

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

H. CARTAN

**Détermination des algèbres $H_*(\pi, n; Z_2)$ et $H^*(\pi, n; Z_2)$
; groupes stables modulo p**

Séminaire Henri Cartan, tome 7, n° 1 (1954-1955), exp. n° 10, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_1_A10_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉTERMINATION DES ALGÈBRES $H_*(\Pi, n; Z_2)$ et $H^*(\Pi, n; Z_2)$;

GROUPES STABLES modulo p .

(Exposé de H. CARTAN, 24.1.1955)

1.- Mots admissibles ; opérations correspondantes.

Les mots sont formés avec les deux lettres σ et γ_2 . La hauteur d'un mot α est égale au nombre de lettres σ figurant dans α ; le degré de α se définit par récurrence sur le nombre des lettres de α : le degré du mot vide est 0 , et on pose

$$(1) \quad \deg(\sigma \alpha) = 1 + \deg(\alpha) \quad , \quad \deg(\gamma_2 \alpha) = 2 \cdot \deg(\alpha) \quad .$$

La différence entre le degré et la hauteur s'appelle le degré stable.

Un mot admissible est un mot non vide qui commence par σ et qui finit par σ .

Proposition 1.- Soit α un mot admissible de hauteur n ; pour qu'un mot $\beta \alpha$ soit admissible de hauteur $n+1$, il faut et il suffit que β ait la forme $\sigma(\gamma_2)^k$, k entier ≥ 0 quelconque. (C'est évident).

Un mot admissible est de première espèce s'il ne se termine pas (à droite) par $\gamma_2 \sigma$; de deuxième espèce s'il se termine par $\gamma_2 \sigma$. A chaque mot admissible α , de première espèce, on associe une application

$f(\alpha) : \Pi/2\Pi \rightarrow H_{n+q}(\Pi, n; Z_2)$, où n et q désignent la hauteur et le degré stable de α . La définition de $f(\alpha)$ se fait par récurrence sur la hauteur de α :

si α est de hauteur 1 (donc $\alpha = \sigma$) , $f(\alpha)$ est la suspension $\sigma : \Pi \otimes Z_2 \rightarrow H_1(\Pi, 1; Z_2)$;

si $\alpha = \sigma(\gamma_2)^k \beta$, le mot admissible β étant de hauteur n et de degré stable q , $f(\alpha)$ est l'application composée

$$\Pi/2\Pi \xrightarrow{f(\beta)} H_{n+q}(\Pi, n; Z_2) \xrightarrow{\sigma \circ \gamma_2^k} H_{2k(n+q)+1}(\Pi, n; Z_2) \quad ,$$

qui est définie puisque γ_2 est une opération définie sur les éléments de degré ≥ 2 ; or si $k \geq 1$, on a $n+q \geq 2$, puisque le mot α est de première espèce.

A chaque mot admissible α , de deuxième espèce, on associe une application $f(\alpha) : {}_2\Pi \rightarrow H_{n+q}(\Pi, n; Z_2)$, où n et q désignent la hauteur et le degré stable de α . La définition de $f(\alpha)$ est encore récurrente : $f(\gamma_2 \zeta)$ est l'application $\gamma_2 \zeta : {}_2\Pi \rightarrow H_2(\Pi, 1; Z_2)$, qui est définie puisque γ_2 est défini sur l'image de ${}_2\Pi$ par ζ (Exposé n° 7, paragraphe 8). La récurrence se fait ensuite d'une manière évidente.

Proposition 2.- Les applications $f(\alpha)$ sont linéaires.

En effet, la suspension ζ est linéaire ; de plus, sur les éléments de degré ≥ 2 (et sur les éléments de $H_1(\Pi, 1; Z_2)$ situés dans l'image de ${}_2\Pi$ par ζ), l'application $\zeta \gamma_{2k}$ est linéaire, en vertu de la formule (3) de l'Exposé n° 7, et du fait que ζ s'annule sur les éléments décomposables.

2.- Les algèbres $S(M^{(n)}(\Pi))$.

Pour chaque entier $n \geq 1$, on définit un Z_2 -espace vectoriel gradué $M^{(n)}(\Pi)$, comme suit : c'est la somme directe d'autant d'exemplaires de $\Pi/2\Pi$ qu'il y a de mots admissibles de hauteur n et de première espèce, et d'autant d'exemplaires de ${}_2\Pi$ qu'il y a de mots admissibles de hauteur n et de deuxième espèce. Chaque exemplaire de $\Pi/2\Pi$ (resp. de ${}_2\Pi$) est affecté d'un degré égal au degré du mot α qui l'indexe. Les applications linéaires $f(\alpha)$ définies ci-dessus définissent une application linéaire $f^{(n)}$ de l'espace vectoriel $M^{(n)}(\Pi)$ dans $H_*(\Pi, n; Z_2)$, qui conserve le degré.

Appliquons à $f^{(n)}$ le théorème 2 bis de l'Exposé n° 8 ; si $n \geq 2$, l'application $f^{(n)}$ se prolonge d'une seule manière en un homomorphisme $g^{(n)} : S(M^{(n)}(\Pi)) \rightarrow H_*(\Pi, n; Z_2)$, compatible avec les structures d'algèbres graduées et avec les puissances divisées. Pour $n = 1$, on peut appliquer le théorème si les puissances divisées des éléments de $H_1(\Pi, 1; Z_2)$ sont définies, ce qui exige que $\Pi = {}_2\Pi$, ou, ce qui revient au même, $2\Pi = 0$. Dans ce dernier cas, on trouve un homomorphisme $g^{(1)} : S(M^{(1)}(\Pi)) \rightarrow H_*(\Pi, 1; Z_2)$; observons d'ailleurs que $M^{(1)}(\Pi) = \Pi$, gradué par le degré 1.

Théorème fondamental : si $n \geq 2$, l'homomorphisme $g^{(n)}$ est un isomorphisme de l'algèbre $S(M^{(n)}(\Pi))$ sur l'algèbre $H_*(\Pi, n; Z_2)$; si de plus $2\Pi = 0$, $g^{(1)}$ est un isomorphisme de $S(M^{(1)}(\Pi))$ sur $H_*(\Pi, 1; Z_2)$.

3.- Démonstration du théorème fondamental.

Le raisonnement est analogue à celui de l'Exposé n° 9, paragraphe 3. Il suffit donc de faire la démonstration lorsque Π est un groupe cyclique, d'ordre infini ou une puissance d'un nombre premier. Si Π est cyclique

d'ordre p^f (p premier $\neq 2$), on a vu (Exposé n° 9, paragraphe 3) que $H_*(\Pi, n; Z_2)$ se réduit aux scalaires ; or il en est de même de $S(M^{(n)}(\Pi))$. Il reste donc à examiner le cas où Π est cyclique infini ou d'ordre 2^f .

Lemme 1. - Si Π est cyclique infini ou d'ordre 2^f , il existe un homomorphisme $S(M^{(2)}(\Pi)) \rightarrow \overline{B}^{(2)}(Z_2(\Pi))$ qui, par passage à l'homologie, donne $g^{(2)}$ qui est un isomorphisme. Si de plus Π est cyclique d'ordre 2, il existe un homomorphisme $S(M^{(1)}(\Pi)) \rightarrow \overline{B}^{(1)}(Z_2(\Pi))$, compatible avec les puissances divisées, et qui, par passage à l'homologie, donne un isomorphisme.

Démonstration du lemme 1 : il suffit de reprendre le lemme 1 de l'Exposé n° 9, qui est valable aussi pour $p = 2$. Si $\overline{M}^{(1)}$ désigne le Z_2 -espace vectoriel, somme directe de $\Pi/2\Pi$ (degré 1) et de ${}^2\Pi$ (degré 2), on a un homomorphisme de $U(\overline{M}^{(1)})$ dans la bar construction $\overline{B}^{(1)}(Z_2(\Pi))$, compatible avec les puissances divisées des éléments de degré pair, et qui par passage à l'homologie donne un isomorphisme. Dans le cas particulier où $2\Pi = 0$, donc où Π est cyclique d'ordre 2, $U(\overline{M}^{(1)})$ s'identifie à $S(M^{(1)})$, et on constate que l'homomorphisme $S(M^{(1)}) \rightarrow \overline{B}^{(1)}(Z_2(\Pi))$ est alors compatible avec l'opération χ_2 sur l'élément de degré un, donc avec les puissances divisées pour tous les degrés ≥ 1 .

Dans le cas où Π est cyclique infini, on a obtenu un homomorphisme de l'algèbre extérieure $E_2(x, 1)$ dans $\overline{B}^{(1)}(Z_2(\Pi))$, qui envoie x dans la suspension du générateur a de Π , et qui, par passage à l'homologie, donne un isomorphisme. Considérons la construction acyclique $E_2(x, 1) \otimes P_2(y, 2)$, avec $dy = x$; elle définit un homomorphisme spécial $P_2(y, 2) \rightarrow \overline{B}^{(2)}(Z_2(\Pi))$, compatible avec les puissances divisées, et qui, par passage à l'homologie, donne un isomorphisme (cf. théorème 5 de l'Exposé n° 4). Or l'image de y sera $66a$, et ceci prouve que cet isomorphisme n'est autre que $g^{(2)}$.

Enfin, si Π est cyclique d'ordre 2^f , on a déjà obtenu un homomorphisme de $E_2(x, 1) \otimes P_2(y, 2)$ (différentielle nulle) dans $\overline{B}^{(1)}(Z_2(\Pi))$, qui envoie x dans la suspension du générateur a de Π , et y dans la transpotence de $a^{2^{f-1}}$, c'est-à-dire $\chi_2 6(a^{2^{f-1}})$. Cet homomorphisme, compatible avec les puissances divisées, définit un isomorphisme en passant à l'homologie. On va considérer une construction acyclique (A, N, M) , d'algèbre initiale $A = E_2(x, 1) \otimes P_2(y, 2)$, d'où l'on déduit un homomorphisme spécial $N \rightarrow \overline{B}^{(2)}(Z_2(\Pi))$, compatible avec toutes les puissances divisées, et qui, par passage à l'homologie, définira un isomorphisme. Pour fabriquer N et M , on observe que A s'écrit

$$E_2(x,1) \otimes E_2(y,2) \otimes E_2(\gamma_2 y,4) \otimes \dots \otimes E_2(\gamma_{2^k} y, 2^k) \otimes \dots$$

et par suite on connaît une construction acyclique M , d'algèbre initiale A et dont l'algèbre finale est

$$N = P_2(\sigma x, 2) \otimes P_2(\sigma y, 3) \otimes P_2(\sigma \gamma_2 y, 5) \otimes \dots \otimes P_2(\sigma \gamma_{2^k} y, 2^{k+1}) \otimes \dots$$

avec différentielle nulle. On a $\sigma x = \sigma \sigma a$, $\sigma \gamma_{2^k} y = \sigma \gamma_{2^{k+1}} \sigma (a^{2^k-1})$. Donc l'isomorphisme $N \approx H_*(\pi, 2; Z_2)$ est bien $g^{(2)}$. Et ceci achève la démonstration du lemme 1.

Pour prouver le théorème fondamental, il reste à passer de n à $n+1$, pour $n \geq 2$. Pour cela :

Lemme 2. - pour tout entier $n \geq 1$, il existe une construction acyclique (sur le corps Z_2) ayant $S(M^{(n)})$ comme algèbre initiale (avec différentielle nulle), et $S(M^{(n+1)})$ comme algèbre finale (avec différentielle nulle); et cette construction satisfait à la condition suivante : les éléments de la base de $M^{(n+1)}$ se déduisent des éléments de la base de $M^{(n)}$ par toutes les opérations $\sigma \gamma_{2^k}$, $k \geq 0$.

Démonstration du lemme 2 : l'algèbre $S(M^{(n)})$ est le produit tensoriel des algèbres de polynômes ^{divisées}/construites sur les éléments de la base de $M^{(n)}$. Le lemme 2 résulte alors de la :

Proposition 3. - Si x est de degré $q \geq 1$, il existe une construction acyclique ayant $P_2(x, q)$ comme algèbre initiale (différentielle nulle), et dont l'algèbre finale (différentielle nulle) est le produit tensoriel

$$P_2(\sigma x, q+1) \otimes P_2(\sigma \gamma_2 x, 2q+1) \otimes \dots \otimes P_2(\sigma \gamma_{2^k} x, 2^{k+1}q+1) \dots$$

Démonstration : le raisonnement a déjà été fait plus haut : on considère $P_2(x, q)$ comme le produit tensoriel

$$E_2(x, q) \otimes E_2(\gamma_2 x, 2q) \otimes \dots \otimes E_2(\gamma_{2^k} x, 2^k q) \otimes \dots$$

d'où suit la conclusion.

Le lemme 2 étant maintenant prouvé, le théorème fondamental s'en déduit par récurrence sur n : on trouve des homomorphismes $S(M^{(n)}(\pi)) \rightarrow \overline{B}^{(n)}(Z_2(\pi))$, compatibles avec les puissances divisées ; par passage à l'homologie, ils donnent des isomorphismes (en vertu du théorème 2 de l'Exposé n° 2) ; et l'on voit de proche en proche que ces isomorphismes sont précisément les homomorphismes $g^{(n)}$, car ils coïncident avec $f^{(n)}$ sur la base de $M^{(n)}(\pi)$.

4.- Structure de l'algèbre de cohomologie $H^*(\Pi, n; Z_2)$.

On raisonne exactement comme dans le cas où p est impair (Exposé n° 9, paragraphe 5) ; mais, compte tenu de la forme particulière du théorème fondamental pour $p = 2$, on trouve :

Théorème 2.- Soit $M^{(n)}(\Pi)$ le Z_2 -espace vectoriel gradué, somme directe d'autant d'exemplaires de $\text{Hom}(\Pi, Z_2)$ qu'il y a de mots admissibles de première espèce et de hauteur n , et d'autant d'exemplaires de $\text{Hom}({}_2\Pi, Z_2)$ qu'il y a de mots admissibles de deuxième espèce et de hauteur n ; chaque sous-espace $\text{Hom}(\Pi, Z_2)$, resp. $\text{Hom}({}_2\Pi, Z_2)$, est affecté d'un degré égal au degré du mot qui l'indexe. L'isomorphisme $g^{(n)}$ du théorème fondamental (valable pour $n \geq 2$, et aussi pour $n = 1$ lorsque $2\Pi = 0$) définit, par dualité, un isomorphisme de l'algèbre de cohomologie $H^*(\Pi, n; Z_2)$ sur l'algèbre symétrique $\sum M^{(n)}(\Pi)$ (algèbre commutative libre de l'espace vectoriel gradué $M^{(n)}(\Pi)$) .

5.- Schémas décrivant les mots admissibles.

Soit α un mot admissible. Numérotions de gauche à droite, par les entiers $1, 2, \dots$, celles des lettres de α qui sont égales à χ_2 . Soit α_i la i -ième d'entre elles, et soit a_i le degré du mot β_i obtenu en enlevant du mot α la lettre α_i et toutes celles qui sont à gauche de α_i . Alors le mot $\alpha_i \beta_i$ est de degré $2a_i$, et a_i est la différence des degrés stables des mots $\alpha_i \beta_i$ et β_i ; le degré stable ne change pas par σ .

On définit a_i pour tout $i \geq 1$, en convenant que $a_i = 0$ si i est strictement plus grand que le nombre des lettres χ_2 figurant dans α . Un mot qui ne contient que la lettre σ définit donc la suite $a_1 = 0, a_2 = 0, \dots$.

Théorème 3.- La suite (a_1, \dots, a_i, \dots) associée à un mot admissible de hauteur n et de degré stable q satisfait aux conditions :

- (ii) $a_i \geq 2a_{i+1}$ pour tout i ,
- (iii) $\sum_i a_i = q$,
- (iv) $2a_1 < n+q$.

(Il n'y a pas lieu d'écrire la condition (i) : a_1 est pair ou impair). Réciproquement, étant donnés n et q , toute suite (a_i) satisfaisant à ces conditions est associée à un mot admissible de hauteur n et de degré stable q , et ce mot est unique.

Démonstration : puisque $\deg(\beta_i) \geq \deg(\alpha_{i+1}\beta_{i+1})$, on a $a_i \geq 2a_{i+1}$. La relation (iii) résulte du fait que a_i est le saut du degré stable. Enfin, si $a_1 \neq 0$, on a $\alpha = \mathfrak{S}^h \gamma_2 \beta$, avec $\deg(\beta) = a_1$, et $h \geq 1$; d'où (iv).

Réciproquement, si des $a_i \geq 0$ vérifient (ii) et (iv), posons $h_{i+1} = a_i - 2a_{i+1} \geq 0$; h_{i+1} est le nombre des lettres \mathfrak{S} qui doivent figurer entre α_i et α_{i+1} dans le mot α cherché. Ceci détermine α , à cela près qu'il reste à déterminer le nombre h_1 des lettres \mathfrak{S} venant à gauche de α_1 ; on a $h_1 = n+q - 2a_1$, qui est bien ≥ 1 d'après (iv). Le degré stable q du mot α ainsi obtenu satisfait à (iii).

Remarque : la connaissance des entiers h_{i+1} ($i \geq 1$), qui sont ≥ 0 , détermine la suite des a_i par la formule

$$(2) \quad a_i = \sum_{j \geq 0} 2^j h_{i+j+1} .$$

Autre remarque : pour que le mot α associé à une suite (a_i) soit de deuxième espèce, il faut et il suffit que le dernier des $a_i \neq 0$ soit égal à 1.

6.- Groupes stables.

Soit p un entier premier. Si $q < (p-1)n$, toute suite (a_i) satisfaisant aux conditions (i), (ii), (iii) du théorème 3 de l'Exposé n° 9, satisfait aussi à (iv); il en est de même pour $p = 2$, en se référant au théorème 2 ci-dessus. Autrement dit, les sous-espaces $M_{n+q}^{(n)}(\Pi)$ des éléments de degré $n+q$ de $M^{(n)}(\Pi)$, pour un q donné (et un p premier donné) sont indépendants de n dès que $n > q/(p-1)$. On les notera $A_q(\Pi; Z_p)$.

Observons de plus que $U_{n+q}(M^{(n)}(\Pi))$ se réduit à $M_{n+q}^{(n)}(\Pi)$ si $n > q$. on a donc des isomorphismes naturels

$$H_{n+q}(\Pi, n; Z_p) \approx A_q(\Pi; Z_p) \text{ pour } 0 \leq q < n .$$

Ces divers isomorphismes se déduisent les uns des autres par la suspension $H_{n+q}(\Pi, n; Z_p) \rightarrow H_{n+q+1}(\Pi, n+1; Z_p)$ (cf. théorème 1 de l'Exposé n° 6). Les Z_p -espaces vectoriels $A_q(\Pi; Z_p)$ sont les groupes stables d'Eilenberg-MacLane. Ils sont décrits par les suites (a_i) qui satisfont à (i), (ii), (iii); ceci les détermine entièrement.

Proposition 4.- Soit b_q (resp. b'_q) le nombre des mots admissibles (par des mots admissibles de première espèce) de degré stable q ; c est la dimension de l'espace vectoriel $A_q(\Pi; Z_p)$ lorsque Π est cyclique d'ordre p^f (resp.

lorsque Π est cyclique infini). La série de Poincaré $\mathcal{V}_p(t) = \sum_{q \geq 0} b_q t^q$,
 resp. $\mathcal{V}'_p(t) = \sum_{q \geq 0} b'_q t^q$, est donnée par

$$(3) \quad \mathcal{V}_p(t) = \prod_{k \geq 0} \frac{1 + t^{2p^k - 1}}{1 - t^{2p^{k+1} - 2}},$$

$$(3') \quad \mathcal{V}'_p(t) = \frac{\mathcal{V}_p(t)}{1+t} = \prod_{k \geq 1} \frac{1 + t^{2p^k - 1}}{1 - t^{2p^k - 2}}.$$

Ces formules, valables aussi pour $p = 2$, deviennent dans ce cas :

$$\mathcal{V}_2(t) = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - t^{2^k - 1}}, \quad \mathcal{V}'_2(t) = \frac{1}{1 - t^2} \cdot \prod_{k \geq 2} \frac{1}{1 - t^{2^k - 1}}.$$

Démonstration : $\mathcal{V}_p(t)$ est la somme des monômes t^q attachés à toutes les suites (a_i) satisfaisant à (i), (ii), (iii). Avec les notations du paragraphe 6 de l'Exposé n° 9, on a

$$\begin{aligned} q &= \sum_{i \geq 1} a_i = \sum_{i \geq 1} 2(p-1)k_i + u_i = \sum_{i \geq 1, j \geq 0} 2(p-1)p^j (h_{i+j+1} + u_{i+j+1}) + u_i = \\ &= u_1 + (2p-1)u_2 + \dots + (2p^i - 1)u_{i+1} + \dots + 2(p-1)h_2 + 2(p^2 - 1)h_3 + \dots \\ &\quad + 2(p^{i+1} - 1)h_{i+2} + \dots \end{aligned}$$

Ainsi le monôme t^q attaché à une suite (a_i) définie par u_1, \dots et h_2, \dots est égal au produit

$$(4) \quad t^{u_1} (t^{2p-1})^{u_2} \dots (t^{2p^i - 1})^{u_{i+1}} \dots (t^{2p-2})^{h_2} \dots (t^{2p^{i+1} - 2})^{h_{i+2}} \dots$$

Or les u_i ($i \geq 1$) peuvent prendre indépendamment les valeurs 0 et 1 ; et les h_i ($i \geq 2$) peuvent prendre toutes les valeurs entières ≥ 0 . Il s'ensuit que la somme de tous les monômes de la forme (4) est donnée par la formule (3). Cette formule, établie en supposant p impair, vaut en fait pour $p = 2$, comme le montre un calcul direct.

Cherchons maintenant la série $\mathcal{V}'_p(t)$ correspondant aux mots admissibles de première espèce. A toute suite (a_i) de première espèce (suite satisfaisant aux conditions (i), (ii), (iii) du théorème 3 de l'Exposé n° 9, et telles que le dernier a_i non nul soit $\geq 2p-2$) correspond une suite de deuxième espèce,

obtenue en remplaçant par 1 le premier des a_i nuls de la suite. On en déduit aussitôt que $\sum_{q \geq 0} (b'_q t^q + b''_q t^{q+1}) = \sum_q b_q t^q$, autrement dit :

$$(1+t) \mathcal{V}'_p(t) = \mathcal{V}_p(t) . \text{ Ceci achève la démonstration.}$$

BIBLIOGRAPHIE.

Une partie des résultats de cet exposé a été établie, par une autre méthode, dans l'article :

J.P. SERRE, Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane (Comm. Math. Helv. 27, 1953, p. 198-231).

On y trouve aussi le calcul de la composante 2-primaire de l'homologie à coefficients entiers d'un groupe cyclique, ainsi que des formules donnant les séries de Poincaré des espaces vectoriels $H_*(\mathbb{T}, n; \mathbb{Z}_2)$ pour \mathbb{T} cyclique.
