

# SÉMINAIRE HENRI CARTAN

H. CARTAN

**Détermination des algèbres  $H_*(\pi, n; Z_p)$  et  $H^*(\pi, n; Z_p)$ ,  $p$  premier impair**

*Séminaire Henri Cartan*, tome 7, n° 1 (1954-1955), exp. n° 9, p. 1-10

<[http://www.numdam.org/item?id=SHC\\_1954-1955\\_\\_7\\_1\\_A9\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_1_A9_0)>

© Séminaire Henri Cartan  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

DÉTERMINATION DES ALGÈBRES  $H_*(\pi, n; Z_p)$   
 et  $H^*(\pi, n; Z_p)$ ,  $p$  premier impair.  
 (Exposé de H. CARTAN, 17.1.1955)

---

1.- Mots admissibles ; opérations correspondantes.

Considérons trois symboles  $\sigma$ ,  $\gamma_p$  et  $\varphi_p$ . Considérons les mots (suites finies, y compris la suite vide) formés avec ces trois éléments. La hauteur  $n$  d'un mot  $\alpha$  sera, par définition, le nombre total des lettres du mot  $\alpha$  égales à  $\sigma$  ou à  $\varphi_p$ . Le degré d'un mot  $\alpha$  se définit par récurrence sur le nombre des lettres de  $\alpha$  : le degré du mot vide est 0 ; un mot non vide s'écrit sous l'une des trois formes  $\sigma\alpha$ ,  $\gamma_p\alpha$ ,  $\varphi_p\alpha$ , où  $\alpha$  est un mot ; on pose

$$(1) \quad \begin{cases} \deg(\sigma\alpha) = 1 + \deg(\alpha) , & \deg(\gamma_p\alpha) = p.\deg(\alpha) , \\ \deg(\varphi_p\alpha) = 2 + p.\deg(\alpha) . \end{cases}$$

La différence entre le degré et la hauteur est le degré stable  $q$  ; le degré est donc  $n + q$ .

Un mot  $\alpha$  sera dit admissible si : (i)  $\alpha$  n'est pas vide, la première et la dernière lettre de  $\alpha$  sont  $\sigma$  ou  $\varphi_p$  ; (ii) pour chaque lettre  $\gamma_p$  ou  $\varphi_p$  du mot, le nombre des lettres  $\sigma$  situées à droite est pair.

Proposition 1. - Soit  $\alpha$  un mot admissible de hauteur  $n$  ; pour qu'un mot  $\beta\alpha$  soit admissible de hauteur  $n + 1$ , il faut et il suffit que le mot  $\beta$  soit réduit à la lettre  $\sigma$  si  $\deg(\alpha)$  est impair, et, si  $\deg(\alpha)$  est pair, que  $\beta$  soit égal à  $\sigma(\gamma_p)^k$  ou à  $\varphi_p(\gamma_p)^k$ ,  $k$  entier  $\geq 0$ .

C'est une conséquence immédiate des définitions.

Un mot admissible  $\alpha$  est dit de première espèce s'il se termine (à droite) par la lettre  $\sigma$  ; de deuxième espèce s'il se termine par  $\varphi_p$ . A chaque mot admissible  $\alpha$ , de première espèce, associons une application  $f(\alpha) : \pi/p\pi \rightarrow H_{n+q}(\pi, n; Z_p)$ , où  $n$  et  $q$  désignent la hauteur et le degré stable de  $\alpha$  ; on définit  $f(\alpha)$  par récurrence sur la hauteur du mot  $\alpha$ , en posant les conditions suivantes : si  $\alpha$  est de hauteur 1 (donc  $\alpha = \sigma$ ),  $f(\alpha)$  est la suspension  $\sigma : \pi \otimes Z_p \rightarrow H_1(\pi, 1; Z_p)$  ; si  $\alpha = \sigma\beta$ , le mot admissible  $\beta$  étant de hauteur  $n$  et de degré impair  $n+q$ ,  $f(\alpha)$  est l'application composée  $\pi/p\pi \xrightarrow{f(\beta)} H_{n+q}(\pi, n; Z_p) \xrightarrow{\sigma} H_{n+q+1}(\pi, n+1; Z_p)$  ; si

$\alpha = \sigma(\gamma_p)^k \beta$ , le mot admissible  $\beta$  étant de hauteur  $n$  et de degré pair  $n+q$ ,  $f(\alpha)$  est l'application composée

$$\pi/p\pi \xrightarrow{f(\beta)} H_{n+q}(\pi, n; Z_p) \xrightarrow{\sigma \circ \gamma_{pk}} H_{pk(n+q)+1}(\pi, n+1; Z_p) ;$$

si  $\alpha = \varphi_p(\gamma_p)^k \beta$ , le mot admissible  $\beta$  étant de hauteur  $n$  et de degré pair  $n+q$ ,  $f(\alpha)$  est l'application composée

$$\pi/p\pi \xrightarrow{f(\beta)} H_{n+q}(\pi, n; Z_p) \xrightarrow{\varphi_p \circ \gamma_{pk}} H_{pk+1(n+q)+2}(\pi, n; Z_p) .$$

A chaque mot admissible  $\alpha$ , de deuxième espèce, on associe une application  $f(\alpha) : {}_p\pi \rightarrow H_{n+q}(\pi, n; Z_p)$ , où  $n$  et  $q$  désignent la hauteur et le degré stable de  $\alpha$ ; on définit  $f(\alpha)$  par récurrence sur la hauteur du mot  $\alpha$ , en posant les conditions suivantes : si  $\alpha$  est de hauteur 1 (donc  $\alpha = \varphi_p$ )  $f(\alpha)$  est l'application  $\varphi_p : {}_p\pi \rightarrow H_2(\pi, 1; Z_p)$ ; la récurrence se fait comme dans le cas d'une suite de première espèce : on pose  $f(\sigma(\beta)) = \sigma \circ f(\beta)$ ,  $f(\sigma(\gamma_p)^k \beta) = \sigma \circ \gamma_{pk} \circ f(\beta)$ ,  $f(\varphi_p(\gamma_p)^k \beta) = \varphi_p \circ \gamma_{pk} \circ f(\beta)$ .

Proposition 2.- Les applications  $f(\alpha)$  sont linéaires, lorsque l'entier premier  $p$  est impair.

En effet,  $\sigma : \pi/p\pi \rightarrow H_1(\pi, 1; Z_p)$  et  $\varphi_p : {}_p\pi \rightarrow H_2(\pi, 1; Z_p)$  sont linéaires; la démonstration se fait alors par récurrence sur la hauteur de  $\alpha$ , en observant que  $\sigma$  est linéaire sur les éléments de  $H_{n+q}(\pi, n; Z_p)$  ( $n+q$  impair), et que  $\sigma \circ \gamma_{pk}$  et  $\varphi_p \circ \gamma_{pk}$  sont linéaires sur les éléments de  $H_{n+q}(\pi, n; Z_p)$  ( $n+q$  pair). Ce dernier point résulte de la formule (3) de l'Exposé n° 7 (propriétés des puissances divisées) et du fait que  $\sigma$  et  $\varphi_p$  sont des applications linéaires qui s'annulent sur les éléments décomposables (Exposé n° 6, proposition 1 et proposition 3).

## 2.- Les algèbres $U(M^{(n)})$ .

Pour chaque entier  $n \geq 1$ , définissons un  $Z_p$ -espace vectoriel gradué  $M^{(n)}$ , comme suit; c'est la somme directe d'autant d'exemplaires de  $\pi/p\pi$  qu'il y a de mots admissibles  $\alpha$  de hauteur  $n$  et de première espèce, et d'autant d'exemplaires de  ${}_p\pi$  qu'il y a de mots admissibles  $\alpha$  de hauteur  $n$  et de deuxième espèce. Chaque exemplaire de  $\pi/p\pi$  (resp. de  ${}_p\pi$ ) est affecté d'un degré égal au degré du mot  $\alpha$  qui l'indexe. Pour chaque  $\alpha$ , on a une application linéaire  $f(\alpha)$  de la composante d'indice  $\alpha$  de  $M^{(n)}$  dans  $H_*(\pi, n; Z_p)$ ; cette collection d'applications définit une application linéaire de  $M^{(n)}$  dans  $H_*(\pi, n; Z_p)$ , qui conserve le degré. Nous noterons  $f^{(n)}$  cette application.

Or l'algèbre  $H_* (\pi, n; Z_p)$  est une algèbre graduée anticommutative, munie de puissances divisées (pour les éléments de degré pair  $\geq 2$ ) satisfaisant aux conditions (1), (2), (3), (4') et (5) de l'Exposé n° 7. On peut donc appliquer à l'application linéaire  $f^{(n)} : M^{(n)} \rightarrow H_* (\pi, n; Z_p)$  le théorème 2 de l'Exposé n° 8 : l'application  $f^{(n)}$  se prolonge, d'une seule manière, en un homomorphisme  $g^{(n)}$  de l'algèbre universelle  $U(M^{(n)})$  dans l'algèbre  $H_* (\pi, n; Z_p)$ , homomorphisme compatible avec les structures d'algèbres graduées et avec les puissances divisées.

Théorème fondamental : l'homomorphisme  $g^{(n)}$  est un isomorphisme de l'algèbre  $U(M^{(n)})$  sur l'algèbre  $H_* (\pi, n; Z_p)$  ( $p$  premier impair).

Ce théorème détermine complètement l'algèbre d'homologie  $H_* (\pi, n; Z_p)$  avec ses puissances divisées. Il implique que l'application linéaire  $f^{(n)}$  applique biunivoquement  $M^{(n)}$  sur un sous-espace vectoriel gradué de  $H_* (\pi, n; Z_p)$ .

### 3.- Démonstration du théorème fondamental.

Pour plus de clarté, écrivons  $M^{(n)}(\pi)$  au lieu de  $M^{(n)}$ , et  $g^{(n)}(\pi)$  au lieu de  $g^{(n)}$ . Il est clair que  $M^{(n)}(\pi)$  et  $U(M^{(n)}(\pi))$  sont des foncteurs covariants du groupe abélien  $\pi$ , ainsi que  $H_* (\pi, n; Z_p)$ ; et que  $g^{(n)}(\pi) : U(M^{(n)}(\pi)) \rightarrow H_* (\pi, n; Z_p)$  est une application naturelle de foncteurs. Chacun des foncteurs  $U(M^{(n)}(\pi))$  et  $H_* (\pi, n; Z_p)$  commute avec les limites directes; donc, il suffit de prouver que  $g^{(n)}(\pi)$  est un isomorphisme, lorsque  $\pi$  est un groupe de type fini. Alors  $\pi$  est somme directe d'un nombre fini de groupes cycliques dont l'ordre est infini ou une puissance d'un nombre premier  $q$ . Or si  $\pi$  est une somme directe  $\pi' + \pi''$ , les injections  $\pi' \rightarrow \pi$  et  $\pi'' \rightarrow \pi$  identifient  $U(M^{(n)}(\pi))$  au produit tensoriel  $U(M^{(n)}(\pi')) \otimes_{Z_p} U(M^{(n)}(\pi''))$ , et  $H_* (\pi, n; Z_p)$  au produit tensoriel  $H_* (\pi', n; Z_p) \otimes_{Z_p} H_* (\pi'', n; Z_p)$ . Il suffira donc de prouver que  $g^{(n)}(\pi)$  est un isomorphisme, lorsque  $\pi$  est cyclique infini ou cyclique d'ordre  $q^f$  ( $q$  premier).

Supposons d'abord que  $\pi$  soit cyclique d'ordre  $q^f$ ,  $q$  premier  $\neq p$ . Alors  $M^{(n)} = 0$  pour  $n \geq 1$  et  $U(M^{(n)})$  est réduit aux scalaires; or il en est de même de  $H_* (\pi, n; Z_p)$  : il suffit de montrer que l'algèbre  $H_* (\pi, 1; Z_p)$  est réduite aux scalaires, car alors une application répétée du théorème 2 de l'Exposé n° 2 entraînera que l'algèbre  $H_* (\pi, n; Z_p)$  est réduite aux scalaires, pour tout  $n$ . Pour étudier  $H_* (\pi, 1; Z_p)$ , nous utiliserons la construction

acyclique classique, ayant pour algèbre initiale  $Z(\pi)$  l'algèbre d'un groupe cyclique  $\pi$  d'ordre  $h$  ( $h$  entier quelconque) ; il s'agit d'une construction à coefficients entiers, déjà utilisée à la fin de l'Exposé n° 6, et que nous réduirons ensuite modulo  $p$ .

On pose  $A = Z(\pi)$  avec l'augmentation  $\varepsilon$  égale à 1 sur chaque élément de  $\pi$  ; on choisit un générateur  $a$  du groupe cyclique  $\pi$  d'ordre  $h$ , et on pose  $N = E(x,1) \otimes F(y,2)$  (produit tensoriel d'algèbres graduées munies de puissances divisées) ; sur  $M = A \otimes N$ , on considère la différentielle  $d$  définie par

$$(2) \quad dx = a - 1, \quad d\gamma_k(y) = (1 + a + \dots + a^{h-1})x\gamma_{k-1}(y), \quad \text{pour } k \geq 1.$$

On a donc  $d(x\gamma_k(y)) = (a - 1)\gamma_k(y)$ , et il est immédiat que  $M$  est acyclique. Par passage au quotient, on obtient la différentielle  $\bar{d}$  de l'algèbre finale  $N = E(x,1) \otimes F(y,2)$  :

$$(3) \quad \bar{d}x = 0, \quad \bar{d}\gamma_k(y) = hx\gamma_{k-1}(y) \quad \text{pour } k \geq 1.$$

Revenons maintenant au cas où  $h = q^f$ ,  $q$  premier  $\neq p$ . Si on réduit modulo  $p$ , on obtient  $\bar{d}x = 0$ ,  $\bar{d}\gamma_k(y) = hx\gamma_{k-1}(y)$ , où  $h$  est un élément inversible du corps  $Z_p$ . Donc  $N$  est acyclique, comme annoncé ; le théorème fondamental est ainsi dé-montré dans le cas où  $\pi$  est cyclique d'ordre  $q^f$ ,  $q$  premier  $\neq p$ .

Examinons maintenant le cas où  $\pi$  est cyclique infini, ou cyclique d'ordre  $p^f$ . On choisit un générateur  $a$  de  $\pi$  ; si  $\pi$  est infini,  $a^{p^f} = 0$  ; si  $\pi$  est d'ordre  $p^f$ , on choisit  $a^{p^{f-1}}$  comme générateur de  $\pi$ . Alors l'espace vectoriel  $M^{(n)}(\pi)$  a une base bien définie, indexée par les mots admissibles de première espèce (si  $\pi$  infini), resp. par tous les mots admissibles (si  $\pi$  fini).

Lemme 1. - sous ces hypothèses, il existe un homomorphisme de  $U(M^{(1)}(\pi))$  dans la bar construction  $\overline{B}(Z_p(\pi))$ , compatible avec les puissances divisées, et qui, par passage à l'homologie, donne  $g^{(1)}(\pi)$  qui est un isomorphisme.

Démonstration du lemme 1. : nous devons examiner successivement le cas où  $\pi$  est cyclique infini et celui où  $\pi$  est cyclique d'ordre  $p^f$ . Dans le premier cas, il existe une construction acyclique  $A \otimes_{Z_p} N$ , où  $A = Z_p(\pi)$ ,  $N = E_p(x,1)$  (algèbre extérieure à un générateur  $x$  de degré 1 et à coefficients dans  $Z_p$ ), avec la différentielle  $dx = a - 1$  ( $a$  désignant toujours le générateur de  $\pi$ ). Soit  $\lambda : E_p(x,1) \rightarrow \overline{B}(Z_p(\pi))$  l'unique homomorphisme spécial (théorème 5, Exposé n° 4) ; il est compatible avec les puissances

divisées (théorème 3, Exposé n° 7) et définit un isomorphisme

$\lambda_* : E_p(x,1) \approx H_* (\overline{\mathcal{B}}(Z_p(\pi)))$  (en vertu du théorème 2, Exposé n° 2). Considérons l'isomorphisme  $\mu : U(M^{(1)}) \rightarrow E_p(x,1)$  qui envoie l'unique élément de base de  $M^{(1)}$  dans l'élément  $x$ . Considérons l'application composée

$\lambda \circ \mu : U(M^{(1)}) \rightarrow \overline{\mathcal{B}}(Z_p(\pi))$ ; par passage à l'homologie, on trouve un isomorphisme, d'après ce qui précède. Or cet isomorphisme est  $g^{(1)}$ , car il coïncide avec  $f^{(1)}$  sur l'élément de base de  $M^{(1)}$ ; cela résulte du fait que  $x$  est la suspension de  $a$ . Ceci prouve le lemme 1 dans le cas où  $\pi$  est cyclique infini.

Supposons maintenant que  $\pi$  soit cyclique d'ordre  $p^f$ . Prenons la construction acyclique décrite ci-dessus; on a donc  $N = E_p(x,1) \otimes P_p(y,2)$ , avec  $\bar{d} = 0$  sur  $N$ . La classe d'homologie  $x$  est la suspension de  $a$ , celle de  $y$  est la transpotence de  $ap^{f-1}$ , en vertu du calcul fait à la fin de l'Exposé n° 6. Soit  $\lambda$  l'unique homomorphisme spécial  $N \rightarrow \overline{\mathcal{B}}(Z_p(\pi))$ ; il est compatible avec les puissances divisées, donc est déterminé par la connaissance de  $\lambda(x)$  et  $\lambda(y)$ ; par passage à l'homologie, il définit un isomorphisme  $\lambda_* : N \approx H_* (\overline{\mathcal{B}}(Z_p(\pi)))$ . Considérons l'isomorphisme  $\mu : U(M^{(1)}) \rightarrow N$  qui envoie le générateur  $a$  de  $\pi/p\pi$  dans  $x$ , et le générateur  $ap^{f-1}$  de  $\pi$  dans  $y$ . L'application composée  $\lambda \circ \mu : U(M^{(1)}) \rightarrow \overline{\mathcal{B}}(Z_p(\pi))$  est compatible avec les puissances divisées, et, par passage à l'homologie, définit un isomorphisme. Cet isomorphisme coïncide avec  $f^{(1)}$  sur chacun des deux éléments de base de  $M^{(1)}$ , donc c'est  $g^{(1)}$ .

#### 4.- Démonstration du théorème fondamental (Suite).

Lemme 2 :  $\pi$  étant cyclique infini ou d'ordre  $p^f$ , engendré par  $a$ , il existe, pour chaque entier  $n \geq 1$ , une construction acyclique (sur le corps  $Z_p$ ) ayant  $U(M^{(n)}(\pi))$  comme algèbre initiale (avec différentielle nulle), et  $U(M^{(n+1)}(\pi))$  comme algèbre finale (avec différentielle nulle); et cette construction satisfait à la condition  $(\Gamma)$  que voici : les éléments de la base de  $M^{(n+1)}(\pi)$  se déduisent des éléments de la base de  $M^{(n)}(\pi)$  par les opérations suivantes (dans la construction acyclique) :

$\sigma$  appliquée à chaque élément de degré impair de la base de  $M^{(n)}(\pi)$  ;  
 $\sigma \gamma_{pk}$  ( $k \geq 0$ ) et  $\varphi_p \gamma_{pk}$  ( $k \geq 0$ ) appliquées à chaque élément de degré pair de la base de  $M^{(n)}(\pi)$ .

Il est clair qu'une fois ce lemme prouvé, une application répétée du théorème 5 de l'Exposé n° 4 fournira, compte tenu du lemme 1, des homomorphismes  $U(M^{(n)}) \rightarrow \overline{\mathcal{B}}^{(n)}(Z_p(\pi))$ , compatibles avec les puissances divisées, et qui,

par passage à l'homologie, donneront des isomorphismes compatibles avec les opérations  $\sigma$ ,  $\gamma_p$  et  $\varphi_p$ ; et, à cause de la condition  $(\Gamma)$  du Lemme 2, on verra de proche en proche que ces isomorphismes sont précisément les homomorphismes  $g^{(n)}$ , puisqu'ils coïncident avec  $f^{(n)}$  sur la base de  $M^{(n)}$ . Ceci achèvera de prouver le théorème fondamental.

Démonstration du lemme 2 : l'algèbre  $U(M^{(n)})$  est le produit tensoriel des algèbres universelles des sous-espaces de dimension 1 de  $M^{(n)}$  engendrés par les éléments de la base de  $M^{(n)}$ . Soit  $x$  un élément de la base de  $M^{(n)}$ ; si  $x$  est de degré impair  $2q-1$ , l'algèbre universelle du sous-espace engendré par  $x$  est  $E_p(x, 2q-1)$  (algèbre extérieure à coefficients dans  $Z_p$ ), si  $x$  est de degré pair  $2q$ , l'algèbre universelle du sous-espace engendré par  $x$  est  $P_p(x, 2q)$  (algèbre des polynômes divisée à coefficients dans  $Z_p$ ). On va montrer les deux propositions suivantes :

Proposition 3. - Si  $x$  est de degré  $2q-1$ , il existe une construction acyclique ayant  $E_p(x, 2q-1)$  comme algèbre initiale (différentielle nulle), et  $P_p(y, 2q)$  comme algèbre finale (différentielle nulle);  $y$  se déduit de  $x$  par la suspension  $\sigma$ .

Proposition 4. - Si  $x$  est de degré  $2q$ , il existe une construction acyclique ayant  $P_p(x, 2q)$  comme algèbre initiale (différentielle nulle), et dont l'algèbre finale (à différentielle nulle) est un produit tensoriel infini

$$E_p(y_0, 2q+1) \otimes \dots \otimes E_p(y_k, 2p^k q+1) \otimes \dots \otimes P_p(z_0, 2pq+2) \otimes \dots \otimes P_p(z_k, 2p^{k+1} q+2) \otimes \dots$$

où  $y_k = \sigma \gamma_{p^k}(x)$  et  $z_k = \varphi_p \gamma_{p^k}(x)$ .

Une fois ces propositions démontrées, un produit tensoriel de constructions acycliques donnera la construction acyclique du lemme 2, qui sera ainsi prouvé.

La proposition 3 est évidente : sur le produit tensoriel  $E_p(x, 2q-1) \otimes P_p(y, 2q)$ , on met la différentielle  $d$  que voici :

$$dx = 0, \quad d \gamma_k(y) = x \gamma_{k-1}(y) \quad \text{pour } k \geq 1.$$

Ceci est bien une construction acyclique, et la différentielle  $\bar{d}$  est nulle; la relation  $dy = x$  montre que  $y$  est la suspension de  $x$ .

Démontrons la proposition 4. L'algèbre  $P_p(x, 2q)$  est, d'après l'Exposé n° 7, paragraphe 7, un produit tensoriel

$$Q_p(x, 2q) \otimes Q_p(\gamma_p(x), 2pq) \otimes \dots \otimes Q_p(\gamma_{pk}(x), 2p^k q) \otimes \dots ,$$

où  $Q_p(x, 2q)$  désigne l'algèbre des polynômes tronqués à un générateur  $x$  de degré  $2q$  (quotient de l'algèbre des polynômes ordinaires, à une lettre  $x$ , par l'idéal engendré par  $x^p$ ). Il suffit de faire une construction acyclique ayant comme algèbre initiale chacune des algèbres de ce produit tensoriel ; puis on fera le produit tensoriel de ces constructions. Ainsi la proposition 4 va résulter du fait suivant : il existe une construction acyclique ayant comme algèbre initiale  $Q_p(x, 2q)$  (différentielle nulle) et comme algèbre finale  $E_p(y, 2q+1) \otimes P_p(z, 2pq+2)$  (différentielle nulle), avec  $y = \phi(x)$ ,  $z = \varphi_p(x)$ . C'est ce qu'on va montrer.

On définit, sur  $Q_p(x, 2q) \otimes E_p(y, 2q+1) \otimes P_p(z, 2pq+2)$ , la différentielle  $d$  que voici :

$$(4) \quad dx = 0 \quad , \quad dy = x \quad , \quad d\gamma_k(z) = x^{p-1} y \gamma_{k-1}(z) \quad \text{pour } k \geq 1 .$$

On vérifie que, en ce qui concerne les éléments de degré  $> 0$ , le noyau de  $d$  et l'image de  $d$  sont identiques : chacun d'eux est engendré par les éléments  $x^h \gamma_k(z)$  ( $1 \leq h \leq p-1$ ,  $k \geq 0$ ) et  $x^{p-1} y \gamma_k(z)$  ( $k \geq 0$ ). Par passage au quotient,  $\bar{d} = 0$  sur l'algèbre finale. La relation  $dy = x$  montre que  $y = \phi(x)$ , et la relation  $dz = x^{p-1} y$  montre que  $z = \varphi_p(x)$ .

La démonstration du théorème fondamental est ainsi terminée.

#### 5.- Structure de l'algèbre de cohomologie $H^*(\pi, n; Z_p)$ , $p$ impair.

L'application diagonale  $a \rightarrow (a, a)$  de  $\pi$  dans  $\pi + \pi$  définit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U(M^{(n)}(\pi)) & \longrightarrow & U(M^{(n)}(\pi + \pi)) \approx U(M^{(n)}(\pi)) \otimes U(M^{(n)}(\pi)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_* (\pi, n; Z_p) & \longrightarrow & H_* (\pi + \pi, n; Z_p) \approx H_* (\pi, n; Z_p) \otimes H_* (\pi, n; Z_p) \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales désignent les isomorphismes  $g^{(n)}$  du théorème fondamental. On observe que  $M^{(n)}(\pi + \pi)$  est naturellement la somme directe  $M^{(n)}(\pi) + M^{(n)}(\pi)$ . L'application diagonale  $M^{(n)}(\pi) \rightarrow M^{(n)}(\pi) + M^{(n)}(\pi)$  s'écrit, avec la notation du produit tensoriel,  $x \rightarrow x \otimes 1 + 1 \otimes x$ . Ainsi, si on identifie  $H_* (\pi, n; Z_p)$  à l'algèbre universelle  $U(M^{(n)}(\pi))$  au moyen de  $g^{(n)}$ , la structure multiplicative de la cohomologie  $H^*(\pi, n; Z_p)$  est celle qui est définie, sur le dual gradué  $\text{Hom}'(U(M^{(n)}), Z_p)$ , par l'homomorphisme  $\Delta : U(M^{(n)}) \rightarrow U(M^{(n)}) \otimes U(M^{(n)})$  (homomorphisme d'algèbres graduées, compatible avec les puissances divisées) qui envoie chaque  $x \in M^{(n)}$  dans l'élément  $x \otimes 1 + 1 \otimes x$ .



On est ramené à un problème d'algèbre pure : soit  $M$  un module libre gradué (sur un anneau commutatif  $\Lambda$ ), et soit  $\Delta$  l'homomorphisme  $U(M) \rightarrow U(M) \otimes_{\Lambda} U(M)$ , compatible avec les puissances divisées, qui envoie  $x$  dans  $x \otimes 1 + 1 \otimes x$ , pour tout  $x \in M$ . On cherche la structure multiplicative définie par  $\Delta$  sur le dual  $\text{Hom}'(U(M), \Lambda)$ . Soit  $M = M^- + M^+$ , où  $M^-$  désigne le sous-module des éléments de degré impair, et  $M^+$  le sous-module des éléments de degré pair. On a

$$\Delta^- : E(M^-) \rightarrow E(M^-) \otimes E(M^-), \quad \Delta^+ : S(M^+) \rightarrow S(M^+) \otimes S(M^+).$$

$\Delta^-$  est bien connu, et définit sur  $\text{Hom}'(E(M^-), \Lambda)$  la structure multiplicative de l'algèbre extérieure  $E(M'^-)$  du dual  $M'^- = \text{Hom}'(M, \Lambda)$ . Si  $x \in M^+$ , on a  $\Delta^+ \chi_k(x) = \chi_k(x \otimes 1 + 1 \otimes x) = \sum_{i+j=k} \chi_i(x) \otimes \chi_j(x)$ . Dans le cas où  $M^+$  possède une base formée d'un seul élément  $x$ ,  $S(M^+)$  possède une base formée des  $\chi_k(x)$  ( $k \geq 0$ ); soient  $x'^k$  les éléments de la base duale; on trouve la loi de multiplication  $x'^i \cdot x'^j = x'^{i+j}$ , donc le dual de  $S(M^+)$  est l'algèbre des polynômes (ordinaire) à un générateur  $x'$ . Le cas général se ramène à celui-là par produit tensoriel, lorsque la base est finie en toute dimension : l'algèbre duale de  $S(M^+)$  est l'algèbre symétrique  $\Sigma(M'^+)$ , quotient de l'algèbre tensorielle  $T(M'^+)$  par l'idéal bilatère engendré par les éléments  $x' \otimes y' - y' \otimes x'$ ,  $x' \in M'^+$ ,  $y' \in M'^+$ .

Finalement, si  $M$  est un module gradué ayant une base finie en toute dimension, l'algèbre duale de  $U(M)$  (pour l'application  $\Delta$ ) est l'algèbre  $L(M') = E(M'^-) \otimes \Sigma(M'^+)$ , qu'on appelle l'algèbre anticommutative libre du module  $M'$  dual de  $M$  (i.e. :  $M' = \text{Hom}'(M, \Lambda)$ ).

Revenons à l'algèbre de cohomologie  $H^*(\Pi, n; Z_p)$ . On a prouvé :

Théorème 2. Soit, pour  $p$  premier impair,  $M'^{(n)}$  le  $Z_p$ -espace vectoriel gradué, somme directe d'autant d'exemplaires de  $\text{Hom}(\Pi, Z_p)$  qu'il y a de mots admissibles de première espèce et de hauteur  $n$ , et d'autant d'exemplaires de  $\text{Hom}(\Pi, Z_p)$  qu'il y a de mots admissibles de deuxième espèce et de hauteur  $n$ ; chaque sous-espace  $\text{Hom}(\Pi, Z_p)$ , resp.  $\text{Hom}(\Pi, Z_p)$ , est affecté d'un degré égal au degré du mot  $\alpha$  qui l'indexe. L'isomorphisme  $g^{(n)}$  du théorème fondamental définit alors, par dualité, un isomorphisme de l'algèbre de cohomologie  $H^*(\Pi, n; Z_p)$  sur l'algèbre anticommutative libre  $L(M'^{(n)})$ .

L'isomorphisme précédent est un isomorphisme naturel de foncteurs contravariants du groupe abélien  $\Pi$ . On observera que l'algèbre  $L(M'^{(n)})$  est universelle vis-à-vis des applications linéaires (de degré 0) de l'espace vectoriel gradué  $M'^{(n)}$  dans les algèbres graduées anticommutatives.

## 6.- Schémas décrivant les mots admissibles.

Soit  $\alpha$  un mot admissible. Considérons la suite (éventuellement vide) des lettres du mot  $\alpha$  qui sont distinctes de la lettre  $\sigma$ . Numérotions-les, de gauche à droite, par les entiers 1, 2, ... . Si  $\alpha_i$  désigne la  $i$ -ième de ces lettres, soit  $2k_i$  le degré du mot  $\beta_i$  obtenu en enlevant du mot  $\alpha$  la lettre  $\alpha_i$  et toutes celles qui sont à gauche de  $\alpha_i$ . Alors le mot  $\alpha_i \beta_i$  est de degré  $2k_i p$  si  $\alpha_i = \gamma_p$ , et de degré  $2k_i p + 2$  si  $\alpha_i = \varphi_p$ . Soit  $a_i$  la différence des degrés stables des mots  $\alpha_i \beta_i$  et  $\beta_i$ ; on a

$$(5) \quad a_i = 2k_i(p-1) + u_i, \quad \text{avec } u_i = 0 \text{ si } \alpha_i = \gamma_p, \quad u_i = 1 \text{ si } \alpha_i = \varphi_p$$

Il est commode de définir l'entier  $a_i$  pour tout  $i \geq 1$ , en convenant que  $a_i = 0$  si  $i$  est plus grand que le nombre des lettres du mot  $\alpha$  distinctes de  $\sigma$ . Un mot qui ne contient que  $\sigma$  définit donc la suite  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 0$ , ...

Théorème 3.- La suite  $(a_1, \dots, a_i, \dots)$  associée à un mot admissible de hauteur  $n$  et de degré stable  $q$  satisfait aux conditions :

- (i)  $a_i \equiv 0 \text{ ou } 1 \pmod{2p-2}$  pour tout  $i$ ,
- (ii)  $a_i \geq p a_{i+1}$  pour tout  $i$ ,
- (iii)  $\sum_i a_i = q$ ,
- (iv)  $p a_1 < (p-1)(n+q)$ .

Réciproquement, étant donnés  $n$  et  $q$ , toute suite  $(a_i)$  satisfaisant à (i), (ii), (iii) et (iv) est associée à un mot admissible de hauteur  $n$  et de degré stable  $q$ , et ce mot est unique.

Démonstration : (i) résulte de (5). Puisque le mot  $\alpha_i \beta_i$  est de degré  $2k_i p + 2u_i$ , on a  $2k_i p + 2u_i \leq 2k_{i-1}$  pour  $i \geq 2$ , d'où (ii). La relation (iii) est évidente puisque  $a_i$  est le saut du degré stable dans l'opération définie par  $\alpha_i$  (et que le degré stable ne change pas par suspension). Enfin, si  $a_1 \neq 0$ , le mot  $\alpha$  a l'une des formes  $\sigma^h \gamma_p \beta$  ( $h \geq 1$ ) ou  $\sigma^h \varphi_p \beta$  ( $h \geq 0$ ), le mot  $\beta$  étant de degré  $2k_1$ . Donc le degré  $n+q$  du mot  $\alpha$  est  $> 2pk_1 + u_1$ , d'où facilement l'inégalité (iv).

Réciproquement, soient des  $a_i$  vérifiant (i), (ii) et (iv). Définissons, pour chaque  $i$ , les entiers  $k_i$  et  $u_i$  au moyen de (5), ce qui est possible grâce à (i). Alors (ii) entraîne  $k_i - p k_{i+1} - u_{i+1} \geq 0$ . Posons  $h_{i+1} = k_i - p k_{i+1} - u_{i+1}$ . S'il existe un mot admissible  $\alpha$  donnant naissance

à la suite  $(a_i)$ , le nombre des lettres  $\sigma$  situées entre  $\alpha_i$  et  $\alpha_{i+1}$  dans ce mot est nécessairement égal à  $2h_{i+1}$ , et on a  $\alpha_i = \varphi_p$  si  $u_i = 0$ ,  $\alpha_i = \varphi_p$  si  $u_i = 1$ . Ceci détermine le mot  $\alpha$ , sauf qu'il faut encore connaître le nombre  $h_1$  des lettres  $\sigma$  venant à gauche de  $\alpha_1$  dans le mot  $\alpha$ . On doit avoir  $n + q = h_1 + 2k_1p + 2u_1$ , et ceci détermine un entier  $h_1$  qui est bien  $\geq 1$  si  $u_1 = 0$ , et est  $\geq 0$  si  $u_1 = 1$ , grâce à la condition (iv). Le degré stable  $q$  du mot  $\alpha$  satisfait à (iii). Le théorème est entièrement prouvé.

Remarque : la connaissance des entiers  $h_{i+1}$  ( $i \geq 1$ ), qui sont  $\geq 0$ , et celle des entiers  $u_i$  (égaux à 0 ou 1) détermine entièrement la suite des  $a_i$ , par les formules

$$(6) \quad k_i = \sum_{j \geq 0} p^j (h_{i+j+1} + u_{i+j+1}), \quad a_i = 2k_i(p-1) + u_i.$$

Autre remarque : pour que le mot  $\alpha$  associé à une suite  $(a_i)$  soit de deuxième espèce, il faut et il suffit que le dernier des  $a_i$  non nuls soit égal à 1.

Dernière remarque : les résultats précédents valent aussi pour  $p = 2$  lorsque  $\mathbb{T}$  est cyclique, car alors les applications  $f(\alpha)$  sont encore additives.