SÉMINAIRE HENRI CARTAN

H. CARTAN

Opérations dans les constructions acycliques

Séminaire Henri Cartan, tome 7, n° 1 (1954-1955), exp. n° 6, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_1_A6_0>

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

OPÉRATIONS
DANS LES CONSTRUCTIONS ACYCLIQUES
(Exposé de H. CARTAN, 15-12-1954)

1.- Suspension.

Soit A une DGA-algèbre, et soit M un DGA-module sur A, acyclique. On notera N le module quotient associé $\bar{M}$ (cf. Exp. 2, n° 4) et $\bar{d}$ son opérateur différentiel. Supposons donné un A-homomorphisme $A \longrightarrow M$, qui soit biunivoque et compatible avec les graduations, les opérateurs différentiels et les augmentations ; ceci permettra d'identifier désormais A à un sous-A-module de M (Exemple : si on a une construction multiplicative (A,N,M), on prend l'application $a \longrightarrow a \otimes 1$ de A dans $A \otimes N = M$).

Soit $a \in A$, homogène de degré $q \geqslant 0$, tel que $da = 0$. Puisque M est acyclique, il existe $m \in M_{q+1}$ tel que $dm = a - \varepsilon a$ (observer d'ailleurs que $\varepsilon a = 0$ si $q \geqslant 1$). Soit $\bar{m}$ l'image de m dans N ; on a $\bar{d}\,\bar{m} = 0$. L'élément de $H_{q+1}(N)$, classe d'homologie du cycle $\bar{m}$, ne dépend que de a, non du choix de m ; car on peut tout au plus remplacer m par $m + dm'$, et $\bar{m}$ est remplacé par $\bar{m} + \bar{d}\,\bar{m'}$. De plus, la classe d'homologie de $\bar{m}$ ne dépend que de la classe d'homologie de a dans $H_q(A)$; car si on remplace a par $a + da'$, il suffit de remplacer m par $m + a'$, et $\bar{m}$ n'est pas changé. Enfin, il est évident que la classe d'homologie de $\bar{m}$ dépend linéairement de celle de a. On a ainsi défini une application linéaire, appelée suspension :

$$\sigma : H_q(A) \longrightarrow H_{q+1}(N) , \qquad q \geqslant 0 .$$

Cette application est naturelle vis-à-vis des DGA-homomorphismes de DGA-modules (Exp. 2, déf. 4.2) : si $g : M \longrightarrow M'$ est un tel homomorphisme, compatible avec $f : A \longrightarrow A'$, et si $\bar{g} : N \longrightarrow N'$ est l'homomorphisme des modules associés, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
H_q(A) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "f_*"] & H_{q+1}(N) \arrow[d, "\bar{g}_*"] \\
H_q(A') \arrow[r, "\sigma'"] & H_{q+1}(N')
\end{tikzcd}$$

<u>Définition</u>.- Dans une algèbre graduée munie d'une augmentation ε, on dit qu'un élément est <u>décomposable</u> s'il a la forme $\sum_i u_i v_i$, avec $\varepsilon u_i = 0$ et $\varepsilon v_i = 0$. En particulier, si les scalaires sont les seuls éléments de degré 0, alors les éléments décomposables sont les éléments de la forme $\sum_i u_i v_i$, avec $\deg(u_i) > 0$, $\deg(v_i) > 0$.

<u>Proposition 1.- Le noyau de la suspension</u> σ <u>contient les éléments décomposables de</u> $H_*(A)$.

<u>Démonstration</u>.- Soit $a = bc$, b et c étant des cycles homogènes de A d'augmentation nulle. Il existe $x \in M$ tel que $dx = b$; alors $d(xc) = a$, et on peut prendre $m = xc$ pour calculer la suspension de a. Or l'image de xc dans N est nulle, puisque $\varepsilon c = 0$.

2.- <u>Calcul de la suspension à l'aide d'un opérateur d'homotopie</u>.

Supposons dans M un endomorphisme s, de degré $+1$, tel que $dsx + sdx = x - \eta x$ pour tout $x \in M$. Soit $\bar{s} : A \longrightarrow N$ le composé de l'injection $A \longrightarrow M$, de $s : M \longrightarrow M$, et de la projection $M \longrightarrow N$. On a

$$(1) \qquad \bar{d}\,\bar{s}\,x + \bar{s}dx = 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in A .$$

Ainsi l'application $\bar{s}$, qui augmente le degré de un, anticommute avec les opérateurs différentiels de A et N. Par passage à l'homologie, $\bar{s}$ définit une application $H_*(A) \longrightarrow H_*(N)$, <u>qui n'est autre que la suspension</u> σ.

La vérification est immédiate : on peut prendre $m = sa$, car si $da = 0$ on a $dsa = a - \varepsilon a$. Alors l'image de m dans N est $\bar{s}a$.

<u>Exemple</u> : dans la <u>bar construction</u> $\mathcal{B}(A)$, on a explicité un opérateur d'homotopie s (Exp.3, n° 6). L'application $\bar{s}$ de A dans $\bar{\mathcal{B}}(A)$ est tout simplement : $a \longrightarrow [a]$. Par passage à l'homologie, on obtient l'application de suspension σ : $H_q(A) \longrightarrow H_{q+1}(\bar{\mathcal{B}}(A))$.

Puisque la suspension est "naturelle", on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
H_q(A^{(n)}) & \xrightarrow{\ \sigma\ } & H_{q+1}(A^{(n+1)}) \\
\Big\downarrow u^{(n)} & & \Big\downarrow u^{(n+1)} \\
H_q(\bar{\mathcal{B}}^{(n)}(A)) & \xrightarrow{\ \sigma\ } & H_{q+1}(\bar{\mathcal{B}}^{(n+1)}(A))
\end{array}$$

où $A^{(n)}$ et $A^{(n+1)}$ désignent la n-ième algèbre initiale et la n-ième algèbre finale d'une construction itérée (multiplicative et acyclique), dont l'algèbre initiale A est anticommutative ; $u^{(n)}$ et $u^{(n+1)}$ désignent les homomorphismes "canoniques" (Exp.5, n° 3).

3.- Exemples.

Théorème 1.- Soit A une DGA-algèbre anticommutative. On a $H_q(\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A)) = 0$ pour $0 < q < n$,
et la suspension $\sigma : H_q(\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A)) \longrightarrow H_{q+1}(\overline{\mathcal{B}}^{(n+1)}(A))$
est un isomorphisme pour $n \leqslant q < 2n$, un épimorphisme pour $q = 2n$. En outre, pour $n \geqslant 0$, le noyau de $H_{2n}(\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A)) \longrightarrow H_{2n+1}(\overline{\mathcal{B}}^{(n+1)}(A))$ est formé des éléments "décomposables" de $H_{2n}(\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$; donc, pour $n \geqslant 1$, ce noyau se compose des sommes de produits d'éléments de $H_n(\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$.

Démonstration : tout d'abord, on vérifie, par récurrence sur n, que $\overline{\mathcal{B}}_q^{(n)}(A) = 0$ pour $0 < q < n$. Cette assertion est triviale pour $n = 0$ et $n = 1$; supposons-la prouvée pour n $(n \geqslant 1)$. Alors les éléments $\neq 0$ de $\overline{\mathcal{B}}^{(n+1)}(A)$, de plus bas degré > 0, ont la forme $[a]$, où $a \in \overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A)$, donc $\deg(a) \geqslant n$, et par suite $\deg([a]) \geqslant n+1$.

Dans $\overline{\mathcal{B}}^{(n+1)}(A)$, tout élément de degré $q+1$, avec $0 \leqslant q \leqslant 2n$, est de la forme $[a]$, où $a \in \overline{\mathcal{B}}_q^{(n)}(A)$. Ainsi l'application $\bar{s} : \overline{\mathcal{B}}_q^{(n)}(A) \longrightarrow \overline{\mathcal{B}}_{q+1}^{(n+1)}(A)$ est isomorphisme pour $q \leqslant 2n$. En passant à l'homologie, on voit que $H_q(\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A)) \longrightarrow H_{q+1}(\overline{\mathcal{B}}^{(n+1)}(A))$ est un isomorphisme pour $q < 2n$, et un épimorphisme pour $q = 2n$. Pour $q = 2n$, le noyau se compose des classes des cycles $a \in \overline{\mathcal{B}}_{2n}^{(n)}(A)$ dont l'image dans $\overline{\mathcal{B}}_{2n+1}^{(n+1)}(A)$ est le bord d'un élément de degré $2n + 2$, somme d'éléments de la forme $[b,c]$, où b et c satisfont aux conditions suivantes : b et c sont des éléments de degré n de $\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A)$ dont le bord est nul pour une raison de degré ; de plus, si $n = 0$, on peut supposer que $\varepsilon b = 0$ et $\varepsilon c = 0$ (puisque $[b,c] = 0$ chaque fois que b ou c est un scalaire). En utilisant la formule (10) de l'Exposé 3, on trouve

$$\bar{d}\,[b,c] = (-1)^{n+1}[bc]\ .$$

Ainsi, le noyau de $H_{2n}(\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A)) \longrightarrow H_{2n+1}(\overline{\mathcal{B}}^{(n+1)}(A))$ se compose des classes d'homologie des sommes d'éléments de la forme bc , où b et c sont des cycles de A tels que $\varepsilon b = 0$, $\varepsilon c = 0$. Ceci achève la démonstration.

Le théorème 1 s'applique au cas où $A = \Lambda(\pi)$, π étant un groupe abélien. Alors $H_*(\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A)) \approx H_*(\pi, n; \Lambda)$, et on obtient les propriétés connues de la suspension des algèbres d'Eilenberg-Mac Lane. De plus :

Théorème 2.- Soit π un groupe (abélien ou non), et soit $A = Z(\pi)$ l'algèbre du groupe π. La suspension $\sigma : Z(\pi) \longrightarrow H_1(\overline{\mathcal{B}}^{(1)}(A)) \approx H_1(\pi, 1; Z)$ (homologie du groupe discret π à coefficients entiers), si on la restreint à π (plongé canoniquement dans $Z(\pi)$), donne

$$\sigma : \pi \longrightarrow H_1(\pi , 1 ; Z)$$

qui est un homomorphisme du groupe π sur le groupe abélien $H_1(\pi, 1; Z)$. Son noyau est le sous-groupe des commutateurs de π .

(Interprétation géométrique : le premier groupe d'homologie d'un espace connexe est isomorphe au groupe fondamental rendu abélien).

Démonstration : d'après la proposition 1, σ est nul sur les éléments de $Z(\pi)$ de la forme $(x-1)(y-1)$, avec $x \in \pi$, $y \in \pi$ (1:élément neutre de π). D'où $\sigma(xy-1) = \sigma(x-1) + \sigma(y-1)$, ou encore $\sigma(xy) = \sigma(x) + \sigma(y)$. Ainsi σ est un homomorphisme du groupe π dans le groupe abélien $H_1(\pi,1;Z)$. Comme les éléments $[x]$, où $x \in \pi$ est $\neq 1$, forment une base de $\overline{\mathcal{B}}_1(A)$, dont tous les éléments sont des cycles, σ applique π sur $H_1(\pi,1;Z)$. Dans $\overline{\mathcal{B}}_1(A)$, les bords des éléments de degré 2 sont les combinaisons linéaires d'éléments de la forme $[x] + [y] - [xy]$, avec $x \in \pi$, $y \in \pi$. Ceci prouve à nouveau que $\sigma(xy) = \sigma(x) + \sigma(y)$. Il est immédiat que le noyau de σ contient les éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$, qui engendrent un sous-groupe noté $[\pi, \pi]$. Pour montrer que $[\pi, \pi]$ est exactement le noyau, il suffit de définir un homomorphisme τ : $H_1(\pi,1;Z) \longrightarrow \pi/[\pi, \pi]$, et de vérifier que $\tau\sigma$ et $\sigma\tau$ sont les applications identiques. Or l'application qui envoie $[x]$ dans la classe de x modulo $[\pi, \pi]$, se prolonge par linéarité (puisqu'on envoie dans un groupe abélien) ; l'application prolongée envoie $[x] + [y] - [xy]$ dans l'élément neutre, donc passe au quotient et définit $\tau : H_1(\pi,1;Z) \longrightarrow \pi/[\pi, \pi]$. Il est évident que $\tau\sigma$ et $\sigma\tau$ sont les applications identiques.

Supposons maintenant π abélien. D'après le théorème 1, les applications $H_1(\pi,1;Z) \longrightarrow H_2(\pi,2;Z) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_n(\pi,n;Z) \longrightarrow \cdots$ sont toutes des isomorphismes

En composant avec l'isomorphisme précédent $\Pi \longrightarrow H_1(\Pi,1;Z)$, on trouve des isomorphismes canoniques

$$\Pi \approx H_n(\Pi,n;Z) \qquad (\Pi \text{ abélien}),$$

définis par la suspension itérée.

4.- La transpotence.

On va, sous certaines hypothèses, définir une nouvelle opération dans les constructions acycliques modulo p (p premier), c'est-à-dire les constructions acycliques sur un anneau de base Λ tel que $p = 0$ dans Λ .

Soit (A,N,M) une construction multiplicative, anticommutative, acyclique, de caractéristique p (p premier).

On notera ${}_p(A_{2q})$ le sous-module des $a \in A_{2q}$ (de degré pair 2q) tels que $da = 0$ et $a^p = (\varepsilon a)^p$, ou, ce qui revient au même, $da = 0$ et $(a - \varepsilon a)^p = 0$. Pour $q \geqslant 1$, ce sont donc les a tels que $da = 0$ et $a^p = 0$. Observons que $\sum_q {}_p(A_{2q})$ est une sous-algèbre de A . On va définir, pour chaque q , une application

$$\psi : {}_p(A_{2q}) \longrightarrow H_{2pq+2}(N) .$$

Soit donc $a \in A_{2q}$ tel que $da = 0$, $(a - \varepsilon a)^p = 0$. Puisque M est acyclique, il existe $x \in M_{2q+1}$ tel que

$$(2) \qquad dx = a - \varepsilon a .$$

$(a - \varepsilon a)^{p-1}x$ est un cycle de M ; il existe donc $y \in M_{2pq+2}$ tel que

$$(3) \qquad dy = (a - \varepsilon a)^{p-1}x .$$

Soit $\bar{y}$ l'image de y dans l'algèbre quotient N ; on a $\bar{d}\,\bar{y} = 0$, puisque $p - 1 > 0$ et que $a - \varepsilon a$ est d'augmentation nulle.

Proposition 2.- Si à l'élément $a \in {}_p(A_{2q})$ on associe $x \in M_{2q+1}$ et $y \in M_{2pq+2}$ satisfaisant à (2) et (3), la classe de $\bar{d}$-homologie de $\bar{y}$ est un élément de $H_{2pq+2}(N)$ qui est indépendant des choix de x et y . D'où une application $\psi : {}_p(A_{2q}) \longrightarrow H_{2pq+2}(N)$.

Démonstration : on peut remplacer x par $x + dx'$, $x' \in M_{2q+2}$. Alors y peut être remplacé par $y + (a - \varepsilon a)^{p-1}x' + dy'$, $y' \in M_{2pq+3}$. Donc $\bar{y}$ est remplacé par $\bar{y} + \bar{d}\,\bar{y'}$. C.Q.F.D.

Proposition 3.- L'application ψ s'annule sur les produits bc, où b et c sont des cycles de A (de degrés quelconques, non nécessairement pairs) tels que $\varepsilon b = 0$, $c^p = 0$.

Démonstration : Il existe $u \in M$ tel que $du = b$. Alors $d(uc) = bc$. Prenons donc $x = uc$; on cherche y tel que $dy = (bc)^{p-1}x = \pm ub^{p-1}c^p = 0$. On peut donc prendre $y = 0$, d'où la proposition.

Proposition 4.- Lorsque l'entier premier p est impair, l'application ψ est additive.

Démonstration : soient a et a' deux éléments de ${}_p(A_{2q})$; on peut supposer $\varepsilon a = 0$, $\varepsilon a' = 0$ (sinon, remplacer a et a' par $a - \varepsilon a$ et $a' - \varepsilon a'$).

On va montrer que $\psi(a + a') = \psi(a) + \psi(a')$. Soient $x \in M$ et $x' \in M$ tels que $dx = a$, $dx' = a'$, donc $d(x+x') = a + a'$. On vérifie la relation

$$(a+a')^{p-1}(x+x') - a^{p-1}x - a'^{p-1}x' = dw ,$$

avec $w = (a^{p-2} - a^{p-3}a' + a^{p-4}a'^2 + \dots - a'^{p-2})\, xx'$.

Puisque $p \geqslant 3$, l'image $\bar{w}$ de w dans N est nulle. Soient alors y , y' et z des éléments de M tels que

$$dy = a^{p-1}x , \quad dy' = a'^{p-1}x' , \quad dz = (a+a')^{p-1}(x+x') .$$

On a $d(z-y-y'-w) = 0$; puisque M est acyclique, l'image de $z-y-y'-w$ dans N est un $\bar{d}$-bord. Or cette image est $\bar{z}-\bar{y}-\bar{y'}$. C.Q.F.D.

Remarque : on verra plus tard que ψ , pour $p = 2$, n'est pas additive.

Proposition 5.- Soit q un entier $\geqslant 1$. Supposons que :

$(I)_q$ $a^p = 0$ pour tout $a \in A_{2q}$;

$(II)_q$ $b(db^{p-1})$ soit le bord d'un élément de A , pour tout $b \in A_{2q+1}$.

Alors l'application ψ passe à l'homologie et définit une application

$$\varphi : H_{2q}(A) \longrightarrow H_{2pq+2}(N) .$$

(Cette application sera additive pour p impair, d'après la proposition 4).

Démonstration : $\psi(a)$ est défini pour tout $a \in A_{2q}$ tel que $da = 0$. On veut montrer que $\psi(a)$ ne dépend que de la classe d'homologie de a dans $H_{2q}(A)$. Remplaçons a par $a' = a + db$, $b \in A_{2q+1}$. Posons $x' = x + b$; on a bien $dx' = a'$. On vérifie la relation

$$a'^{p-1}x' - a^{p-1}x = dv + b(db)^{p-1} ,$$

avec $v = b(a'^{p-2} + a'^{p-3}a + a'^{p-4}a^2 + \dots + a^{p-2})x'$.

L'image de v dans N est nulle ; d'autre part, d'après l'hypothèse (II), $b(db)^{p-1} = du$, où $u \in A$ a une image nulle dans N. Soient alors $y \in M$ et $y' \in M$ tels que $dy = a^{p-1}x$, $dy' = a'^{p-1}x'$; on a $d(y'-y-v-u) = 0$; puisque M est acyclique, l'image de $y'-y-v-u$ dans N est un $\bar{d}$-bord. Or cette image est $\bar{y'} - \bar{y}$. C.Q.F.D.

Ainsi, lorsque les hypothèses $(I)_q$ et $(II)_q$ sont remplies ($q \geq 1$), l'application $\varphi : H_{2q}(A) \longrightarrow H_{2pq+2}(N)$ est définie ; on l'appellera la transpotence. Si on suppose en outre que

$$(I') \quad a^p = 0 \text{ pour tout } a \in A \text{ de degré } > 0 ,$$

alors, d'après la proposition 3, le noyau de la transpotence contient les éléments décomposables de $H_{2q}(A)$, au moins pour p premier impair (pour que la transpotence soit additive).

Voici des cas où la proposition 5 est applicable :

Proposition 6.- Si la DGA-algèbre A est de la forme $\bar{\mathcal{B}}(C)$, où C est anticommutative, alors A vérifie (I'). Si de plus C est anticommutative et vérifie (I'), alors $A = \bar{\mathcal{B}}(C)$ vérifie $(II)_q$ pour tout $q \geq 1$.

Démonstration : si $A = \bar{\mathcal{B}}(C)$, C anticommutative, on sait que $a^2 = 0$ pour tout a de degré impair (Exp.4, th.4) ; a fortiori, $a^p = 0$. Soit maintenant $a \in \bar{\mathcal{B}}(C)$ de degré pair ≥ 2 ; on a $d(a^p) = 0$, d désignant la différentielle dans l'algèbre acyclique $\mathcal{B}(C)$. Il en résulte (cf. la propriété (B), Exp. 3, th3) que $a^p = 0$.

Supposons de plus que C satisfasse à (I') ; comme $\overline{\mathfrak{B}}(C)$ y satisfait aussi (d'après ce qu'on vient de démontrer), on a $u^p = 0$ pour tout $u \in \mathfrak{B}(C) = C \otimes \overline{\mathfrak{B}}(C)$ de degré pair (car u est une somme d'éléments de degré pair, dont chacun est de la forme $c \otimes a$, avec $c \in C$, $a \in \overline{\mathfrak{B}}(C)$). Donc si $b \in \overline{\mathfrak{B}}(C)$ est de degré $2q+1$ $(q \geq 1)$, on a $(db)^p = 0$, la différentielle d étant prise au sens de $\mathfrak{B}(C)$. Ainsi $b(db)^{p-1}$ est un cycle de $\mathfrak{B}(C)$, donc son image $b(\bar{d}b)^{p-1}$ dans l'algèbre quotient $\overline{\mathfrak{B}}(C)$ est un $\bar{d}$-bord. Ceci achève la démonstration.

Observons que toute DGA-algèbre A dont tous les éléments sont de degré 0 satisfait trivialement à (I') et à $(II)_q$ pour $q \geq 1$.
De tout ce qui précède résulte :

Théorème 3.- Soit A une DGA-algèbre commutative de degré 0, sur un anneau Λ de caractéristique p (p premier). L'application $\psi : {}_pA \longrightarrow H_2(\overline{\mathfrak{B}}^{(1)}(A))$ est additive si p est impair. La transpotence $\varphi : H_{2q}(\overline{\mathfrak{B}}^{(n)}(A)) \longrightarrow H_{2pq+2}(\overline{\mathfrak{B}}^{(n+1)}(A))$ est définie pour tout $n \geq 1$ et tout $q \geq 1$; elle est additive si p est impair, et dans ce cas son noyau contient les éléments décomposables.

Remarque : comme la transpotence est une application évidemment "naturelle" elle pourra être "calculée" dans n'importe quelle construction multiplicative itérée, acyclique.

5.- Exemples.

Nous prenons $A = \Lambda(\Pi)$, Π groupe abélien, $\Lambda = Z_p$ (corps des entiers modulo p premier). La transpotence

$$\varphi : H_{2q}(\Pi,n;Z_p) \longrightarrow H_{2pq+2}(\Pi,n+1;Z_p)$$

est définie pour $n \geq 1$, $q \geq 1$; elle est linéaire si p est impair.

Etudions maintenant l'application ${}_pA \longrightarrow H_2(\Pi,1;Z_p)$. Le groupe Π étant canoniquement plongé dans l'algèbre $Z_p(\Pi)$, les éléments x du sous-groupe ${}_p\Pi$ (éléments "d'ordre p" de Π, c'est-à-dire tels que $x^p = 1$) sont dans ${}_pA$. On a donc une application

$$\psi : {}_p\Pi \longrightarrow H_2(\Pi,1;Z_p) .$$

Cette application est un homomorphisme de groupes si p est impair. En effet, ψ est additive, et $\psi((x-1)(y-1)) = 0$ lorsque $x^p = 1$ et $y^p = 1$, d'après la proposition 3.

Rappelons (théorème 1 ci-dessus) que le noyau de la suspension

$$H_2(\Pi,1;Z_p) \longrightarrow H_3(\Pi,2;Z_p)$$

est formé des éléments décomposables de $H_2(\Pi,1;Z_p)$ (i.e : sommes de produits d'éléments de $H_1(\Pi,1;Z_p)$).

Théorème 4.- L'application composée

$$_p\Pi \xrightarrow{\psi} H_2(\Pi,1;Z_p) \xrightarrow{\sigma} H_3(\Pi,2;Z_p)$$

est un isomorphisme du groupe $_p\Pi$ sur le groupe $H_3(\Pi,2;Z_p)$, même pour $p = 2$

Corollaire : pour p premier impair l'application ψ définit une décomposition directe canonique $H_2(\Pi,1;Z_p) \approx {_p\Pi} + G$, G désignant le sous-groupe des éléments décomposables.

Démonstration du théorème 4 : L'application $\sigma \circ \psi : {_p\Pi} \longrightarrow H_3(\Pi,2;Z_p)$ est naturelle et commute avec les limites directes. Pour montrer que c'est un isomorphisme, il suffit de le faire quand Π est de type fini. De plus $\sigma \circ \psi$ commute avec les sommes directes, en vertu de l'isomorphisme $H_*(\Pi \times \Pi',2;Z_p) \approx$ $\approx H_*(\Pi,2;Z_p) \otimes_{Z_p} H_*(\Pi',2;Z_p)$ (Exp.2, n° 3), et compte tenu du fait que $H_1(\Pi,2;Z_p) = 0$ (théorème 1 ci-dessus). Bref, il suffit de montrer que $\sigma \circ \psi$ est un isomorphisme dans le cas où Π est un groupe cyclique. C'est trivial si Π est cyclique infini, car alors $_p\Pi = (1)$, et $H_2(\Pi,1;Z_p) = 0$ comme bien connu, d'où $H_3(\Pi,2;Z_p) = 0$ par suspension. Il reste à examiner le cas où Π est cyclique d'ordre h. On va d'ailleurs voir que, dans ce cas, le sous-groupe G des éléments décomposables de $H_2(\Pi,1;Z_p)$ est nul, de sorte que tout revient à prouver que $\psi : {_p\Pi} \longrightarrow H_2(\Pi,1;Z_p)$ est un isomorphisme quand Π est cyclique d'ordre h.

Pour calculer ψ dans ce cas, on va utiliser une construction particulière, d'ailleurs classique. On a $A = Z_p(\Pi)$; soit a un générateur de Π ; alors $a^h = 1$, et $_p\Pi$ se compose des a^k tels que $pk \equiv 0 \pmod h$. Comme construction acyclique (A,N,M), nous prenons ceci : $N = E(1) \otimes_{Z_p} P(2)$, où $E(1)$ désigne l'algèbre extérieure à un générateur v de degré 1 (et à coefficients dans Z_p), et où $P(2)$ désigne l' "algèbre des polynômes divisée" à un générateur u de degré 2 ; d'une façon précise, $P(2)$ a une base formée de $1, u, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}, \ldots$, avec $u^{(n)}$ de degré $2n$, et la loi de multiplication $u^{(n)}u^{(m)} = \frac{(n+m)!}{n!m!} u^{(n+m)}$.

Dans l'algèbre $M = A \otimes N = Z_p(\Pi) \otimes E(1) \otimes P(2)$, on considère l'opérateur différentiel d défini par

$$\left.\begin{aligned} &(4) \qquad d(vu^{(n)}) = (a-1)u^{(n)} \\ &(5) \qquad du^{(n+1)} = (1+a+\ldots+a^{h-1})vu^{(n)} \end{aligned}\right\} \quad (n \geqslant 0)$$

On vérifie que M est bien une DGA-algèbre acyclique. Considérons la sous-algèbre $\tilde{N}$ $(N \subset \tilde{N} \subset M)$ ayant pour base (sur Z_p) les éléments $u^{(n)}$ $(n \geqslant 0)$ et $a^k vu^{(n)}$ $(n \geqslant 0,\ 0 \leqslant k \leqslant h-2)$. On vérifie que la donnée de $\tilde{N}$ définit une construction <u>spéciale</u>, dont l'opérateur d'homotopie s est le suivant :

$$(6) \qquad s(a^k u^{(n)}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ (1+a+\ldots+a^{k-1})vu^{(n)} & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant h-1 \end{cases}$$

$$(7) \qquad s(a^k vu^{(n)}) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant h-2 \\ u^{(n+1)} & \text{si } k = h-1 . \end{cases}$$

(Remarque : tout ceci vaudrait pour un anneau quelconque de coefficients, et pas seulement pour Z_p). Sur l'<u>algèbre finale</u> $N = E(1) \otimes P(2)$, l'opérateur différentiel $\bar{d}$ est donné par

$$(8) \qquad \bar{d}(vu^{(n)}) = 0 \quad , \quad \bar{d}u^{(n+1)} = hvu^{(n)} .$$

Ceci montre déjà que $H_1(\Pi, 1; Z_p)$ se compose des multiples d'un élément dont le carré est nul, d'où $G = 0$.

Il reste à expliciter l'application ψ, et pour cela à trouver dans M des éléments x et y tels que $dx = a^k - 1$, $dy = (a^k-1)^{p-1}x$. En utilisant l'opérateur d'homotopie s, on trouve

$$x = (1+a+\ldots+a^{k-1})v \ , \qquad \text{d'où}$$
$$(a^k-1)^{p-1}x = \sum_{0 \leqslant i \leqslant pk-1} a^i v \ ,$$

d'où enfin $y = (pk/h)u$. Ainsi ψ envoie a^k (k entier tel que pk/h soit entier) dans la classe d'homologie de $(pk/h)u$. C'est donc bien un isomorphisme de ${}_p\pi$ sur $H_2(\pi, 1; Z_p)$.