a single nonvanishing homology group (Ann. of Math., 59, 1954, p. 549-557).

[10] H. TODA, Sur les groupes d'homotopie de sphères (Comptes Rendus, 240, 1955, p. 42-44).

[11] J.P. SERRE, Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens (Ann. of Math., 58, 1953, p. 258-294).

[12] J. ADEM, The iteration of the Steenrod squares (Proc. nat. Acad. Sci., U.S.A., 38, 1952, p. 720-726).
