

# SÉMINAIRE HENRI CARTAN

**J-P. SERRE**

**Les espaces  $K(\pi, n)$**

*Séminaire Henri Cartan*, tome 7, n° 1 (1954-1955), exp. n° 1, p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=SHC\\_1954-1955\\_\\_7\\_1\\_A1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_1_A1_0)

© Séminaire Henri Cartan  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

LES ESPACES  $K(\Pi, n)$ 

(Exposé de J-P. SERRE, 10.11.1954).

Dans cet exposé, nous allons indiquer les principales propriétés des espaces  $K(\Pi, n)$ , introduits par Eilenberg-MacLane [4]; nous nous placerons à un point de vue purement "topologique" (cf. [20], [15], [17]). Le point de vue "algébrique" (cf. [4], [5], [1]) fera l'objet des exposés suivants.

## 1. Rappel.

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue d'un espace  $X$  dans un espace  $Y$ . Le "mapping-cylinder"  $X_f$  de  $f$  est défini ainsi : si  $Z$  désigne l'espace somme de  $Y$  et de  $X \times I$  ( $I = [0, 1]$ ),  $X_f$  est l'espace obtenu à partir de  $Z$  en identifiant  $(x, 1)$  avec  $f(x)$  pour tout  $x \in X$ .

L'espace  $X_f$  contient  $X$  et  $Y$ , et  $Y$  est un rétracte de déformation de  $X_f$ ; de plus l'application composée :  $X \rightarrow X_f \rightarrow Y$  est égale à  $f$ . Si l'on convient d'identifier  $X_f$  et  $Y$  (ce qui est naturel, vu qu'ils ont même type d'homotopie), on voit que  $f$  se trouve ainsi identifié à l'homéomorphisme de  $X$  dans  $X_f$ .

A titre d'application, supposons que les homomorphismes

$$f_0 : \pi_i(X) \rightarrow \pi_i(Y)$$

définis par  $f$  soient bijectifs pour tout  $i$ ; on en conclut que  $\pi_i(X_f, X) = 0$  pour tout  $i$ , d'où, par un raisonnement élémentaire de déformation,  $H_i(X_f, X) = 0$  pour tout  $i$ , ce qui montre que

$$f_* : H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$$

est bijectif pour tout  $i$ .

De façon analogue, toute application continue peut être remplacée par une projection d'espace fibré. D'après ce qui précède, on peut se borner à le montrer pour une injection  $X \rightarrow Y$ . Soit alors  $X'$  l'espace des chemins de  $Y$  dont l'origine appartient à  $X$ ; l'espace  $X$  est un rétracte de déformation de  $X'$ ; l'application  $\pi$  qui fait correspondre à tout chemin de  $Y$  son extrémité fait de  $X'$  un espace fibré de base  $Y$  (au sens de [15]), et l'application composée  $X \rightarrow X' \xrightarrow{\pi} Y$  n'est autre que l'injection de  $X$  dans  $Y$ . Si, comme précédemment, on identifie  $X$  avec  $X'$ , on voit que l'injection de  $X$  dans  $Y$  est remplacée par la projection  $\pi : X' \rightarrow Y$ .

Ces deux procédés sont souvent utilisés dans les questions relatives aux groupes d'homotopie. Cf. notamment [9], [10], [16].

## 2. Les espaces $K(\Pi, n)$ - définition et construction.

Soit  $n$  un entier  $\geq 1$ , et soit  $\Pi$  un groupe, supposé abélien si  $n \geq 2$ . Un espace  $X$  est appelé un espace  $K(\Pi, n)$  si l'on a :

$$\begin{cases} \pi_i(X) = 0 & \text{pour } i \neq n \\ \pi_n(X) = \Pi \end{cases}$$

En particulier,  $\pi_0(X) = 0$ , ce qui signifie que  $X$  est connexe par arcs.

Exemples. Le cercle  $S_1$  est un espace  $K(Z, 1)$ ; le tore  $T^n$  est un espace  $K(Z^n, 1)$ ; plus généralement, si  $X$  est un espace  $K(\Pi, n)$ , et  $X'$  un espace  $K(\Pi', n)$ , il est clair que  $X \times X'$  est un espace  $K(\Pi \times \Pi', n)$ .

L'espace projectif réel de dimension infinie,  $P_\infty(\mathbb{R})$ , est un espace  $K(Z_2, 1)$ ; de même, un espace lenticulaire de dimension infinie est un espace  $K(Z_p, 1)$ .

L'espace projectif complexe de dimension infinie,  $P_\infty(\mathbb{C})$ , est un espace  $K(Z, 2)$ .

Construction d'espaces  $K(\Pi, n)$ . Donnons-nous  $n$  et  $\Pi$  (abélien, si  $n \geq 2$ ). Le procédé décrit dans [22] permet de construire un complexe cellulaire qui soit un espace  $K(\Pi, n)$ : on définit par récurrence le  $q$ -squelette  $K_q$  de ce complexe, de la façon suivante :

pour  $q < n$ ,  $K_q$  est réduit à un point  $x_0$ .

$K_n$  s'obtient en attachant à  $x_0$  des cellules de dimension  $n$ , correspondant chacune à un générateur de groupe  $\Pi$ .

$K_{n+1}$  s'obtient en attachant à  $K_n$  des cellules de dimension  $n+1$ ,

de telle sorte que leurs bords fournissant les relations nécessaires entre les générateurs précédents.

...

$K_{q+1}$ ,  $q > n$ , s'obtient en attachant à  $K_q$  des cellules de dimension  $q+1$ , de telle sorte que leurs bords engendrent le groupe  $\pi_q(K_q)$ .

On constate alors que  $\pi_i(K_q) = 0$  pour  $i < q$ , et  $i \neq n$ , tandis que, si  $q > n+1$ , on a  $\pi_n(K_q) = \Pi$ . Le complexe  $K$ , réunion des  $K_q$ , est donc bien un espace  $K(\Pi, n)$ .

De plus, si  $\Pi$  est un groupe abélien de type fini, on peut faire en sorte que les  $K_q$  soient des complexes finis (cf. [18], p.36-37) : on raisonne par récurrence sur  $q$ ; si  $K_q$  est un complexe fini,  $\pi_q(K_q)$  est un groupe de type fini, ([15], p.491, ou [16], p.271-274), donc  $K_{q+1}$  peut être obtenu en attachant à  $K_q$  un nombre fini de cellules.

### 3. Espaces $K(\Pi, n)$ et classes de cohomologie .

A partir de maintenant, nous nous bornerons au cas où  $\Pi$  est un groupe abélien (ce n'est une restriction que si  $n = 1$ ). Si  $Y$  est un espace  $K(\Pi, n)$ , on a alors  $H_n(Y) = \Pi$  et  $H_{n-1}(Y) = 0$ , ce qui montre que  $H^n(Y, G) = \text{Hom}(\Pi, G)$ ; en particulier, le groupe  $H^n(Y, \Pi)$  contient une classe fondamentale  $\tau$ , correspondant à l'application identique de  $\Pi$  sur  $\Pi$ .

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue d'un espace  $X$  dans l'espace  $Y$ ; l'élément  $f^*(\tau)$  est un élément bien déterminé de  $H^n(X, \Pi)$ , qui ne dépend que de la classe d'homotopie de  $f$ .

Théorème - Si  $X$  est un complexe cellulaire, l'application  $f \rightarrow f^*(\tau)$  met en correspondance biunivoque les classes d'homotopie des applications de  $X$  dans  $Y$  et les éléments de  $H^n(X, \Pi)$ .

( Cf. [5], Note IV, [6], III, ainsi que [17] ).

Le théorème précédent est une simple conséquence de la théorie des obstructions de S. Eilenberg : par exemple, pour montrer qu'il existe une application  $f : X \rightarrow Y$  telle que  $f^*(\tau)$  soit une classe de cohomologie donnée  $x \in H^n(X, \Pi)$ , on commence par définir  $f$  sur le  $n+1$ -squelette de  $X$  (ce qui est toujours possible, comme on sait), puis on prolonge  $f$  aux squelettes successifs en utilisant le fait que les  $\pi_i(Y)$  sont nuls pour  $i > n$ . On procède de la même façon pour construire une homotopie entre deux applications  $f$  et  $g$  telles que  $f^*(\tau) = g^*(\tau)$ .

On peut appliquer le théorème précédent au cas où  $X$  est lui-même un espace  $K(\Pi, n)$  : on en conclut qu'il existe une application  $f : X \rightarrow Y$  telle que  $f_* : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$  soit l'application identique de  $\Pi$  sur  $\Pi$ . D'après ce qui a été rappelé au n° 1,  $f$  induit donc un isomorphisme des groupes d'homologie de  $X$  sur ceux de l'espace  $Y$ . Donc, les groupes d'homologie d'un espace  $K(\Pi, n)$  ne dépendent que de  $\Pi$  et de  $n$  (cf. [4]); on les note  $H_q(\Pi, n; G)$ , ce sont les groupes d'Eilenberg-MacLane. Pour  $n = 1$ , ils se réduisent aux groupes d'homologie du groupe  $\Pi$ , au sens de Hopf et Eilenberg-MacLane. Le calcul des  $H_q(\Pi, n; G)$ , pour  $n$  quelconque, fera l'objet des exposés suivants.

### 4. Les espaces $K(\Pi, n)$ , comme foncteurs de $\Pi$ .

Soit  $X$  un complexe cellulaire qui soit un espace  $K(\Pi, n)$ , et soit  $Y$  un espace  $K(\Pi', n)$ . On a  $H^n(X, \Pi') = \text{Hom}(\Pi, \Pi')$ , et le théorème du numéro précédent montre donc que les classes d'applications de  $X$  dans  $Y$  correspondent biunivoquement aux homomorphismes de  $\Pi$  dans  $\Pi'$ . En appliquant le procédé du n° 1, on peut en déduire diverses fibrations (cf. [17], n° 6).

Appliquons ce qui précède à l'homomorphisme  $\prod \times \prod \rightarrow \prod$  qui fait correspondre à tout couple  $(\alpha, \beta)$  l'élément  $\alpha + \beta$  : si  $X$  est un complexe cellulaire qui soit un espace  $K(\prod, n)$ , l'espace  $X \times X$  est un espace  $K(\prod \times \prod, n)$ , et c'est aussi un complexe cellulaire (du moins si  $X$  a un nombre fini de cellules en toute dimension) ; il existe donc une application  $\varepsilon : X \times X \rightarrow X$  telle que  $\varepsilon_0 : \pi_n(X \times X) \rightarrow \pi_n(X)$  soit l'homomorphisme ci-dessus. D'où une structure d'algèbre sur  $H_{\times}(X) = \sum H_q(X)$ . Si l'on note  $(x, y) \cdot x \cdot y$  l'application qui vient d'être définie (et qui est unique à une homotopie près), on voit que cette application est homotope à l'application  $(x, y) \cdot y \cdot x$  (car les deux applications ont le même effet sur  $\pi_n$ ) ; le même raisonnement montre que  $(x, y) \cdot z$  et  $x \cdot (y \cdot z)$  sont des applications homotopes de  $X \times X \times X$  dans  $X$ . Donc  $H_{\times}(\prod, n)$  est une algèbre associative et anticommutative. On démontre de même l'existence dans  $X$  d'un "inverse à une homotopie près".

### 5. Relations entre $K(\prod, n-1)$ et $K(\prod, n)$ .

Soit  $X$  un espace  $K(\prod, n)$ , et soit  $\Omega(X)$  l'espace des lacets sur  $X$  (ayant leur origine et leur extrémité en un point fixé de  $X$ ). Puisque  $\pi_1(\Omega(X)) = \pi_{i+1}(X)$ , l'espace  $\Omega(X)$  est un espace  $K(\prod, n-1)$ . En considérant l'espace fibré  $E$  des chemins sur  $X$  d'origine fixée, on voit (cf. [15], chap. VI) qu'il existe un espace fibré contractile dont la base est un  $K(\prod, n)$  et la fibre un  $K(\prod, n-1)$ .

Une telle fibration fournit des relations très précises entre  $K(\prod, n)$  et  $K(\prod, n-1)$  ; d'où la possibilité d'une étude des  $K(\prod, n)$  par récurrence sur  $n$  (le cas  $n=1$  étant bien connu) ; c'est ainsi que, par des calculs de suites spectrales, on peut déterminer les algèbres de cohomologie  $H^*(\prod, n; \mathbb{R})$  et  $H^*(\prod, n; \mathbb{Z}_2)$ , cf. [15], [17]. Lorsqu'on se place au point de vue algébrique, cette fibration est remplacée par la notion de "construction" de H. Cartan [1].

Le produit de deux lacets définit une multiplication dans  $\Omega(X)$ , qui est un espace  $K(\prod, n-1)$  ; d'où une structure d'algèbre sur  $H_{\times}(\prod, n-1)$ . Cette structure coïncide avec celle définie au numéro précédent, comme on le voit en écrivant un diagramme (voir aussi [7]). L'espace fibré  $E$  joue, pour le "groupe"  $K(\prod, n-1)$ , le rôle d'un espace fibré principal universel, dont l'espace classifiant est  $K(\prod, n)$ .

### 6. Espaces $K(\prod, n)$ et opérations cohomologiques.

Le théorème du n° 3 joue un rôle essentiel dans l'étude des opérations cohomologiques (cf. [6], III, ainsi que [17], paragraphe 4). Par exemple, supposons que l'on veuille prouver la formule suivante, due à Adem :

$$Sq^2 Sq^2(x) = Sq^3 Sq^1(x) \quad \text{pour tout } x \in H^n(X, \mathbb{Z}_2).$$

On peut supposer que  $X$  est un complexe cellulaire. Dans ce cas, d'après le n° 5, on aura  $x = f^*(v)$ ,  $f$  étant une application continue convenable de  $X$  dans un espace  $K(Z_2, n)$ , et tout reviendra à démontrer que  $Sq^2Sq^2(v) = Sq^3Sq^1(v)$  dans  $H^{n+4}(Z_2, n; Z_2)$ . On peut même éviter de vérifier cette dernière formule : supposons seulement démontré que  $H^{n+4}(Z_2, n; Z_2)$  est un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps  $Z_2$  ( $n$  étant  $\geq 4$ ) ; alors les trois éléments  $Sq^4(v)$ ,  $Sq^3Sq^1(v)$ ,  $Sq^2Sq^2(v)$  sont liés par au moins une relation linéaire ; mais il est facile de construire une classe de cohomologie  $x$  particulière (dans un produit d'espaces projectifs réels, par exemple) telle que  $Sq^2Sq^2(x) = Sq^3Sq^1(x)$  et que  $Sq^4(x)$  et  $Sq^3Sq^1(x)$  soient linéairement indépendantes sur  $Z_2$  ; il en résulte que la seule relation linéaire possible entre  $Sq^4(v)$ ,  $Sq^3Sq^1(v)$  et  $Sq^2Sq^2(v)$  est la relation  $Sq^3Sq^1(v) = Sq^2Sq^2(v)$ , C.Q.F.D.

La même méthode permet de retrouver les résultats d'Adem relatifs aux puissances réduites de Steenrod (cf. [2]) ; le seul résultat que l'on utilise est la dimension de  $H^q(Z_p, n; Z_p)$  sur le corps  $Z_p$ .

## 7. Espaces $K(\Pi, n)$ et type d'homotopie.

Soient  $\pi_1, \dots, \pi_n, \dots$  une suite de groupes, et essayons de construire un espace  $X$  dont le  $i$ -ème groupe d'homotopie soit  $\pi_i$ . Soit d'abord  $X_1$  un espace  $K(\pi_1, 1)$ . Nous allons déterminer un espace  $X_2$ , fibré de base  $X_1$ , et de fibre un espace  $K(\pi_2, 2)$  ; il est clair qu'un tel espace aura pour groupes d'homotopie  $\pi_1, \pi_2, 0, \dots$ . Soit  $E$  un espace fibré contractile de base  $K(\pi_2, 3)$  et de fibre  $K(\pi_2, 2)$  ; si  $f$  est une application quelconque de  $X_1$  dans  $K(\pi_2, 3)$ , l'espace fibré image réciproque de  $E$  par  $f$  sera bien un espace fibré de base  $X_1$  et de fibre  $K(\pi_2, 2)$ . Si  $X_1$  est un complexe cellulaire, nous savons que la classe d'homotopie de  $f$  correspond biunivoquement à une classe de cohomologie  $k^3 \in H^3(\pi_1, 1; \pi_2)$ . On voit donc que, à tout élément  $k^3 \in H^3(\pi_1, 1; \pi_2)$ , est associé un espace  $X_2$  que nous appellerons un espace  $K(\pi_1, 1, \pi_2, 2, k^3)$ . De la même façon, toute classe de cohomologie  $k^4 \in H^4(X_2, \pi_3)$  définit un espace fibré  $X_3 = K(\pi_1, 1, \pi_2, 2, k^3, \pi_3, 3, k^4)$  de base  $X_2$  et de fibre un espace  $K(\pi_3, 3)$ . Et ainsi de suite.

La construction précédente a été introduite, à un point de vue purement algébrique, par Postnikov ([13], [14]) et Zilber (non publié) ; voir aussi [5]. Signalons que l'on peut démontrer que tout espace  $X$  a même type d'homotopie (au point de vue singulier) que la limite d'une suite  $(X_1, \dots, X_n, \dots)$  définie comme ci-dessus ; les groupes d'homotopie  $\pi_1, \dots$  et les invariants  $k^3, \dots$  constituent un système complet d'invariants du type d'homotopie.

Les espaces  $K(\pi_1, 1, \pi_2, k^3, \dots)$  jouent un rôle "universel" pour les opérations cohomologiques non partout définies (par exemple les opérations introduites par LASSAY, et par ADAM), de même que les espaces  $K(\overline{\Pi}, n)$  jouent un rôle universel pour les opérations cohomologiques partout définies.

### 8. Autres applications des $K(\overline{\Pi}, n)$ .

Les espaces  $K(\overline{\Pi}, n)$  sont en relation étroite avec les problèmes d'obstruction ; cf. [5], Note IV, [5], III, [II], [12],

Ils peuvent également être utilisés dans le calcul des groupes d'homotopie d'un espace donné  $X$  : on construit des espaces  $(X, i)$  qui "tuent" les groupes d'homotopie de  $X$  jusqu'au  $i$ -ème, et qui sont reliés entre eux par des fibrations faisant intervenir des espaces  $K(\overline{\Pi}, n)$  (cf. [3], Note I, et [21]). On trouvera des applications de cette méthode dans [3], Note II, [9], [10], [16], [17], [18].

Pour une construction explicite d'un complexe cellulaire  $K(\mathbb{Z}, n)$  (en dimensions assez basses), cf. [19].

---

### Bibliographie

- [1] - H. CARTAN - Sur les groupes d'Eilenberg-MacLane  $H(\overline{\Pi}, n)$ . I, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 40, 1954, p. 467-471 ; II, ibid., p. 704-707
- [2] - H. CARTAN - Sur l'itération des opérations de Steenrod. Comm. Math. Helv., vol. 29, 1955, à paraître.
- [3] - H. CARTAN et J-P. SERRE - Espaces fibrés et groupes d'homotopie. I, C.R. Acad. Sci. Paris, vol. 254, 1952, p. 288-290 ; II, ibid., p. 393-395.
- [4] - S. EILENBERG and S. MAC LANE - Relations between homology and homotopy groups of spaces. I, Ann. of Math., vol. 46, 1945, p. 480-509 ; II, ibid., vol. 51, 1950, p. 514-533.
- [5] - S. EILENBERG and S. MAC LANE - Cohomology theory of abelian groups and homotopy theory. I, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 36, 1950, p. 443-447 ; II, ibid., p. 657-663 ; III, ibid., vol. 37, 1951, p. 307-310 ; IV, ibid., vol. 38, 1952, p. 1340-1342.
- [6] - S. EILENBERG and S. MAC LANE - On the groups  $H(\overline{\Pi}, n)$ . I, Ann. of Math., vol. 58, 1953, p. 55-106 ; II, ibid., vol. 60, 1954, p. 49-139 ; III, ibid., à paraître.
- [7] - S. MAC LANE - The homology products in  $K(\overline{\Pi}, n)$ . Proc. Am. math. Soc., vol. 5, 1954, p. 642-651.
- [8] - K. MIZUNO - On the minimal complexes. J. Inst. Polyt. Osaka City Univ., vol. 5, 1954, p. 41-51.

- [9] - J.C. MOORE - Some applications of homology theory to homotopy problems. Ann. of Math., vol. 58, 1953, p. 325-350.
- [10] - J.C. MOORE - On homotopy groups of spaces with a single non-vanishing homology group. Ann. of Math., vol. 59, 1954, p. 549-557.
- [11] - M. NAKAOKA - Classification of mappings of a complex into a special kind of complex. J. Inst. Polyt. Osaka City Univ., vol. 3, 1952, p. 101-149.
- [12] - M. NAKAOKA - On homotopy classification and extension. Proc. Japan Acad., vol. 29, 1953, p. 6-9.
- [13] - M.M. POSTNIKOV - Determination of the homology groups of a space by means of the homotopy invariants (en russe) . Doklady Akad. Nauk SSSR, vol. 70, 1951, p. 359-362.
- [14] - M.M. POSTNIKOV - On the homotopy type of polyedra (en russe) . Doklady Akad. Nauk SSSR, vol. 76, 1951, p. 789-791.
- [15] - J.P. SERRE - Homologie singulière des espaces fibrés. Applications. Ann. of Math., vol. 54, 1951, p. 425-505.
- [16] - J.P. SERRE - Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. Ann. of Math., vol. 58, 1953, p. 258-294.
- [17] - J-P. SERRE - Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane. Com. Math. Helv., vol. 27, 1953, p. 198-232.
- [18] - R. THOM - Quelques propriétés globales des variétés différentielles. Com. Math. Helv., vol. 28, 1954, p. 17-86.
- [19] - H. TODA - Generalized Whitehead products and homotopy groups of spheres. J. Inst. Polyt. Osaka City Univ., vol. 3, 1952, p. 43-82.
- [20] - G.W. WHITEHEAD - On spaces with vanishing low-dimensional homotopy groups. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 34, 1948, p. 207-211.
- [21] - G.W. WHITEHEAD - Fibre space and the Eilenberg homology groups. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 38, 1952, p. 426-430.
- [22] - J.H.C. WHITEHEAD - On the realizability of homotopy groups. Ann. of Math., vol. 50, 1949, p. 261-263.
-