H. Cartan

DGA-modules (suite), notion de construction

Séminaire Henri Cartan, tome 7, nº 1 (1954-1955), exp. nº 3, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_1_A3_0>

DGA-MODULES (Suite)
NOTION DE CONSTRUCTION
(Exposé de H. CARTAN, 24.11.1954)

----

1. Rappels concernant la suite spectrale.

Le théorème 2, énoncé sans démonstration à la fin de l'exposé précédent, sera démontré ci-dessous (n° 4) comme conséquence d'un théorème dû à J. C. Moore (théorème A ci-dessous, n° 2). Auparavant, quelques rappels seront utiles.

Soit M un Λ-module différentiel gradué et filtré. Par là nous entendrons que :

M est gradué : $M = \sum_n M_n$, $M_n = 0$ pour $n < 0$;

M est muni d'un Λ-endomorphisme d tel que $dd = 0$, $dM_n \subset M_{n-1}$;

M est muni d'une filtration croissante, ce qui veut dire qu'on a associé à tout entier p un sous-module $F_p(M)$ de manière que :

$$\begin{cases} F_p(M) = 0 \text{ pour } p < 0 , \quad F_p(M) \subset F_{p+1}(M) , \\ F_p(M) = \sum_n F_p(M_n) , \text{ en notant } F_p(M_n) \text{ le sous-module } F_p(M) \cap M_n , \\ M_p \subset F_p(M) , \quad F_p(M) \text{ est stable pour } d. \end{cases}$$

Dans une telle situation, on sait (voir par exemple J.P. Serre, Ann. of Math. 54, 1951, p. 425-505, Chap. I ; et H. Cartan-S. Eilenberg, Homological Algebra, Chap. XV, à paraître) que M définit une suite spectrale. On a une suite de modules bigradués $E^r(M) = \sum_{p,q} E^r_{p,q}(M)$, $r = 0, 1, 2, \ldots$ (avec $E^r_{p,q}(M) = 0$ pour $p < 0$ ou $q < 0$), et $E^r(M)$ est muni d'un opérateur différentiel d^r tel que

$$d^r d^r = 0 , \quad d^r(E^r_{p,q}) \subset E^r_{p-r,q+r-1} .$$

$E^{r+1}(M)$, abstraction faite de son opérateur d^{r+1}, est le module d'homologie de

$E^r(M)$. Pour p et q donnés, le module $E^r_{p,q}(M)$ est indépendant de r pour r assez grand ; d'où un module bigradué $E^\infty(M)$. Filtrons $H_n(M)$ en notant $F_p(H_n(M))$ l'image, dans $H_n(M)$, des cycles de $F_p(M_n)$; alors le module bigradué associé au module gradué-filtré $H(M)$, c'est-à-dire $E^\infty(M)$ est

$$E^\infty_{p,q}(M) \approx F_p(H_{p+q}(M))/F_{p-1}(H_{p+q}(M)).$$

Rappelons enfin que $E^0(M)$ est le module bigradué associé à M :

$$E^0_{p,q}(M) = F_p(M_{p+q})/F_{p-1}(M_{p+q}).$$

Soient maintenant M et M' deux Λ-modules différentiels gradués et filtrés, et soit $g: M \to M'$ un Λ-homomorphisme compatible avec les graduations, les filtrations et les opérateurs différentiels. On sait qu'alors g induit, pour chaque r, un homomorphisme $g^r: E^r(M) \to E^r(M')$ compatible avec les bigraduations et les opérateurs d^r, et que g^{r+1} se déduit de g^r par passage à la d^r-homologie. Dans une telle situation, on va, avec J.C. Moore, introduire un troisième module différentiel gradué et filtré M'', appelé le "mapping cylinder" de l'application $g : M \to M'$.

On prend $M'' = M' + M$ (somme directe), avec la graduation $M''_n = M'_n + M_{n-1}$ et l'opérateur différentiel $d(x',x) = (dx' + g(x), -dx)$. Les applications $x' \to (x',0)$ et $(x',x) \to x$ définissent une suite exacte de complexes $0 \to M' \to M'' \to M \to 0$ à laquelle correspond une suite exacte d'homologie

$$(1) \qquad \cdots \to H_{n+1}(M'') \to H_n(M) \to H_n(M') \to H_n(M'') \to \cdots ,$$

et si on explicite l'homomorphisme médian $H_n(M) \to H_n(M')$, on voit que c'est l'homomorphisme g_* déduit de g par passage à l'homologie.

Définissons sur M'' la filtration croissante

$$(2) \qquad F_p(M'') = F_p(M') + F_{p-1}(M) .$$

Alors M'' est bien un module différentiel gradué et filtré (au sens précis défini plus haut). La décomposition directe (2) induit une décomposition directe $E^0_{p,q}(M'') = E^0_{p,q}(M') + E^0_{p-1,q}(M)$, compatible avec les différentielles d^0 ; d'où une décomposition directe

$$(3) \qquad E^1_{p,q}(M'') = E^1_{p,q}(M') + E^1_{p-1,q}(M)$$

et on va chercher comment s'exprime l'opérateur d^1 de $F^1(M'')$ dans cette décomposition. Soit $(x',x) \in F_p(M''_{p+q})$ tel que $d(x',x) \in F_{p-1}(M''_{p+q-1})$; alors l'opérateur d^1 de $E^1(M'')$ transforme la classe de (x',x) dans la classe de $d(x',x) = (dx' + g(x), -dx)$.

Ainsi, pour $\xi' \in E^1_{p,q}(M')$ et $\xi \in E^1_{p-1,q}(M)$, on a

$$d^1(\xi',\xi) = (d^1\xi' + g^1(\xi), -d^1\xi) ;$$

en d'autres termes, $E^1(M'')$ est le "mapping-cylinder" de l'application $g^1 : E^1(M) \longrightarrow E^1(M')$.

Appliquons à ce mapping cylinder la suite exacte (1), en y remplaçant M, M' et g par $E^1(M)$, $E^1(M')$ et g^1 ; il vient une suite exacte

$$(4) \qquad \cdots \longrightarrow E^2_{p+1,q}(M'') \longrightarrow E^2_{p,q}(M) \xrightarrow{g^2} E^2_{p,q}(M') \longrightarrow E^2_{p,q}(M'') \longrightarrow \cdots ,$$

où g^2 est l'homomorphisme induit par g.

2. Enoncé du double théorème de Moore.

Hypothèses du théorème : soient M, M' et $g : M \longrightarrow M'$ comme dans le n° 1. Supposons en outre donnés deux Λ-modules gradués U et U' (avec $U_q = 0$ et $U'_q = 0$ pour $q < 0$), et un Λ-homomorphisme $h : U \longrightarrow U'$, conservant les degrés. Supposons aussi donnés deux Λ-modules différentiels gradués N et N' , et un Λ-homomorphisme $\bar{g} : N \longrightarrow N'$ compatible avec les graduations et les opérateurs différentiels (ces derniers notés $\bar{d}$) . On suppose que $N_p = 0$ et $N'_p = 0$ pour $p < 0$, et que, pour $p \geqslant 0$, N_p et N'_p sont Λ-libres. Enfin, supposons donné un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E^1(M) & \xrightarrow{g^1} & E^1(M') \\ \Psi\downarrow & & \downarrow\Psi' \\ U \otimes_\Lambda N & \xrightarrow{h \otimes \bar{g}} & U' \otimes_\Lambda N' \end{array}$$

où Ψ et Ψ' sont compatibles avec les bigraduations (i.e : Ψ envoie $E^1_{p,q}(M)$ dans $U_q \otimes N_p$, et de même pour ψ'), ainsi qu'avec les opérateurs différentiels : dans $U \otimes N$, on considère d défini par $d(u \otimes n) = (-1)^q u \otimes (\bar{d}n)$ pour $u \in U_q$; de même dans $U' \otimes N'$; dans $E^1(M)$ et $E^1(M')$, on considère les opérateurs d^1 .
On suppose en outre que

$$\psi_*: E^2(M) \longrightarrow H(U \otimes N) \quad \text{et} \quad \psi'_*: E^2(M') \longrightarrow H(U' \otimes N')$$

sont des <u>isomorphismes</u>.

Sous toutes les hypothèses précédentes, on a les deux théorèmes suivants :

<u>Théorème A</u>.- Si $g_*: H(M) \longrightarrow H(M')$ est un <u>isomorphisme</u>, si $h : U \longrightarrow U'$ est un <u>isomorphisme</u>, et si l'anneau Λ est facteur direct de U_0, alors $\bar{g}_*: H(N) \longrightarrow H(N')$ est un <u>isomorphisme</u>.

<u>Théorème B</u>.- Si $g_*: H(M) \longrightarrow H(M')$ est un <u>isomorphisme</u>, si $\bar{g}_*: H(N) \longrightarrow H(N')$ est un <u>isomorphisme</u>, et si l'anneau Λ est facteur direct de $H_0(N)$, alors $h : U \longrightarrow U'$ est un <u>isomorphisme</u>.

Rappelons pour mémoire le théorème bien connu :

<u>Théorème C</u>.- Si $h : U \longrightarrow U'$ est un <u>isomorphisme</u>, et si $\bar{g}_*: H(N) \longrightarrow H(N')$ est un <u>isomorphisme</u>, alors $g_*: H(M) \longrightarrow H(M')$ est un <u>isomorphisme</u>. (En effet, g^2 : $E^2(M) \longrightarrow E^2(M')$ est alors un isomorphisme, d'où la conclusion suit par un raisonnement connu).

<u>Remarque</u> : avant de démontrer ces théorèmes, observons qu'ils s'appliquent à l'<u>homologie des espaces fibrés</u>, dans le cas où le groupe fondamental de la base opère trivialement dans l'homologie de la fibre. Alors M désigne le complexe des chaînes (singulières cubiques) de l'espace fibré, N celui des chaînes de la base et U l'homologie de la fibre. Soit Φ une application continue d'un tel espace fibré X dans un espace fibré X', compatible avec les fibrations ; le théorème A dit que si Φ induit un isomorphisme des homologies des espaces fibrés et un isomorphisme des homologies des fibres, alors $\bar{\Phi}$ induit un isomorphisme des homologies des bases. Les théorèmes B et C s'interprètent de même.

3. <u>Démonstration des théorèmes A et B</u>.

<u>Lemme 1</u>.- Sous les hypothèses du théorème A, les assertions suivantes sont équivalentes : (α_p) $H_s(N) \longrightarrow H_s(N')$ est un isomorphisme pour $s \leq p$;

(β_p) $E^2_{s,0}(M) \to E^2_{s,0}(M')$ est un isomorphisme pour $s \leqslant p$;

(γ_p) $E^2_{s,q}(M) \to E^2_{s,q}(M')$ est un isomorphisme pour $s \leqslant p$ et tout entier q

En effet, (β_p) signifie que $H_s(U_0 \otimes N) \to H_s(U'_0 \otimes N')$ pour $s \leqslant p$, et (γ_p) signifie que $H_s(U_q \otimes N) \longrightarrow H_s(U'_q \otimes N')$ pour $s \leqslant p$ et tout q. Or (β_p) entraîne (α_p) parce que $U_0 \to U'_0$ est un isomorphisme et que Λ est facteur direct de U_0 ; (α_p) entraîne (γ_p) à cause du "théorème des coefficients universels" (compte tenu du fait que N_p et N'_p sont Λ-libres) ; enfin, (γ_p) entraîne trivialement (β_p).

Le lemme 1 étant prouvé, il suffit, pour établir le théorème A, de montrer que (α_p) est vrai pour tout p. Or c'est trivial pour $p < 0$. Montrons que (α_p) entraîne (α_{p+1}) ; d'après le lemme 1, il revient au même de montrer que (γ_p) entraîne (β_{p+1}). D'après la suite exacte (4), (γ_p) implique que $E^2_{s,q}(M'') = 0$ pour $s \leqslant p$ et tout q. Considérons $E^2_{s,0}(M'')$ pour $s \leqslant p+2$; ses éléments sont des cycles pour toutes les différentielles d^r ($r \geqslant 2$), et seul 0 est un <u>bord</u> pour ces différentielles. Donc $E^2_{s,0}(M'') \approx E^\infty_{s,0}(M'')$, et ce dernier module est nul, puisque $E^\infty(M'')$ est le module bigradué associé à $H(M'')$, lequel est nul d'après la suite exacte (1) et l'hypothèse suivant laquelle $g_*: H(M) \longrightarrow H(M')$ est un isomorphisme. Ainsi $E^2_{s,0}(M'') = 0$ pour $s \leqslant p+2$; la suite exacte (4) montre alors que $E^2_{s,0}(M) \longrightarrow E^2_{s,0}(M')$ est un isomorphisme pour $s \leq p+1$, ce qui est l'assertion (β_{p+1}) à démontrer.

Le théorème B se prouve de la même manière. On établit d'abord :

<u>Lemme 2</u>.- Sous les hypothèses du théorème B, les assertions suivantes sont équivalentes :

(α_q) $U_s \to U'_s$ est un isomorphisme pour $s \leqslant q$;

(β_q) $E^2_{0,s}(M) \longrightarrow E^2_{0,s}(M')$ est un isomorphisme pour $s \leqslant q$;

(γ_q) $E^2_{p,s}(M) \longrightarrow E^2_{p,s}(M')$ est un isomorphisme pour $s \leqslant q$, et tout entier p.

Une fois prouvé le lemme 2, on montre que (γ_q) entraîne (β_{q+1}). D'après la suite exacte (4), (γ_q) entraîne $E^2_{p,s}(M'') = 0$ pour $s \leq q$ et tout p. Considérons $E^2_{0,s}(M'')$ et $E^2_{1,s}(M'')$ pour $s \leq q+1$; pour des raisons de degré, leurs éléments sont des cycles pour toutes les différentielles $d^r (r \geq 2)$, et seul 0 est un bord, à cause de (γ_q). Donc, pour $s \leq q+1$, on a $E^2_{0,s}(M'') \approx E^\infty_{0,s}(M'') = 0$, $E^2_{1,s}(M'') \approx E^\infty_{1,s}(M'') = 0$. Alors la suite exacte (4) montre que $E^2_{0,s}(M) \longrightarrow E^2_{0,s}(M')$ est un isomorphisme pour $s \leq q+1$, et ceci est l'assertion (β_{q+1}) à démontrer.

4. Démonstration du théorème 2 (de l'exposé 2).

Soit A une DGA-algèbre, et soit M un DGA-module sur A. On définit sur M une filtration, en appelant $F_p(M)$ le sous-A-module de M engendré par les éléments de degré $\leq p$. Il est immédiat que toutes les conditions imposées à un module différentiel gradué et filtré (n° 1) sont remplies.

Dans les hypothèses du théorème 2, l'application $g : M \longrightarrow M'$ est compatible avec les filtrations. Choisissons une A-base homogène de M ; ceci définit un isomorphisme $\varphi : M \approx A \otimes_\Lambda N$, où N est un Λ-module ayant une base homogène ; l'application $M \longrightarrow \bar{M}$ de M sur son quotient (Exp. 1, n° 4) définit un isomorphisme $N \approx \bar{M}$; par cet isomorphisme, on transporte à N l'opérateur différentiel $\bar{d}$ de $\bar{M}$ (on notera encore $\bar{d}$ l'opérateur de N). Par l'isomorphisme φ, la filtration de M se transporte à $A \otimes N$; on a $F_p(A \otimes N) = \sum_{s \leq p} A \otimes N_s$. Alors φ induit un isomorphisme de $E^0_{p,q}(M)$ sur $A_q \otimes N_p$, isomorphisme qui transforme l'opérateur d^0 dans l'opérateur de $A \otimes N$ défini par $d^0(a \otimes n) = (da) \otimes n$. Faisons de même pour M'. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E^0(M) & \xrightarrow{g^0} & E^0(M') \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi^0} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi'^0} \\ A \otimes N & \xrightarrow{f \otimes \bar{g}} & A' \otimes N' \end{array}$$

où φ^0 et φ'^0 sont des isomorphismes compatibles avec les bigraduations et les opérateurs différentiels ; $\bar{g} : N \longrightarrow N'$ est l'homomorphisme de $\bar{M}$ dans $\bar{M}'$ induit par g, il est compatible avec les opérateurs différentiels $\bar{d}$ de N et N'.

Or, N et N' étant libres, l'homologie de $A \otimes N$ (resp. $A' \otimes N'$) pour l'opérateur d^0 s'identifie à $H(A) \otimes N$, resp. $H(A') \otimes N'$. Si dans le diagramme précédent on passe à l'homologie, on trouve exactement le diagramme du paragraphe n° 2 ci-dessus, où U serait remplacé par $H(A)$ et U' par $H(A')$. On peut donc appliquer le théorème A [Voir Erratum, page 1 de l'Exposé 13] : $H(M) \longrightarrow H(M')$ est bien un isomorphisme en vertu de l'acyclicité de M et de M' ; l'anneau Λ est bien facteur direct de $H_0(A) = U$, à cause de l'augmentation de A. Le théorème A dit que si $f_* : H(A) \longrightarrow H(A')$ est un isomorphisme, alors $\bar{g}_* : H(N) \longrightarrow H(N')$ est aussi un isomorphisme. Et ceci établit le théorème 2 de l'exposé 2.

5. Notion générale de "construction".

Une construction consiste dans la donnée :

1) d'une DGA-algèbre A (sur l'anneau Λ) ;

2) d'un Λ-module gradué N (tel que $N_q = 0$ pour $q < 0$) et d'une augmentation $\eta : N_0 \longrightarrow \Lambda$;

3) d'un opérateur différentiel sur le A-module à gauche $M = A \otimes_\Lambda N$, qui fasse de M un DGA-module sur A, lorsqu'on utilise sur M l'augmentation η définie par $\eta(a \otimes n) = \varepsilon(\alpha)\, \eta(n)$.

Une construction (A,N,M) est dite acyclique si M est acyclique.

Soit (A,N,M) une construction. L'application $M \longrightarrow \bar{M}$ de M sur le module quotient associé, induit un isomorphisme $N \approx \bar{M}$; on transporte à N l'opérateur différentiel $\bar{d}$ de $\bar{M}$, et N devient un DGA-module sur Λ. Ce DGA-module N s'appelle le module final de la construction ; A s'appelle l'algèbre initiale de la construction.

L'application $n \longrightarrow 1 \otimes n$ de N dans M permet d'identifier N à un sous-Λ-module de M (mais cette identification n'est pas compatible avec les opérateurs différentiels $\bar{d}$ et d de N et M).

Exemple : la donnée d'une A-base homogène d'un DGA-module M sur une DGA-algèbre A, définit une construction.

Théorème 3.- Soit donnée une DGA-algèbre A. Il existe au moins une construction acyclique (A,N,M) ayant A pour algèbre initiale. Il existe même une construction satisfaisant à la condition supplémentaire :

(B) l'augmentation $\eta : N_0 \longrightarrow \Lambda$ est un isomorphisme ; pour $k \geq 0$, l'opérateur différentiel d de M applique biunivoquement N_{k+1} sur le sous-module de M_k formé des éléments d'augmentation nulle (si $k = 0$), resp. des cycles de degré k (si $k \geq 1$).

Deux constructions satisfaisant à (B) sont isomorphes.

(Le sens du mot "isomorphe" sera précisé au cours de la démonstration).

Remarque : la condition (B) entraîne l'acyclicité de M.

Démonstration de l'unicité : L'unicité (à un isomorphisme près) va résulter de la proposition suivante :

Proposition 1.- Soient (A,N,M) et (A',N',M') deux constructions dont la seconde satisfait à (B). Pour tout DGA-homomorphisme $f : A \longrightarrow A'$, il existe un DGA-homomorphisme $g : M \longrightarrow M'$ et un seul qui soit compatible avec f et envoie N dans N'.

Prouvons cette proposition. Un tel g est déterminé par sa restriction $\bar{g}$ à N, puisque

$$(5) \qquad g(a \otimes n) = f(a) \otimes \bar{g}(n) .$$

Donnons-nous donc un Λ-homomorphisme $\bar{g} : N \longrightarrow N'$; pour que g défini par (5) soit un DGA-homomorphisme, il faut et il suffit que

$$(6) \qquad \eta'\bar{g}(n) = \eta(n) , \qquad n \in N_0 ,$$

$$(7) \qquad d'(1 \otimes \bar{g}(n)) = gd(1 \otimes n) , \quad n \in N_k \quad (k \geq 1),$$

où, dans le second membre de (7), g est calculé par (5). Par récurrence sur le degré k de n, les relations (6) et (7) entraînent l'existence et l'unicité de $\bar{g}$, compte tenu de la condition (B) ; et la linéarité de $\bar{g}$ suit de l'unicité.

La proposition 1 étant ainsi prouvée, appliquons-la à deux constructions (A,N,M) et (A',N',M') sur la même DGA-algèbre A, ces constructions étant supposées toutes deux satisfaire à (B). On prend pour $f : A \longrightarrow A$ l'application identique. La prop. 1 définit $g : M \longrightarrow M'$ et $g' : M' \longrightarrow M$; en composant, $g' \circ g : M \longrightarrow M$ satisfait aux conditions de la proposition 1, donc, en vertu de l'unicité, c'est l'application identique de M. De même, $g \circ g'$ est l'application identique de M'. Ceci prouve l'isomorphisme des deux constructions, en précisant le sens du mot "isomorphisme".

Le reste de la démonstration du théorème 3 (preuve de l'existence d'une construction acyclique satisfaisant à (B)) fait l'objet du paragraphe suivant.

6. La "bar construction".

On va exhiber une construction (appelée la "bar construction" de A) qui satisfait à la condition (B) du théorème 3.

Notons $\bar{A}$ le Λ-module A/Λ, qui est gradué et muni d'un opérateur différentiel (déduit de d par passage au quotient). Notons $\bar{A}^k$ le produit tensoriel (sur Λ) $\bar{A} \otimes \ldots \otimes \bar{A}$ (k facteurs) ; convenons que $\bar{A}^0 = \Lambda$. Posons

$$N = \sum_{k \geqslant 0} \bar{A}^k ,$$

et utilisons la notation $[a_1, \ldots, a_k]$ à la place de $\bar{a}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{a}_k$ ($\bar{a}_i$ désignant l'image de $a_i \in A$ dans $\bar{A}$). L'élément $1 \in \Lambda = N_0$ sera noté $[\;\;]$. Observons que $[a_1, \ldots, a_k]$ est une fonction multilinéaire des a_i, nulle lorsque l'un d'eux est un scalaire. Graduons N en posant

$$\deg\,[a_1, \ldots, a_k] = k + \sum_{i=1}^{k} \deg(a_i).$$

Dans le A-module $M = A \otimes N$, l'élément $a \otimes [a_1, \ldots, a_k]$ sera noté simplement $a[a_1, \ldots, a_k]$; si $a = 1$, on écrit simplement $[a_1, \ldots, a_k]$ (ce qui est conforme à l'identification de N et d'un sous-module de M). Définissons un Λ-homomorphisme $s : M \longrightarrow N$, de degré $+1$, par :

$$s(a[a_1, \ldots, a_k]) = [a, a_1, \ldots, a_k].$$

Utilisant la factorisation directe définie par l'augmentation de A, on voit que le <u>noyau</u> de s est $N = \sum_{q \geqslant 0} N_q$, et que l'<u>image</u> de s est $\sum_{q \geqslant 1} N_q$. On notera que $s[\;\;] = 0$, $ss = 0$.

<u>Proposition 2.- Il existe, dans</u> $M = A \otimes N$, <u>un</u> Λ-<u>endomorphisme</u> d, <u>de degré</u> -1, <u>qui satisfait aux deux conditions</u>

(i) $\quad d(ax) = (da)x + (-1)^{\deg(a)} a(dx)$, pour $a \in A$, $x \in M$,

(ii) $\quad dsx + sdx = x - (\eta x)[\;\;]$ pour $x \in M$.

Un tel d est unique, et satisfait à

(iii) $\eta d = 0$, $dd = 0$.

Démonstration : d sera déterminé par ses valeurs sur N , car

(9), $d(a \otimes n) = (da) \otimes n + (-1)^{\deg(a)} a.d(1 \otimes n)$.

L'application d ainsi prolongée à M satisfera à (i). Il reste à exprimer la condition (ii) : une fois d connu sur $\sum_{q \leqslant k} \bar{A}^q$, (ii) sert précisément à définir d sur $\bar{A}^{k+1}$, par

$$(10)\begin{cases} d[a] = a[\;] - [da] - (\varepsilon a)[\;] & \text{si } k = 0 , \\ d[a,a_1,\ldots,a_k] = a[a_1,\ldots,a_k] - sd\,(a[a_1,\ldots,a_k]) & \text{si } k \geqslant 1 . \end{cases}$$

Ces formules prouvent l'unicité de d ; pour prouver l'existence, il suffit de vérifier que le second membre de (10) est nul quand $a = 1$, c'est-à-dire que

(11) $[a_1,\ldots,a_k] = sd\,[a_1,\ldots,a_k]$.

Or, on a déjà, d'après la deuxième formule (10) appliquée à $k-1$:

$$d[a_1,\ldots,a_k] = a_1[a_2,\ldots,a_k] - sd(a_1[a_2,\ldots,a_k]) ;$$

en appliquant s aux deux membres et observant que $ss = 0$, on obtient (11).

L'existence et l'unicité de d satisfaisant à (i) et (ii) est donc prouvée. Montrons maintenant que $\eta d = 0$, $dd = 0$. Il suffit de prouver que $\eta dx = 0$, $ddx = 0$ quand $x \in N$, car (i) montre que ce sera alors vrai pour tout $x \in M$. Pour $x \in N$, la relation $\eta dx = 0$ est immédiate. Quant à $ddx = 0$, on la montre par récurrence sur le degré de $x \in N$; si c'est prouvé pour les degrés $\leqslant q$ on a aussi $ddy = 0$ pour $y \in M_q$. Soit alors $x \in N_{q+1}$; on a $x = sy$, $y \in M_q$, d'où $ddx = ddsy = -dsdy + dy$; or $ds(dy) + sd(dy) = dy$, et $ddy = 0$ par l'hypothèse de récurrence. Ceci prouve bien que $ddx = 0$.

La proposition 2 est donc établie. Elle montre que l'opérateur d, sur $M = A \otimes N$, définit une construction (A,N,M). La condition (B) du théorème 2 est satisfaite ; en effet :

1) d applique <u>biunivoquement</u> N_{k+1} dans M_k. Car si $x \in N_{k+1}$, on a $sx = 0$ et $\eta x = 0$; d'où, d'après (ii), $x = sdx$; et $dx = 0$ entraîne $x = 0$.

2) tout $x \in M_k$, tel que $dx = 0$ et $\eta x = 0$, est dans l'image de N_{k+1} par d ; car on a $x = dsx$.

La construction (A,N,M) qui vient d'être définie s'appelle la <u>bar construction</u>. Elle a été introduite par Eilenberg-MacLane dès 1950 (voir par exemple Eilenberg-MacLane, Ann. of Math. 58, 1953, p.55-106). D'une façon plus précise, ces auteurs n'ont pas considéré le A-module acyclique M, mais seulement le Λ-module final N (qui n'est pas acyclique), qu'ils ont appelé la "bar construction normalisée".

Nous utiliserons désormais les notations suivantes : $\bar{\mathcal{B}}(A)$ pour le module final N de la bar construction, $\mathcal{B}(A)$ pour le module acyclique M. On a donc $\mathcal{B}(A) = A \otimes \bar{\mathcal{B}}(A)$. On notera d l'opérateur différentiel de $\mathcal{B}(A)$, $\bar{d}$ celui de $\bar{\mathcal{B}}(A)$.

Conformément à la proposition 1 (n° 5), tout DGA-homomorphisme $A \to A'$ définit des DGA-homomorphismes de modules $\mathcal{B}(A) \longrightarrow \mathcal{B}(A')$ et $\bar{\mathcal{B}}(A) \longrightarrow \bar{\mathcal{B}}(A')$; on peut les expliciter d'une manière évidente. Ainsi $\mathcal{B}(A)$ et $\bar{\mathcal{B}}(A)$ sont des <u>foncteurs covariants</u> de la DGA-algèbre A.

<u>Remarque finale</u> : lorsque A possède une Λ-base homogène contenant l'élément unité 1, $\bar{\mathcal{B}}(A)$ possède évidemment une Λ-base homogène contenant l'élément [ ], et $\mathcal{B}(A)$ possède une A-base homogène. Dans le cas particulier où A est l'algèbre d'un groupe Π, munie de l'augmentation habituelle, $\bar{\mathcal{B}}(A)$ n'est autre que le classique "complexe non homogène" (normalisé) qui permet de calculer l'homologie et la cohomologie du groupe Π à coefficients dans un Π-module.
