Séminaire Henri Cartan

H. Cartan

DGA-algèbres et DGA-modules

Séminaire Henri Cartan, tome 7, n° 1 (1954-1955), exp. n° 2, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_1_A2_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1954/55.

DGA-ALGEBRES ET DGA-MODULES

(Exposé de H. CARTAN, 17.11.1954)

Introduction.- Cette série d'exposés a pour but final le calcul explicite de l'homologie et de la cohomologie des espaces du type $\mathcal{K}(\Pi,n)$ (voir Exp. I).

Dans ce qui suit, Λ désigne un anneau commutatif, avec un élément unité $1 \neq 0$; Λ est donné une fois pour toutes, tous les "modules" considérés seront des Λ-modules unitaires, toutes les "algèbres" seront des algèbres unitaires sur l'anneau Λ. Dans les applications ultérieures, Λ sera le plus souvent soit l'anneau Z des entiers naturels, soit le corps Z_p des entiers modulo p (p premier).

1. Notion de DGA-algèbre.

Soit A une Λ-algèbre (qu'on supposera toujours associative et munie d'un élément unité $1 \neq 0$). A est une algèbre graduée si l'on s'est donné des sous-Λ-modules A_k (k entier) dont A est somme directe, tels que

$$(1.1) \qquad A_k = 0 \text{ pour } k < 0 \ , \quad xy \in A_{k+h} \text{ pour } x \in A_k \text{ et } y \in A_h \ ,$$

d'où $1 \in A_0$. Un élément de A_k est dit homogène de degré k .

Une algèbre graduée A est anticommutative si

$$(1.2) \qquad yx = (-1)^{kh} xy \text{ pour } x \in A_k \ ; \ y \in A_h \ .$$

Une différentielle sur une algèbre graduée A est une application Λ-linéaire $d : A \to A$ telle que

$$(1.3) \qquad dd=0, \quad d(A_k) \subset A_{k-1}, \quad d(xy) = (dx)y + (-1)^k x(dy) \text{ pour } x \in A_k \ .$$

Les deux premières relations (1.3) permettent de définir un module d'homologie gradué $H_*(A) = \sum_k H_k(A)$ (définition classique). La troisième relation (1.3) permet de définir dans $H_*(A)$ une multiplication, qui est associative parce que celle de A a été supposée associative. Le produit d'un élément de $H_k(A)$ et d'un élément de $H_h(A)$ est dans $H_{k+h}(A)$. Ainsi $H_*(A)$ est une Λ -algèbre graduée, dont l'élément unité est l'image de l'élément unité de A.

Soit A une algèbre différentielle graduée. On appelle <u>augmentation</u> une application Λ -linéaire $\varepsilon : A \to \Lambda$ telle que

$$(1.4) \qquad \varepsilon(1)=1, \quad \varepsilon(xy) = (\varepsilon x)(\varepsilon y), \quad \varepsilon x=0 \text{ pour } x \in A_k \ (k \geq 1), \quad \varepsilon d = 0 .$$

Une augmentation est déterminée par sa restriction à A_0. Soit l'application Λ-linéaire $\sigma : \Lambda \to A$ définie par $\sigma(\lambda) = \lambda.1$; la composée $\varepsilon\sigma$ est l'application identique de Λ ,donc σ est un isomorphisme de Λ sur un sous-anneau de A, auquel on l'identifie ; grâce à cette identification, on pourra considérer que ε prend ses valeurs dans A . Observer que Λ est <u>facteur direct</u> de A.

Par passage au quotient, une augmentation $\varepsilon : A \longrightarrow \Lambda$ définit une augmentation $H_*(A) \longrightarrow \Lambda$; et Λ est facteur direct de $H_0(A)$.

<u>Définition 1</u>.- <u>On appelle DGA-algèbre</u> (sur Λ) <u>une algèbre graduée munie d'une différentielle et d'une augmentation satisfaisant à (1.3) et (1.4). Etant données deux DGA-algèbres</u> A <u>et</u> A' , <u>on appelle DGA-homomorphisme de</u> A <u>dans</u> A' <u>une application</u> Λ -<u>linéaire</u> $f : A \to A'$ <u>satisfaisant à</u>

$$(1.5) \qquad f(A_k) = A'_k , \quad f(1)=1 , \quad f(xy) = (fx)(fy) , \quad d'f = fd, \quad \varepsilon' f = \varepsilon .$$

Il est clair qu'un DGA-homomorphisme f définit une application Λ -linéaire $f_* : H_*(A) \longrightarrow H_*(A')$ qui conserve le degré, et est compatible avec les structures multiplicatives et les augmentations.

2. <u>Exemples de DGA-algèbres</u>.

Pour tout espace topologique X, notons $S(X)$ le complexe singulier (simplicial) de X. On définit classiquement une application $\sigma : S(X_1) \otimes S(X_2) \longrightarrow S(X_1 \times X_2)$, où $S(X_1) \otimes S(X_2)$ désigne le produit tensoriel (gradué) des deux Z-modules gradués $S(X_1)$ et $S(X_2)$ (produit tensoriel pris sur l'anneau Z). Pour une explicitation de σ , voir par exemple S. MacLane, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), p.642-651 (voir formules (2) et (5')) ; l'origine géométrique de la formule réside dans la décomposition en simplexes du produit de deux simplexes. Si on munit $S(X_1) \otimes S(X_2)$ de l'opérateur différentiel d défini par $d(u_1 \otimes u_2) =$ $= (du_1) \otimes u_2 + (-1)^k u_1 \otimes (du_2)$ (k = degré de u_1), σ commute avec les opérateurs différentiels, et définit un <u>isomorphisme</u> $\sigma_* : H(S(X_1) \otimes S(X_2)) \approx H(S(X_1 \times X_2))$. En outre, σ est <u>naturel</u>, c'est-à-dire compatible avec les homomorphismes qu'on déduit d'applications continues d'espaces topologiques.

Supposons alors qu'on ait un espace X muni d'une multiplication continue $f : X \times X \longrightarrow X$. L'application composée

$$S(X) \otimes S(X) \xrightarrow{\sigma} S(X \times X) \longrightarrow S(X)$$

définit une multiplication dans $S(X)$, et cette multiplication satisfait à la dernière condition (1.3). Si la multiplication f est associative (ce qui est le cas si X est un groupe topologique, ce qu'on va supposer), la multiplication dans $S(X)$ est associative. D'autre part, on a classiquement une augmentation $S(X) \longrightarrow Z$, nulle sur les simplexes de dimension $\geqslant 1$, et qui à chaque simplexe de dimension 0 (point) associe $1 \in Z$. On voit que $S(X)$ est une DGA-algèbre (sur Z), dont l'élément unité est le 0-simplexe du point e (élément neutre du groupe X). La multiplication de $S(X)$ est appelée le "produit de Pontrjagin" ; elle passe dans l'homologie, d'où l'algèbre d'homologie $H_*(S(X))$, notée $H_*(X)$. Si on considère l'homologie à coefficients dans un anneau commutatif Λ, $S(X) \otimes \Lambda$ est une DGA-algèbre sur Λ, et $H_*(S(X)) \otimes \Lambda)$, notée $H_*(X; \Lambda)$, est une algèbre graduée.

Lorsque la multiplication $f : X \times X \longrightarrow X$ est <u>commutative</u>, il est immédiat (en utilisant la définition explicite de σ) que la multiplication de $S(X)$ est <u>anticommutative</u>. L'algèbre d'homologie $H_*(X; \Lambda)$ est alors anticommutative.

Soit maintenant Π un groupe <u>abélien</u>. On a vu (Exp. 1) qu'il existe des espaces du type $\mathcal{K}(\Pi, n)$, et que parmi eux il y a des H-espaces, par exemple l'espace des lacets (d'origine donnée) sur un espace du type $\mathcal{K}(\Pi, n+1)$. Tous les "sous-complexes minimaux" d'un tel espace X sont isomorphes à un complexe $K(\Pi, n)$ décrit par Eilenberg-MacLane (voir par exemple <u>Ann. of Math.</u> 58 (1953), p.55-10[illegible], voir p. 86) ; la multiplication de Pontrjagin dans $S(X)$ induit alors dans $K(\Pi, n)$ une multiplication, indépendante du choix de l'espace X ; cette multiplication est <u>associative</u> (bien que la multiplication dans X ne le soit pas, en général), et <u>anticommutative</u>. Ainsi le complexe $K(\Pi, n)$ est muni d'une structure de DGA-algèbre anticommutative. L'algèbre d'homologie $H_*(K(\pi,n)\otimes\Lambda) = H_*(\pi,n;\Lambda)$ est l'algèbre d'homologie de tout espace multiplicatif du type $\mathcal{H}(\pi,n)$; cette algèbre d'homologie est anticommutative.

Pour $n = 0$, il est commode de convenir que $K(\pi,0)$ est l'algèbre $Z(\pi)$, algèbre du groupe π à coefficients entiers. Bien entendu, cette algèbre est définie même si π n'est pas abélien ; on peut la considérer comme une DGA-algèbre (où tous les degrés sont nuls, et l'opérateur d est nul) ; l'augmentation $\varepsilon : Z(\pi)\longrightarrow Z$ associe à l'élément $\sum_i n_i x_i$ $(x_i\in\pi,\ n_i\in Z)$ l'entier $\sum_i n_i$.

3. Produit tensoriel de DGA-algèbres.

On suppose connue la définition du produit tensoriel de deux Λ-modules gradués (produit tensoriel pris sur Λ) ; c'est un Λ-module gradué. Soient alors A et A' deux Λ-algèbres graduées: on définit, sur $A\otimes_\Lambda A'$, une multiplication par la formule

$$(3.1)\qquad (a\otimes a').(b\otimes b') = (-1)^{kh}(ab)\otimes(a'b')\quad \text{pour}\quad a'\in A'_k,\ b\in A_h .$$

On vérifie qu'avec cette multiplication $A\otimes_\Lambda A'$ est une algèbre graduée ; de plus, si A et A' sont anticommutatives, $A\otimes_\Lambda A'$ est aussi anticommutative.

Si maintenant A et A' sont des DGA-algèbres (avec différentielles d et d', augmentations ε et ε'), on définit, sur $A'' = A\otimes A'$, une différentielle d'' et une augmentation ε'' par les formules

$$(3.2)\qquad d''(a\otimes a') = (da)\otimes a' + (-1)^k a\otimes(d'a'),\qquad a\in A_k ,$$

$$(3.3)\qquad \varepsilon''(a\otimes a') = (\varepsilon a)(\varepsilon' a')$$

Ceci munit bien $A\otimes A'$ d'une structure de DGA-algèbre.

Soient $f : A\longrightarrow B$ et $f' : A'\longrightarrow B'$ deux DGA-homomorphismes ; le produit tensoriel $g = f\otimes f'$ de ces applications, défini par

$$g(a\otimes a') = (fa)\otimes(f'a'),$$

est un DGA-homomorphisme de la DGA-algèbre $A\otimes A'$ dans la DGA-algèbre $B\otimes B'$

La vérification, fastidieuse, est facile.

Exemples : Soient X et X' deux groupes topologiques, et $X \times X'$ leur produit. $S(X) \otimes S(X')$ est une DGA-algèbre, et

$$\sigma : S(X) \otimes S(X') \longrightarrow S(X \times X')$$

est un DGA-homomorphisme, qui induit un isomorphisme des algèbres d'homologie.

De même, soient π et π' deux groupes abéliens, et $\pi \times \pi'$ leur produit. L'application σ définit un DGA-homomorphisme

$$K(\pi,n) \otimes K(\pi',n) \longrightarrow K(\pi \times \pi',n) ,$$

qui induit un isomorphisme des algèbres d'homologie. En faisant le produit tensoriel par un anneau commutatif Λ , on obtient un DGA-homomorphisme

$$H_*(\pi,n;\Lambda) \otimes H_*(\pi',n;\Lambda) \longrightarrow H^*(\pi \times \pi',n;\Lambda)$$

qui, lorsque Λ est un corps, est un isomorphisme (sur).

4. Notion de DGA-module.

Définition 4.1.- Etant donnée une DGA-algèbre A (sur Λ), on appelle DGA-module (à gauche) sur A un A-module à gauche M, muni :

1) de la donnée de sous-Λ-modules M_k dont M soit somme directe, avec les conditions : $M_k = 0$ pour $k < 0$, $am \in M_{k+h}$ pour $a \in A_k$ et $m \in M_h$;

2) d'un Λ-homomorphisme $d : M \rightarrow M$, qui applique M_k dans M_{k-1}, et satisfait à

$$(4.1) \qquad dd = 0, \quad d(am) = (da)m + (-1)^k a(dm) \quad \text{pour } a \in A_k , \quad m \in M$$

(où da désigne la différentielle de a dans l'algèbre A) ;

3) d'une application Λ-linéaire $\eta : M \rightarrow \Lambda$, appelée augmentation, satisfaisant

$$(4.2) \qquad \eta m = 0 \quad \text{pour } m \in M_k \ (k \geqslant 1), \quad \eta d = 0, \quad \eta(am) = (\varepsilon a)(\eta m).$$

Soit donc M un DGA-module sur la DGA-algèbre A, et notons I l'idéal bilatère de A, noyau de l'augmentation $\varepsilon : A \longrightarrow \Lambda$. Soit IM le sous-module (gradué) de M, formé des sommes finies $\sum_i a_i m_i$ où $a_i \in I$. Soit $\bar{M}$ le module-quotient M/IM, qui est gradué ; η induit une augmentation $\bar{\eta} : \bar{M} \to \Lambda$, car η est nul sur IM, d'après la dernière condition (4.2). De plus, IM est stable pour d, en vertu de (4.1) et du fait que $\varepsilon da = 0$; donc d induit un Λ-endomorphisme $\bar{d}$ de $\bar{M}$, et on vérifie que $\bar{d}\,\bar{d} = 0$. Ainsi $\bar{M}$ est un DGA-module sur Λ, qu'on appelle le <u>module associé</u> à M.

<u>Exemple</u> : Soit X un espace topologique dans lequel un groupe topologique G opère (à gauche). L'application continue $G \times X \longrightarrow X$ définie par ces opérations définit une application

$$S(G) \otimes S(X) \longrightarrow S(X)$$

qui fait de $S(X)$ un DGA-module sur la DGA-algèbre $S(G)$. Soit Y l'espace-quotient X/G, et soit I le noyau de l'augmentation $S(G) \longrightarrow Z$; il est clair que $I.S(X)$ est dans le noyau de $S(X) \longrightarrow S(Y)$, d'où un homomorphisme $\bar{M} \longrightarrow S(Y)$, en désignant par $\bar{M}$ le module associé au DGA-module $M = S(X)$. On peut montrer que, sous certaines hypothèses, $\bar{M} \longrightarrow S(Y)$ induit un isomorphisme des homologies ; par exemple, il en est ainsi lorsque X est fibré principal de groupe G (mais il n'est pas question de le démontrer ici).

<u>Définition 4.2</u>.- Soient A et A' deux DGA-algèbres (sur Λ), et $f : A \to A'$ un DGA-homomorphisme. Soient M un DGA-module sur A, et M' un DGA-module sur A'. On dit qu'une application Λ-linéaire $g : M \longrightarrow M'$ est un <u>DGA-homomorphisme compatible avec f</u> si

$$(4.3) \qquad g(M_k) \subset M'_k , \quad g(am) = (fa)(gm), \quad d'g = gd, \quad \eta' g = \eta .$$

S'il en est ainsi, g définit, par passage aux quotients, un Λ-homomorphisme $\bar{g} : \bar{M} \longrightarrow \bar{M'}$ des modules associés, et $\bar{g}$ est compatible avec les opérateurs différentiels $\bar{d}$ et $\bar{d'}$, ainsi qu'avec les augmentations $\bar{\eta}$ et $\bar{\eta'}$.

5. <u>Un théorème sur les DGA-homomorphismes</u>.

Avant de l'énoncer, rappelons la définition d'un Λ-module <u>acyclique</u> : M

étant un Λ -module gradué ($M_k = 0$ pour $k < 0$), avec un opérateur différentiel d et une augmentation η satisfaisant à

$$dd = 0,\ d(M_k) \subset M_{k-1}\ , \quad \eta(M_k) = 0 \ \text{pour}\ k \geqslant 1,\ \eta d = 0\ ,$$

la suite de Λ -modules et de Λ -homomorphismes

$$(5.1) \qquad \dots \longrightarrow M_k \xrightarrow{d} M_{k-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow M_1 \xrightarrow{d} M_0 \xrightarrow{\eta} \Lambda \longrightarrow 0$$

est telle que le composé de deux homomorphismes consécutifs est zéro. On dit que M est <u>acyclique</u> si cette suite est <u>exacte</u>. Il revient au même de dire que $H_k(M) = 0$ pour $k \geqslant 1$, et que η induit un <u>isomorphisme</u> $H_0(M) \approx \Lambda$.

<u>Théorème 1</u>.- <u>Soient</u> A <u>et</u> A' <u>deux DGA-algèbres</u>, f <u>un DGA-homomorphisme de</u> A <u>dans</u> A'. <u>Soit</u> M <u>un DGA-module sur</u> A, <u>ayant une</u> A-<u>base formée d'éléments homogènes</u>. <u>Soit</u> M' <u>un DGA-module sur</u> A' , <u>acyclique</u>. <u>Alors</u> :

α) <u>il existe au moins un DGA-homomorphisme</u> $g : M \longrightarrow M'$, <u>compatible avec</u> f (au sens de la définition 4.2) ;

β) <u>l'homomorphisme</u> $\bar{g}_* : H_*(\bar{M}) \longrightarrow H_*(\bar{M'})$ <u>induit par</u> $\bar{g} : \bar{M} \longrightarrow \bar{M'}$, <u>est indépendant du choix de</u> g.

<u>Démonstration</u> : elle se fait suivant une méthode classique, en montant sur les degrés. D'une façon précise, choisissons une A-base $\{m_i\}$ de M, formée d'éléments homogènes. La connaissance des $g(m_i) = m'_i$ déterminera l'application g cherchée, par la formule

$$(5.1) \qquad g(\sum_i a_i m_i) = \sum_i (fa_i) m'_i \ .$$

Etant donnés des m'_i , pour que l'application g définie par (5.1) soit un DGA-homomorphisme compatible avec f, il faut que :

(i) m'_i soit homogène, de même degré que m_i ;

(ii) pour tout m_i de degré 0, on ait $\eta'(m'_i) = \eta(m_i)$;

(iii) pour tout m_i de degré $\geqslant 1$, on ait $d'm'_i = g(dm_i)$,

où $g(dm_i)$ est calculé grâce à (5.1).

Il est immédiat que ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes. Pour les réaliser, on choisit d'abord les m'_i associés aux m_i de degré 0 ; on veut qu'un tel m'_i soit de degré 0 et satisfasse à $\eta'(m'_i) = \eta(m_i)$, condition qu'on peut réaliser parce que, M' étant acyclique, η' applique M'_0 <u>sur</u> Λ. Supposons que l'on ait déjà choisi les m'_i relatifs à tous les m_i de degré $< k$ ($k \geq 1$), de manière à satisfaire à (i), (ii), (iii) ; la formule (5.1) définit alors g sur le sous-Λ-module $\sum_{h<k} M_h$, et on a

$$\eta m = \eta' gm, \qquad gdm = d'gm \quad \text{pour} \quad m \in \sum_{h<k} M_h .$$

Soit alors m_i de degré k ; on cherche m'_i de degré k, tel que $d'm'_i = g(dm_i)$, le second membre étant un élément connu $u' \in M'$, de degré $k-1$; on a $d'u' = 0$, $\eta' u' = 0$, et comme M' est acyclique, il existe bien un m'_i de degré k tel que $d'm'_i = u'$. Ceci achève de prouver l'existence d'un g compatible avec f.

Il reste à démontrer l'assertion β) de l'énoncé. Considérons deux DGA-homomorphismes g_1, g_2 de M dans M', compatibles avec f.

On va montrer que g_1 et g_2 sont <u>homotopes</u>, dans le sens suivant : il existe une application Λ-linéaire $s: M \longrightarrow M'$ telle que

(5.2) $\qquad s(M_k) \subset M'_{k+1}$;

(5.3) $\qquad d's + sd = g_1 - g_2$;

(5.4) $\qquad s(am) = (-1)^k (fa)(sm)$ pour $a \in A_k$, $m \in M$.

Une fois qu'on aura prouvé l'existence d'une telle application s, s définira, par passage aux quotients, une application Λ-linéaire $\bar{s}$ de $\bar{M}$ dans $\bar{M}'$ (car, d'après (5.4), s applique IM dans $I'M'$) ; et $\bar{s}$ satisfera aux conditions

(5.2') $\qquad \bar{s}(\bar{M}_k) \subset \bar{M}'_{k+1}$;

(5.3') $\qquad \bar{d}'\bar{s} + \bar{s}\bar{d} = \bar{g}_1 - \bar{g}_2$.

Il en résultera que $\bar{g}_1$ et $\bar{g}_2$ définissent la même application $H_*(\bar{M}) \longrightarrow H_*(\bar{M}')$

Tout revient donc à prouver l'existence de s. Une fois connus les éléments $s(m_i) = n_i'$, on posera

$$(5.5) \qquad s(\sum_i a_i m_i) = \sum_i (-1)^{\alpha_i} (fa_i) n_i' \qquad (\alpha_i = \text{degré de } a_i).$$

Pour que s, ainsi défini, satisfasse à (5.2), (5.3) et (5.4), il faut que :

(i) n_i' soit homogène, de degré égal au degré de m_i plus un ;

(ii) $d'n_i' = g_1(m_i) - g_2(m_i) - s(dm_i)$,

où $s(dm_i)$ est calculé grâce à (5.5).

Ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes (la vérification, laissée au lecteur, fait usage du signe $(-1)^k$ qui figure dans la condition (5.4)). Pour choisir les n_i' de manière à satisfaire à (i) et (ii), on procède par récurrence sur le degré de m_i. Supposons déjà choisis les n_i' associés aux m_i de degré $< k$ $(k \geqslant 0)$, et définissons s, sur le sous-module $\sum_{h<k} M_h$, par la formule (5.5) ; s satisfait à (5.3) sur $\sum_{k<h} M_h$. Soit alors m_i de degré k ; on cherche n_i' de degré $k+1$, qui satisfasse à (ii), dont le second membre v_i' est déjà connu. Si $k = 0$, on vérifie que $\eta'(v_i') = 0$, et si $k \geqslant 1$, on vérifie que $d'v_i' = 0$; dans les deux cas, l'acyclicité de M' prouve l'existence de l'élément n_i' cherché.

La démonstration du théorème 1 est achevée.

Un complément essentiel au théorème 1 est le suivant :

<u>Théorème 2</u>.- <u>Soit</u> M <u>un DGA-module sur une DGA-algèbre</u> A, <u>ayant une A-base homogène</u> ; <u>et soit</u> M' <u>un DGA-module sur une DGA-algèbre</u> A', <u>ayant une A'-base homogène</u>. <u>Supposons</u> M <u>et</u> M' <u>acycliques</u>. <u>Soit</u> g <u>un DGA-homomorphisme</u> $M \to M'$ <u>compatible avec un DGA-homomorphisme</u> $f : A \to A'$. <u>Si</u> f <u>induit un isomorphisme</u> $f_* : H_*(A) \approx H_*(A')$, <u>alors l'homomorphisme</u> $\bar{g}_* : H_*(\bar{M}) \to H_*(\bar{M}')$ <u>est un isomorphisme</u>.

La démonstration de ce théorème est presque triviale dans le cas où $A = A'$, f étant l'application identique : c'est une conséquence facile du théorème 1, que nous ne détaillerons pas. Dans le cas général, le résultat est plus profond. Il sera démontré dans l'exposé suivant, en application d'un théorème plus général, dû à J.C. Moore (non publié).
