H. Cartan

Relations entre les opérations précédentes et les opérations de Bockstein ; algèbre universelle d'un module libre gradué

Séminaire Henri Cartan, tome 7, nº 1 (1954-1955), exp. nº 8, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_1_A8_0>

RELATIONS ENTRE LES OPÉRATIONS PRÉCÉDENTES ET LES OPÉRATIONS DE BOCKSTEIN; ALGÈBRE UNIVERSELLE D'UN MODULE LIBRE GRADUÉ.

(Exposé de H. CARTAN, 10-1-1955)

1.- Relations entre σ , γ_2 et φ_2 .

Soit A une DGA- algèbre strictement anticommutative (en caractéristique 2) ; on a donc, dans $\bar{\mathcal{B}}(A)$, un système de puissances divisées, définies, en tout cas, pour les éléments de degré $\geqslant 2$, et satisfaisant aux conditions (1),(2),(3),4") et (5) de l'Exposé n° 7. De plus, si A est munie de puissances divisées (pour les éléments de degré $\geqslant 2$), les puissances divisées γ_k de $\bar{\mathcal{B}}(A)$ passent à l'homologie $H_*(\bar{\mathcal{B}}(A))$.

<u>Proposition 1</u>.- Pour tout entier $q \geqslant 1$, l'application composée

$$H_{2q}(A) \xrightarrow{\sigma} H_{2q+1}(\bar{\mathcal{B}}(A)) \xrightarrow{\gamma_2} H_{4q+2}(\bar{\mathcal{B}}(A)) \quad ,$$

où σ désigne la <u>suspension</u> (Exposé n° 6), est égale à la <u>transpotence</u> φ_2 (Exposé n° 6). En formule :

(1) $\boxed{\varphi_2 = \gamma_2 \circ \sigma}$ (relation valable sur les éléments de degré pair $2q$ de $H_*(A)$, $q \geqslant 1$).

<u>Démonstration</u> : Soit $a \in A_{2q}$ tel que $da = 0$. Il existe un $x \in \bar{\mathcal{B}}_{2q+1}(A)$ unique, tel que $dx = a$; la classe de $\bar{d}$-homologie de x est précisément la suspension σ de la classe d'homologie de a . Alors $\gamma_2(x)$ est l'unique élément $y \in \bar{\mathcal{B}}_{4q+2}(A)$ tel que $dy = (dx).x = ax$. Il résulte de la définition de la transpotence que la classe de $\bar{d}$-homologie de y est la transformée de la classe d'homologie de a par la transpotence φ_2 . C.Q.F.D.

<u>Proposition 1 bis</u>.-- <u>La relation (1) est encore vraie si</u> A <u>est une</u> DGA-<u>algèbre commutative de degré</u> 0 <u>telle que</u> $a^2 = (\varepsilon a)^2$ <u>pour tout</u> $a \in A$, <u>et si on applique les deux membres de (1) à un élément quelconque</u> $a \in A$.

Autrement dit, l'application composée $A \xrightarrow{\sigma} H_1(\bar{\mathcal{B}}(A)) \xrightarrow{\gamma_2} H_2(\bar{\mathcal{B}}(A))$ est égale à la transpotence φ_2 (notée aussi Ψ dans l'Exposé n° 6). Démonstration analogue à celle de la proposition 1 : on écrit $dx = a - \mathcal{E} a$; $dy = (a - \mathcal{E} a)x$.

Rappelons que la transpotence φ_p est additive pour p premier impair. Pour $p = 2$, la formule (1) permet de mettre en évidence la <u>déviation de φ_2 vis-à-vis de l'additivité</u> : l'additivité de σ et la relation $\gamma_2(x + y) = \gamma_2(x) + \gamma_2(y) + xy$ entraînent :

(2) $$\varphi_2(a + b) = \varphi_2(a) + \varphi_2(b) + (\sigma a).(\sigma b) \quad .$$

Les résultats précédents s'appliquent aux algèbres d'Eilenberg-MacLane pour $q \geqslant 1$, $n \geqslant 1$, la transpotence $\varphi_2 : H_{2q}(\Pi,n;Z_2) \longrightarrow H_{4q+2}(\Pi,n+1;Z_2)$ est composée de la suspension $\sigma : H_{2q}(\Pi,n;Z_2) \longrightarrow H_{2q+1}(\Pi,n+1;Z_2)$ et de $\gamma_2 : H_{2q+1}(\Pi,n+1;Z_2) \rightarrow$ $\longrightarrow H_{4q+2}(\Pi,n+1;Z_2)$. De même, $\varphi_2 : {}_2\Pi \longrightarrow H_2(\Pi,1;Z_2)$ est composée de $\sigma : {}_2\Pi \longrightarrow H_1(\Pi,1;Z_2)$ et de γ_2 qui est précisément défini sur l'image de σ . Dans ce dernier cas, si α et β sont deux éléments de ${}_2\Pi$ (noté multiplicativement), on a :

(2') $$\varphi_2(\alpha\beta) = \varphi_2(\alpha) + \varphi_2(\beta) + (\sigma\alpha).(\sigma\beta) \quad .$$

2.- <u>Opérations de Bockstein</u>.

Soit X un complexe, muni d'un opérateur différentiel de degré -1 . On suppose que X , comme groupe abélien, est sans torsion ($nx = 0$, pour n entier $\neq 0$, entraîne $x = 0$). Pour chaque entier $n \neq 0$, on a une suite exacte $0 \longrightarrow X \xrightarrow{n} X \longrightarrow X/nX = X \otimes Z_n \longrightarrow 0$ (où la notation n désigne la multiplication par n).
Dans la suite exacte d'homologie correspondante, l'opérateur "bord"

$$\delta_n : H_q(X \otimes Z_n) \longrightarrow H_{q-1}(X)$$

s'obtient comme suit : soit $x \in X_q$ un cycle mod. n , donc $dx = ny$ ($y \in X_{q-1}$ est bien déterminé) ; la classe du cycle y , dans $H_{q-1}(X)$ est la transformée, par δ_n , de la classe de x dans $H_q(X \otimes Z_n)$. En fait, on va modifier la définition de δ_n , et adopter désormais la convention suivante : on écrit $dx = (-1)^q ny$, et δ_n transforme la classe d'homologie de x dans celle de y . L'introduction du facteur $(-1)^q$ se justifiera plus loin (Proposition 2).

Le noyau de δ_n est l'image de $i_n : H_q(X) \longrightarrow H_q(X \otimes Z_n)$.

L'image de δ_n se compose des éléments de $H_{q-1}(X)$ dont l'ordre divise n.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "n"] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & X \otimes Z_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \otimes Z_n \arrow[r, "n"] & X \otimes Z_{n^2} \arrow[r] & X \otimes Z_n \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes. La deuxième ligne définit un homomorphisme $\beta_n : H_q(X \otimes Z_n) \longrightarrow H_{q-1}(X \otimes Z_n)$, avec la même convention que ci-dessus (introduction du facteur $(-1)^q$). Alors le diagramme montre que $\beta_n = i_n \circ \delta_n$. Donc $\beta_n \circ \beta_n = 0$; ainsi β_n peut être considéré comme un opérateur différentiel dans le complexe suivant :

$$\cdots \rightarrow H_{q+1}(X \otimes Z_n) \xrightarrow{\beta_n} H_q(X \otimes Z_n) \xrightarrow{\beta_n} H_{q-1}(X \otimes Z_n) \rightarrow \cdots$$

On notera que le noyau de β_n se compose des images, dans $H_q(X \otimes Z_n)$, des éléments de $H_q(X \otimes Z_{n^2})$: classes de cycles mod. n^2.

Proposition 2.- *Soit A une DGA-algèbre sur l'anneau Z des entiers ; supposons que A possède une Z-base homogène. Considérons la suspension dans chacune des constructions acycliques $\mathcal{B}(A)$ et $\mathcal{B}(A \otimes Z_n) \approx \mathcal{B}(A) \otimes Z_n$. Alors, pour $q \geq 1$, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} H_q(A \otimes Z_n) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "\sigma"] & H_{q-1}(A) \arrow[d, "\sigma"] \\ H_{q+1}(\overline{\mathcal{B}}(A) \otimes Z_n) \arrow[r, "\delta_n"] & H_q(\overline{\mathcal{B}}(A)) \end{tikzcd}$$

Autrement dit, l'opérateur de Bockstein δ_n commute avec la suspension. Corollaire immédiat : β_n commute avec la suspension.

Démonstration : la proposition pourrait être déduite d'un théorème général d'anticommutation (voir H. Cartan et S. Eilenberg, Homological Algebra, Ch. III, proposition 4.1). Nous allons faire un calcul explicite qui sera utile plus loin : soit $a \in A_q$ tel que l'image a' de A dans $A \otimes Z_n$ soit un cycle ; on a donc

$$da = (-1)^q\, nb \quad , \quad b \in A_{q-1} \quad .$$

Soit $u \in \overline{\mathcal{B}}_q(A)$ tel que $du = b$; alors $a + (-1)^{q+1} nu$ est un cycle de $\mathcal{B}(A)$, donc il existe $x \in \overline{\mathcal{B}}_{q+1}(A)$ tel que

$$dx = a + (-1)^{q+1}\, nu \quad .$$

On a $\bar{d}x = (-1)^{q+1} nu$, donc la classe de $\bar{d}$-homologie de u est transformée par δ_n de la classe de $\bar{d}$-homologie de x', image de x dans $\overline{\mathcal{B}}(A) \otimes Z_n$. D'ailleurs $dx' = a'$, donc la classe d'homologie de x' est transformée de celle de a' par suspension. Ceci prouve la proposition.

3.- Relation entre l'opération de Bockstein et la transpotence.

Soit p un entier premier (éventuellement égal à 2).

Proposition 3.- *Soit A une DGA-algèbre anticommutative, ayant une Z-base homogène, et soit $a \in A_o$ tel que $a^p = (\mathcal{E}\, a)^p$. Soit a' l'image de a dans $A' = A \otimes Z_p$. Considérons la transpotence $\varphi_p : {}_p(\bar{A}'_o) \longrightarrow H_2(\overline{\mathcal{B}}(A'))$, et l'opérateur de Bockstein $\delta_p : H_2(\overline{\mathcal{B}}(A')) \longrightarrow H_1(\overline{\mathcal{B}}(A))$. Alors*

(3) $\qquad \delta_p \varphi_p(a') = (\mathcal{E}\, a)^{p-1}(\sigma\, a) \quad , \quad \beta_p \varphi_p(a') = (\mathcal{E}\, a')^{p-1}(\sigma\, a').$

Démonstration : la deuxième relation résulte de la première par réduction mod. p ; prouvons la première. Soit $x \in \overline{\mathcal{B}}_1(A)$ tel que $dx = a - \mathcal{E}\, a$, et soit $y \in \overline{\mathcal{B}}_2(a)$ tel que

$$dy = (a^{p-1} + (\mathcal{E}\, a)a^{p-2} + \dots + (\mathcal{E}\, a)^{p-1})x \ .$$

Un tel y existe et est unique, puisque le second membre est un d-cycle. On a alors $\bar{d}y = p(\mathcal{E}\, a)^{p-1}\, x$, et, par réduction mod. p, on obtient

$$dx' = a' - \mathcal{E}\, a' \quad , \quad dy' = (a' - \mathcal{E}\, a')^{p-1}\, x' \ .$$

Ainsi la classe de $\bar{d}$-homologie de y' est la transpotence $\varphi_p(a')$; et si on effectue δ_p sur cette classe, on trouve la classe de $\bar{d}$-homologie de $(\mathcal{E}\, a)^{p-1}\, x$. Ceci démontre (3).

Corollaire : soit Π un groupe abélien. Identifions $H_1(\Pi,1;Z)$ à Π par la suspension (Exposé n° 6, n°3) ; alors l'application $\delta_p \varphi_p$ de ${}_p\Pi$ dans $H_1(\Pi,1;Z)$ n'est autre que l'injection ${}_p\Pi \longrightarrow \Pi$. Et l'application $\beta_p \varphi_p$ de ${}_p\Pi$ dans $H_1(\Pi,1;Z_p)$ est l'application ${}_p\Pi \longrightarrow \Pi/p\Pi$ déduite de l'injection.

Théorème 1.- *Soit A une DGA-algèbre anticommutative (au sens strict), ayant une Z-base homogène, et munie de puissances divisées (pour les éléments de degré pair $\geqslant 2$). Soit $\alpha \in H_{2q}(A \otimes Z_p)$, $q \geqslant 1$; on a*

(4) $\qquad \boxed{\beta_p \varphi_p(\alpha) = \sigma\, \gamma_p(\alpha) \in H_{2pq+1}(\overline{\mathcal{B}}(A) \otimes Z_p)}$, si p premier impair,

(5) $\qquad \boxed{\beta_2 \varphi_2(\alpha) = \sigma\, \gamma_2(\alpha) + (\beta_2 \sigma\, \alpha).(\sigma\alpha) \in H_{4q+1}(\overline{\mathcal{B}}(A) \otimes Z_2)}$ si $p = 2$.

Démonstration : soit $a \in A_{2q}$ tel que son image $a' \in A \otimes Z_p$ soit dans la classe d'homologie α. Reprenons les notations de la démonstration de la proposition 2, en y remplaçant q par $2q$, et n par p ; et observons que $\overline{\mathcal{B}}(A)$ et $\mathcal{B}(A)$ sont munies de puissances divisées (Exposé n° 6, théorème 1 et théorème 2). On a :

(6) $$da = pb \quad , \quad du = b \quad , \quad dx = a - pu \quad .$$

Puisque $a-pu$ est un cycle, $\gamma_p(a-pu)$ est un cycle, donc il existe $z \in \overline{\mathcal{B}}_{2pq+1}(A)$ tel que

(7) $$dz = \gamma_p(a-pu) \quad .$$

Alors $pz - \gamma_{p-1}(a-pu).x$ est un cycle, puisque $(a-pu).\gamma_{p-1}(a-pu) = p\,\gamma_p(a-pu)$. Il existe donc un $y \in \overline{\mathcal{B}}_{2pq+2}(A)$ tel que

(8) $$dy = pz - \gamma_{p-1}(a-pu).x \quad .$$

Par réduction mod. p, il vient

(9) $$da' = 0 \quad , \quad dx' = a' \quad , \quad dz' = \gamma_p(a') \quad , \quad dy' = a'^{p-1}x' \quad ,$$

cette dernière relation résultant du fait que $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. Donc la classe de $\bar{d}$-homologie de $\overline{y'}$ est la transpotence $\varphi_p(\alpha)$.

D'autre part, y' provient, par réduction mod. p, de y qui satisfait, d'après (8), à

(10) $$\bar{d}y = pz + (-1)^p p^{p-1}\gamma_{p-1}(u).x \quad .$$

Supposons d'abord p premier <u>impair</u> ; p^{p-1} est divisible par p^2, et (10) montre que le Bockstein β_p de la classe d'homologie de y' est la classe de $\bar{d}$-homologie de z', laquelle, d'après (9), est la suspension de la classe d'homologie de $\gamma_p(a')$, donc est égale à $\sigma\gamma_p(\alpha)$. Ceci démontre (4).

Supposons ensuite $p = 2$. D'après (10), le Bockstein β_2 de la classe de $\bar{d}$-homologie de y' est la classe de $\bar{d}$-homologie de $z' + u'x'$. Or, d'après la troisième relation (6), $\bar{d}x = -2u$, donc la classe d'homologie de u' est le Bockstein β_2 de celle de x' ; et cette dernière, d'après la deuxième relation (9), est $\sigma(\alpha)$. D'où la relation (5) à démontrer.

<u>Corollaire de la relation (4)</u> : soit $\alpha \in H_{2q}(A \otimes Z_p)$, $q \geqslant 1$; pour p premier <u>impair</u>, $\sigma\gamma_p(\alpha)$ est dans l'image de $i_p : H_{2pq+1}(\overline{\mathcal{B}}(A)) \longrightarrow H_{2pq+1}(\overline{\mathcal{B}}(A) \otimes Z_p)$. D'une façon plus précise, l'application linéaire $\sigma\gamma_p$ est composée de l'application <u>linéaire</u> $\delta_p\varphi_p : H_{2q}(A \otimes Z_p) \longrightarrow H_{2pq+1}(\overline{\mathcal{B}}(A))$, et de l'application i_p.

Corollaire de la relation (5) : si $\alpha \in H_{2q}(A \otimes Z_2)$, $q \geqslant 1$, et si α est l'image d'un élément de $H_{2q}(A \otimes Z_4)$, alors

$$\sigma\gamma_2(\alpha) = \beta_2\varphi_2(\alpha) = i_2\,\delta_2\,\varphi_2(\alpha) \quad .$$

Remarque 1.- L'application $\alpha \longrightarrow \delta_2\varphi_2(\alpha)$ n'est pas additive, même sur l'espace vectoriel des α tels que $\beta_2(\alpha) = 0$. En fait, la relation $\varphi_2 = \gamma_2\sigma$ (proposition 1 ci-dessus) entraîne

$$(11) \quad \delta_2\varphi_2(\alpha+\alpha') = \delta_2\varphi_2(\alpha) + \delta_2\varphi_2(\alpha') + \delta_2((\sigma\alpha).(\sigma\alpha'))$$

pour α , $\alpha' \in H_{2q}(A \otimes Z_2)$.

Remarque 2.- Soit N une algèbre différentielle graduée anticommutative (au sens strict), ayant une Z-base homogène, et munie de puissances divisées (pour les degrés pairs $\geqslant 2$) compatibles avec la différentielle de N . Si $\xi \in H_{2q}(N \otimes Z_2)$, $q \geqslant 1$, on a

$$(12) \qquad \beta_2\gamma_2(\xi) = \xi\,.\,\beta_2(\xi) \quad .$$

En effet, soit $x \in N_{2q}$ dont l'image $x' \in N_{2q} \otimes Z_2$ appartienne à la classe d'homologie ξ , et soit $dx = 2y$. On a $d\gamma_2(x) = 2yx$, d'où la relation (12).

Par contre, la relation (12) peut être en défaut pour ξ de degré impair : prenons par exemple $\xi \in H_{2q+1}(\Pi,n;Z_2)$, $n \geqslant 2$, tel que $\xi = \sigma(\alpha)$, $\alpha \in H_{2q}(\Pi,n-1;Z_2)$. D'après (5), et compte tenu de $\varphi_2(\alpha) = \gamma_2\sigma(\alpha) = \gamma_2(\xi)$, on a

$$\beta_2\gamma_2(\xi) = \xi\,.\,\beta_2(\xi) + \sigma\gamma_2(\alpha) \quad .$$

4.- L'algèbre universelle d'un module libre gradué.

Les notions ci-dessous ont pour but de permettre une description complète des algèbres $H_*(\Pi,n;Z_p)$, qui sera faite dans l'exposé suivant.

Soit un module libre (sur un anneau Λ commutatif); notons $E(M)$ l'algèbre extérieure de M , isomorphe au produit tensoriel (gauche) d'algèbres extérieures à un générateur (les générateurs étant les éléments de la base de M). On supposera toujours que M est gradué, les éléments de la base de M étant homogènes de degré impair $\geqslant 1$. Alors $E(M)$ a une graduation positive, $E_0(M)$ étant réduit aux scalaires. D'après le théorème 2 de l'Exposé n° 7, il existe sur l'algèbre graduée $E(M)$ un système unique de puissances divisées (définies pour les éléments de degré pair $\geqslant 2$). En fait, d'après la formule (13) de l'Exposé n° 7, on a la formule explicite que voici :

si $x = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$ est une somme d'éléments $x_i \in E(M)$ de degré pair $\geqslant 2$ on a

(13) $$\gamma_k(x) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} \ldots x_{i_k} \quad .$$

Ces γ_k satisfont à la relation (5) de l'Exposé n° 7, en vertu de la Proposition 4 (Exposé n° 7).

Soit à nouveau M un module (non encore supposé gradué). Considérons l'algèbre tensorielle $T(M) = \sum_{k \geqslant 0} T_k(M)$, où $T_k(M)$ est le module engendré par les $x_1 \otimes \ldots \otimes x_k$, avec $x_i \in M$. Dans $T(M)$, considérons la multiplication $*$ définie par la formule

(14) $$(x_1 \otimes \ldots \otimes x_k) * (y_1 \otimes \ldots \otimes y_h) = \sum z_1 \otimes \ldots \otimes z_{k+h} \quad ,$$

la sommation du second membre étant étendue à toutes les suites $(z_1, \ldots, z_{k+h})$ déduites de la suite $(x_1, \ldots, x_k , y_1, \ldots, y_h)$ par les permutations qui conservent l'ordre des x_i entre eux et l'ordre des y_i entre eux. La multiplication $*$ est commutative et associative.

Pour chaque k, soit $S_k(M)$ le sous-module de $T_k(M)$, formé des tenseurs <u>symétriques</u> (c'est-à-dire invariants par le groupe symétrique d'ordre k, qui opère d'une manière évidente sur $T_k(M)$). Soit $S(M) = \sum_{k \geqslant 0} S_k(M)$. Il est évident que le produit $*$ de deux éléments de $S(M)$ est dans $S(M)$. Ainsi $S(M)$ est une <u>algèbre commutative</u>.

Supposons désormais que M ait une base (e_i), supposée totalement ordonnée. Il est immédiat que $S_k(M)$ admet pour base l'ensemble des éléments $e_{i_1 \ldots i_k}$, où $i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k$, en notant $e_{i_1 \ldots i_k}$ la somme des éléments <u>distincts</u> déduits de $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k}$ par permutation des facteurs (exemple : $e_{111} = e_1 \otimes e_1 \otimes e_1$; $e_{112} = e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_1$). Soit M_i le sous-module de M engendré par l'élément e_i ; $S(M_i) = T(M_i)$ a pour base 1, e_i, e_{ii} ($= e_i \otimes e_i$), e_{iii}, ... Les éléments de la base de $S(M)$ s'écrivent d'une seule manière sous la forme

$$u_{i_1} * u_{i_2} * \ldots * u_{i_k} \text{ , avec } i_1 < i_2 < \ldots < i_k \quad ,$$

en notant u_{i_k} un élément quelconque de la base de $S(M_i)$. Ceci prouve que l'application $\bigotimes_i S(M_i) \longrightarrow S(M)$, déduite des injections $M_i \longrightarrow M$, et de la multiplication $*$ de $S(M)$, est un <u>isomorphisme d'algèbres</u>.

Supposons maintenant que M soit gradué, les éléments e_i ayant des <u>degrés pairs</u> $\geqslant 2$. Alors $S(M)$ est gradué ; de plus :

<u>Proposition 4.- Il existe sur l'algèbre graduée commutative</u> $S(M)$ <u>un système de puissances divisées satisfaisant aux conditions</u> (1), (2), (3), (4), (5) <u>de l'Exposé n° 7, et à la condition</u>

(C) $\qquad \gamma_k(x) = x \otimes \ldots \otimes x \quad$ (k fois) pour $x \in M$.

<u>Un tel système de puissances divisées est unique</u>.

<u>Démonstration</u> : supposons qu'un tel système existe. Alors $\gamma_k(e_i) = e_{i\ldots i}$, et, d'après la relation (5) de l'Exposé n° 7, $S(M_i)$ est stable pour les γ_k , qui sont déterminés sans ambigüité sur $S(M_i)$; $S(M_i)$ est alors isomorphe à l'<u>algèbre des polynômes divisée</u> à un générateur e_i . L'unicité des γ_k sur les sous-algèbres $S(M_i)$ entraîne, d'après le théorème 2 de l'Exposé n° 7, l'unicité sur le produit tensoriel $\bigotimes_i S(M_i) = S(M)$. Démontrons maintenant l'existence : nous définissons d'abord les γ_k sur chaque sous-algèbre $S(M_i)$, identifiée à l'algèbre des polynômes divisée à un générateur e_i . Ces puissances divisées se prolongent au produit tensoriel $\bigotimes_i S(M_i) = S(M)$, d'après le théorème 2 de l'Exposé n° 7, et satisfont à (1), (2), (3), (4), (5) de l'Exposé n° 7 (cf. Proposition 4 de l'Exposé n° 7). Il reste à vérifier que les γ_k ainsi définis satisfont à la condition (C) de l'énoncé. Or si (C) est vérifiée pour deux éléments x et y de M , elle l'est pour $x + y$ et pour λx (quel que soit λ dans l'anneau de base) ; et comme (C) est vraie pour les e_i , (C) est vraie pour tout $x \in M$.

Nous pouvons maintenant définir l'<u>algèbre universelle</u> d'un module M ayant une base (e_i) formée d'éléments homogènes (de degrés > 0). Soit M^- le sous-module engendré par les e_i de degré impair, et M^+ le sous-module engendré par les e_i de degré pair. Soit $U(M)$ le produit tensoriel $E(M^-) \otimes S(M^+)$, produit tensoriel d'algèbres graduées anticommutatives ; c'est une algèbre graduée anticommutative (au sens strict). Il existe sur $U(M)$ un système unique de puissances divisées satisfaisant aux conditions (1), (2), (3), (4), (5) de l'Exposé n° 7, ainsi qu'à la condition (C) appliquée aux $x \in M^+$: cela résulte de ce qui précède et d'une nouvelle application du théorème 2 de l'Exposé n° 7. Comme algèbre anticommutative graduée munie de puissances divisées, $U(M)$ possède la <u>propriété universelle suivante</u> :

<u>Théorème 2</u>.- <u>Soit</u> A <u>une algèbre graduée anticommutative</u> (<u>au sens strict</u>), <u>munie de puissances divisées satisfaisant aux conditions</u> (1), (2), (3), (4') <u>et</u> (5) <u>de l'Exposé n° 7</u>. <u>Soit</u> M <u>un module libre ayant une base homogène</u> (<u>graduation positive</u>), <u>et soit</u> $f : M \longrightarrow A$ <u>une application linéaire conservant les degrés</u>. <u>Alors</u> f <u>se prolonge</u>, <u>d'une seule manière</u>, <u>en un homomorphisme d'algèbres graduées</u> $g : U(M) \longrightarrow A$, <u>compatible avec les puissances divisées</u>.

<u>Démonstration</u> : il suffit de poser $g(\gamma_k(e_i)) = \gamma_k(f(e_i))$ pour $\deg(e_i)$ pair, et, bien entendu, $g(e_i) = f(e_i)$ pour $\deg(e_i)$ impair. Alors g est un homomorphisme de chaque sous-algèbre $U(M_i)$ dans A, compatible avec les puissances divisées ; g se prolonge donc, d'une seule manière, en un homomorphisme d'algèbres graduées $\bigotimes_i U(M_i) \longrightarrow A$, et cet homomorphisme est compatible avec les puissances divisées, à cause des relations (3) et (4') de l'Exposé n° 7. Quant à l'unicité de g, elle est évidente, puisque g est déterminé sans ambigüité sur chaque sous-algèbre $U(M_i)$.

<u>Remarque</u> : dans le cas de la <u>caractéristique 2</u>, l'algèbre $S(M)$ sera envisagée pour tout module gradué M ayant une base formée d'éléments homogènes (de degrés > 0), <u>quelle que soit la parité de la graduation</u>. La proposition 4 est encore valable ; les $\gamma_k(x)$ sont alors définis pour tout $x \in S(M)$ de degré > 0. Le théorème 2 est remplacé par le suivant (même démonstration) :

<u>Théorème 2 bis</u>.- <u>Soit</u>, <u>en caractéristique 2</u>, <u>une algèbre graduée</u> A <u>strictement anticommutative</u>, <u>munie de puissances divisées satisfaisant aux conditions</u> (1), (2), (3), (4") <u>et</u> (5) <u>de l'Exposé n° 7</u>.

<u>Soit</u> M <u>un module libre ayant une base homogène</u> (<u>graduation positive</u>), <u>et soit</u> $f : M \longrightarrow A$ <u>une application linéaire conservant les degrés</u>, <u>et dont l'image est formée d'éléments pour lesquels les</u> γ_k <u>sont définis</u> (ceci n'est une restriction que pour les éléments de degré 1). <u>Alors</u> f <u>se prolonge d'une seule manière en un homomorphisme d'algèbres graduées</u> $g : S(M) \longrightarrow A$, <u>compatible avec les puissances divisées</u>.