H. Cartan

Structure des germes de sous-ensembles analytiques, revêtements ramifiés

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. n° 8, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A8_0>

STRUCTURE DES GERMES DE SOUS-ENSEMBLES ANALYTIQUES, REVÊTEMENTS RAMIFIÉS

(Exposé de H. Cartan, 1-2-1954, révisé ultérieurement)

Cet Exposé fait suite à l'Exposé 7. Mais ici le corps K est désormais le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. On note H_n l'algèbre des séries convergentes en n variables $x_1, \dots, x_n$ (germes de fonctions holomorphes à l'origine).

§1. Etude d'un idéal premier de H_n.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de H_n, et soit $A = H_n/\mathfrak{p}$, qui est une algèbre analytique de génération finie, puisque A est analytiquement engendrée par les classes $\xi_1, \dots, \xi_n$ des variables $x_1, \dots, x_n$. Appliquons à A le Théorème 3 de l'Exposé 7; on voit que l'on peut faire sur les coordonnées $x_1, \dots, x_n$ de $\mathbf{C}^n$ une transformation linéaire de déterminant $\neq 0$, de façon que A soit un module de type fini sur la sous-algèbre analytique B engendrée par les classes des k premières variables $x_1, \dots, x_k$, ces classes étant analytiquement indépendantes; alors le corps des fractions de A est une extension algébrique séparable, de degré fini d, du corps des fractions de B, et il est engendré par un seul élément u, que l'on peut choisir dans le sous-espace vectoriel engendré par les classes ξ_i. Par une transformation linéaire sur les coordonnées, on peut donc supposer que u est la classe de x_{k+1}. Le polynôme minimal P de u (polynôme unitaire irréductible à coefficients dans le corps des fractions de B) est à coefficients dans B, puisque B est intégralement clos. Il est irréductible (comme polynôme unitaire à coefficients dans B), et distingué (car P est a priori de la forme P_1P_2, où P_1 est distingué, et P_2 inversible, d'où $P_2 = 1$). On obtient donc la situation suivante (au moyen d'un changement linéaire convenable des coordonnées):

(i) <u>les k premières coordonnées</u> $x_1, \ldots, x_k$ <u>sont analytiquement indépendantes modulo</u> $\mathfrak{p}$ (ce qui veut dire que si une $f(x_1, \ldots, x_k)$ holomorphe appartient à $\mathfrak{p}$, f est identiquement nulle);

(ii) <u>il existe un polynôme distingué irréductible</u> $P(z)$, <u>à coefficients holomorphes en</u> $x_1, \ldots, x_k$, <u>et de degré</u> d, <u>tel que</u>

$$P(x_{k+1};\, x_1, \ldots, x_k) \in \mathfrak{p};$$

<u>tout polynôme</u> $Q(x_{k+1};\, x_1, \ldots, x_k)$ <u>de degré</u> $< d$, <u>qui appartient à</u> $\mathfrak{p}$, <u>est identiquement nul</u>;

(iii) <u>pour chaque</u> $i \geq k+2$, <u>on a un polynôme distingué</u> $Q_i(z)$ <u>à coefficients holomorphes en</u> $x_1, \ldots, x_k$, <u>tel que</u>

$$Q_i(x_i;\, x_1, \ldots, x_k) \in \mathfrak{p}.$$

(L'assertion (iii) résulte du fait que A est entier sur la sous-algèbre analytique engendrée par $x_1, \ldots, x_k$, et du Lemme 3 de l'Exposé 7.)

Alors le Lemme 1 de l'Exposé 7 nous dit que si (i), (ii) et (iii) sont vérifiés, il existe, pour chaque $i \geq k+2$, un polynôme $R_i(z)$ à coefficients holomorphes en $x_1, \ldots, x_k$, de degré $< d$, tel que

(1) $$P'(x_{k+1};\, x_1, \ldots, x_k)x_i - R_i(x_{k+1};\, x_1, \ldots, x_k) \in \mathfrak{p}.$$

(On note $P'(z)$ le polynôme dérivé du polynôme $P(z)$ qui intervient dans (ii).)

Soit I l'idéal de H_n engendré par $P(x_{k+1};\, x_1, \ldots, x_k)$ et les fonctions $P'x_i - R_i$ (pour $i \geq k+2$). Il est clair que $I \subset \mathfrak{p}$.

<u>Proposition 1</u>. <u>Il existe un entier</u> α <u>jouissant de la propriété suivante</u>: <u>si</u> $f \in H_n$, <u>alors</u> $P'^{\alpha}f$ <u>est congru, modulo</u> I, <u>à un polynôme</u> $S(x_{k+1};\, x_1, \ldots, x_k)$ <u>de degré</u> $< d$.

<u>Démonstration</u>: en vertu du théorème de préparation, f est congru, modulo P et les Q_i, à un polynôme en $x_{k+1}, \ldots, x_n$ (à coefficients holo-

morphes en $x_1,\dots, x_k$) dont les degrés sont <u>bornés</u> indépendamment de f. Donc il existe un entier β, indépendant de f, tel que $P'^{\beta}f$ soit congrue, modulo P et les Q_i, à un polynôme en $x_{k+1}, P'x_{k+2},\dots, P'x_n$. Ce polynôme est lui-même congru, modulo I, à un polynôme en x_{k+1} de degré $< d$, dont les coefficients sont holomorphes en $x_1,\dots, x_k$. Pour prouver la Proposition 1, il suffit donc de prouver qu'il existe un entier γ tel que, pour chaque $i \geq k+2$, $P'^{\gamma}Q_i$ soit congru, modulo I, à un polynôme en x_{k+1} dont les coefficients sont holomorphes en $x_1,\dots, x_k$. Or il est clair que si γ est assez grand, $P'^{\gamma}Q_i$ est un polynôme en $P'x_i$ (à coefficients holomorphes en $x_1,\dots, x_k$); et puisque $P'x_i$ est congru à R_i modulo I, l'assertion est démontrée.

Notons V le germe de sous-ensemble analytique, ensemble des zéros communs aux fonctions de l'idéal I. Et soit V_0 l'ensemble des points de V où le discriminant $\Delta(x_1,\dots, x_k)$ du polynôme P n'est pas nul (observons que la fonction holomorphe $\Delta(x_1,\dots, x_k)$ n'est pas identiquement nulle, puisque P est irréductible). V_0 est considéré comme germe d'ensemble, à l'origine 0, de l'espace $\mathbf{C}^n$; ce germe est non vide, car Δ n'appartient pas à $\mathfrak{p}$, donc n'appartient pas à I. Notons que $P'(x_{k+1}; x_1,\dots, x_k)$ est $\neq 0$ en tout point de V_0. En chacun de ses points, V_0 est une sous-variété analytique de $\mathbf{C}^n$, de dimension (complexe) k.

<u>Proposition 2</u>. <u>Pour une</u> $f \in H_n$, <u>les conditions suivantes sont équivalentes</u>:

(a) $f \in \mathfrak{p}$;

(b) $P'^{\alpha}f \in I$ (α <u>désignant l'entier de la Proposition</u> 1);

(c) f <u>s'annule identiquement sur le germe</u> V_0.

<u>Démonstration</u>: (b) entraîne (a), car (b) entraîne que $P'^{\alpha}f \in \mathfrak{p}$ (puisque $I \subset \mathfrak{p}$), d'où $f \in \mathfrak{p}$ puisque $\mathfrak{p}$ est un idéal premier et que $P' \notin \mathfrak{p}$. Inversement, (a) entraîne (b), car, d'après le Proposition 1, $P'^{\alpha}f$ est congru modulo I à un polynôme $S(x_{k+1}; x_1,\dots, x_k)$ de degré $< d$, lequel, en vertu de (a), appartient à $\mathfrak{p}$, donc est identiquement nul d'après (ii). Il

est clair que (b) entraîne (c), car alors $P'^{\alpha}f$ s'annule identiquement sur V, donc sur V_0; or P' est $\neq 0$ en tout point de V_0, donc f s'annule identiquement sur V_0. Enfin, (c) entraîne (b): en effet, si (c) est vérifiée, alors, d'après la Proposition 1, le polynôme $S(x_{k+1}; x_1, \ldots, x_k)$ s'annule identiquement sur V_0. Or il est clair que V_0 possède exactement d points distincts au-dessus d'un point $(x_1, \ldots, x_k)$ tel que $\Delta(x_1, \ldots, x_k) \neq 0$: en effet, l'équation $P(x_{k+1}; x_1, \ldots, x_k) = 0$ donne d valeurs distinctes, voisines de 0, pour x_{k+1}, et pour chacune d'elles on a $x_i = R_i/P'$ pour $i \geq k+2$; les valeurs des x_i sont voisines de 0, car x_i annule Q_i. Le polynôme $S(x_{k+1})$ étant de degré $< d$, tous ses coefficients sont donc nuls en tout point $(x_1, \ldots, x_k)$ qui n'annule pas Δ; or ces points forment un ensemble dense dans tout voisinage de l'origine, donc le polynôme S est identiquement nul; il s'ensuit que $P'^{\alpha}f$ appartient à I, ce qu'il fallait démontrer.

La Proposition 2 implique que V_0 est contenu dans le germe d'ensemble analytique $G(\mathfrak{p})$, ensemble des zéros communs aux fonctions de l'idéal $\mathfrak{p}$. De plus, <u>toute $f \in H_n$ qui s'annule identiquement sur $G(\mathfrak{p})$ appartient à</u> $\mathfrak{p}$; en effet, f s'annule alors sur V_0, donc appartient à $\mathfrak{p}$ en vertu de l'équivalence de (a) et de (c).

Nous venons ainsi de démontrer le "Nullstellensatz" de Hilbert; plus généralement:

<u>Théorème 1. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de H_n. L'idéal $I(G(\mathfrak{a}))$ formé des $f \in H_n$ qui s'annulent sur le germe $G(\mathfrak{a})$ formé des zéros communs aux fonctions de $\mathfrak{a}$, n'est autre que l'intersection des idéaux premiers contenant $\mathfrak{a}$.</u>

<u>Démonstration:</u> si $\mathfrak{p}$ premier contient $\mathfrak{a}$, on a $G(\mathfrak{a}) \supset G(\mathfrak{p})$, d'où $I(G(\mathfrak{a})) \subset I(G(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$. D'autre part, $I(G(\mathfrak{a}))$ n'a évidemment pas d'élément nilpotent $\neq 0$, donc est intersection d'idéaux premiers.

<u>Corollaire</u>: $I(G(\mathfrak{a}))$ <u>se compose des $f \in H_n$ telles qu'il existe une puissance f^q qui soit dans $\mathfrak{a}$. Les composantes irréductibles du germe $G(\mathfrak{a})$ sont les $G(\mathfrak{p}_i)$, en désignant par $\mathfrak{p}_i$ les éléments minimaux de l'ensem-</u>

<u>ble des idéaux premiers contenant</u> $\mathfrak{a}$. (Ils sont en nombre fini.)

De tout ce qui précède il résulte qu'on a une correspondance biunivoque entre les idéaux premiers de H_n et les germes de sous-ensembles analytiques irréductibles à l'origine 0 de C^n.

§2. Structure d'un germe de sous-ensemble analytique irréductible .

Un tel germe est le germe $G(\mathfrak{p})$ associé à un idéal premier $\mathfrak{p}$ de H_n. Reprenons les notations de la Proposition 2; $G(\mathfrak{p})$ contient un ensemble ouvert V_0 qui est, en chacun de ses points, une sous-variété analytique (complexe) de l'espace ambiant, de dimension k; et V_0 est <u>connexe</u> au sens des germes (i.e., 0 possède dans C^n un système fondamental de voisinage ouverts qui coupent V_0 suivant un ensemble connexe; cf. Séminaire 1951-52, Exposé 12, Théorème 6).

<u>Théorème 2</u>. <u>Le germe</u> $G(\mathfrak{p})$ <u>est l'adhérence du germe</u> V_0 (en d'autres termes, V_0 <u>est un ouvert partout dense</u> dans $G(\mathfrak{p})$).

Pour le prouver, il suffit de montrer que l'adhérence $\overline{V_0}$ est un germe de sous-ensemble analytique; en effet, il résulte de la Proposition 2 que $G(\mathfrak{p})$ est l'ensemble des zéros communs aux fonctions de H_n qui s'annulent identiquement sur V_0, donc est contenu dans tout germe d'ensemble analytique contenant V_0.

Or la situation est la suivante: à chaque point $(x_1, \dots, x_k) \in C^k$ voisin de 0, et tel que $\Delta(x_1, \dots, x_k) \neq 0$, on a attaché un système de d points distincts de C^n qui appartiennent à V_0 et se projettent sur $(x_1, \dots, x_k)$. Soit $y = (x_{k+1}, \dots, x_n)$ le projection sur C^{n-k} de l'un quelconque de ces d points. Les n-k coordonnées de y sont des fonctions holomorphes de $x_1, \dots, x_k$ en tout point où $\Delta \neq 0$; naturellement, les d points y associés à $(x_1, \dots, x_k)$ peuvent subir une permutation lorsque le point $(x_1, \dots, x_k) = x$ décrit un lacet dans l'ensemble des points où $\Delta \neq 0$. Dans l'espace C^n des couples (x, y), on notera désormais W (au lieu de V_0) le lieu des points (x, y) tels que $\Delta(x) \neq 0$ et que y soit l'un des d points associés à x. Le Théorème 2 résultera de la:

Proposition 3. Avec les notations précédentes, l'adhérence $\overline{W}$ *de* W *est définie par des équations* (en nombre fini)

$$f_i(x, y) = 0 ,$$

où les f_i *sont des polynômes en* $y_1, \ldots, y_{n-k}$, *à coefficients holomorphes en* $x_1, \ldots, x_k$ *au voisinage de l'origine.*

Démonstration: pour chaque $u = (u_1, \ldots, u_{n-k}) \in \mathbf{C}^{n-k}$, soit

$$u \cdot y = \sum_{i=1}^{n-k} u_i y_i .$$

Si $y^1, \ldots, y^d$ désignent les d points associés à un x tel que $\Delta(x) \neq 0$, les nombres $u \cdot y^r$ (où $r = 1, \ldots, d$) sont les d racines d'un polynôme

$$T(z; x, u) = z^d + a_1(x, u) z^{d-1} + \cdots + a_d(x, u) ,$$

où chaque $a_j(x, u)$ est un polynôme homogène de degré j en $u_1, \ldots, u_{n-k}$, à coefficients holomorphes en $x_1, \ldots, x_k$ (en effet, ces coefficients sont holomorphes et bornés dans l'ensemble des points x voisins de 0 où $\Delta(x) \neq 0$; donc, d'après un théorème classique, ils sont aussi holomorphes aux points x où $\Delta(x) = 0$). Si $(x, y) \in W$, on a évidemment

$$T(u \cdot y; x, u) = 0, \tag{2}$$

donc cette relation a encore lieu pour $(x, y) \in \overline{W}$, et ceci quel que soit $u = (u_1, \ldots, u_{n-k})$. Réciproquement, on va voir que si un point (x, y) voisin de 0 satisfait à (2) pour tout u, il appartient à $\overline{W}$. En effet, donnons-nous x voisin de 0; les y tels que (2) ait lieu pour tout u sont en nombre fini, au plus égal à d; choisissons u de façon que $u \cdot y$ prenne des valeurs distinctes en ces points; pour prouver que chacun de ces points est dans $\overline{W}$, il suffit de montrer le

Lemme. Soient x *et* u *donnés, et soit* z *un nombre complexe tel que*

$$T(z; x, u) = 0 ;$$

alors il existe un point y *tel que* $u \cdot y = z$ *et* $(x, y) \in \overline{W}$.

<u>Démonstration du lemme</u>: c'est vrai si $\Delta(x) \neq 0$, par construction; et si $\Delta(x) = 0$, c'est encore vrai par passage à la limite.

Achevons maintenant la démonstration de la Proposition 3. Pour définir $\overline{W}$, on doit écrire que la relation (2) a lieu pour tout $u = (u_1, \ldots, u_{n-k})$. Or il est clair que le premier membre de (2) est un polynôme homogène de degré d en $u_1, \ldots, u_{n-k}$; il suffit donc d'annuler les coefficients de ce polynôme; ces coefficients sont des $f_i(x, y)$, polynômes en $y_1, \ldots, y_{n-k}$ à coefficients holomorphes en $x_1, \ldots, x_k$ au voisinage de l'origine.

C.Q.F.D.

Nous avons en même temps achevé la description du germe de sous-ensemble analytique irréductible $G(\mathfrak{p})$ à l'origine de $\mathbf{C}^n$. Pour cela, nous avons fait usage d'un choix convenable des coordonnées dans $\mathbf{C}^n$, ce qui nous a permis de définir l'ouvert V_0 partout dense dans $G(\mathfrak{p})$. Or la notion suivante est indépendante du choix des coordonnées: on dit qu'un point de $G(\mathfrak{p})$ est <u>régulier</u> si, au voisinage de ce point, $G(\mathfrak{p})$ est une sous-variété analytique complexe de l'espace ambiant $\mathbf{C}^n$. On voit que V_0 est contenu dans l'ensemble des points réguliers de $G(\mathfrak{p})$, qui est donc lui aussi un ouvert partout dense dans $G(\mathfrak{p})$. Puisque V_0 est <u>connexe</u> au sens des germes, a fortiori <u>l'ensemble des points réguliers de</u> $G(\mathfrak{p})$ <u>est connexe au sens des germes</u>. C'est là une propriété qui caractérise les germes de sous-ensembles analytiques <u>irréductibles</u>.

<u>Proposition 4</u>. <u>Si</u> $g \in H_n$ <u>n'appartient pas à l'idéal premier</u> $\mathfrak{p}$, <u>l'ensemble des points</u> x <u>du germe</u> $G(\mathfrak{p})$ où $g(x) \neq 0$ <u>est un ouvert dense dans</u> $G(\mathfrak{p})$.

En effet, l'ensemble des points x <u>réguliers</u> où $g(x) \neq 0$ est partout dense dans l'ensemble des points réguliers, sinon, en vertu de l'analyticité, et du fait que l'ensemble des points réguliers est connexe au sens des germes, g serait nulle en tout point régulier voisin de 0, donc nulle sur V_0, ce qui impliquerait $g \in \mathfrak{p}$ (Prop. 2).

La définition des points <u>réguliers</u> s'étend évidemment au cas d'un germe de sous-ensemble analytique V non nécessairement irréductible; mais la dimension (complexe) de V en un point régulier peut varier avec le point régulier. De toute manière, on a la

Proposition 5. L'ensemble des points réguliers d'un germe de sous-ensemble analytique est un ouvert partout dense.

Démonstration: soit V_i une composante irréductible de V. Il suffit de montrer que les points de V_i qui sont réguliers pour V forment un ouvert dense dans V_i. Or ce sont exactement les points réguliers de V_i qui n'appartiennent à aucun des V_j pour $j \neq i$; il résulte de la Proposition 4 qu'il forment un ouvert dense dans V_i.

Remarque: on verra (Exp. 9, Théorème 1) que l'ensemble des points singuliers (= non réguliers) d'un sous-ensemble analytique est lui-même un sous-ensemble analytique.

§3. Germes d'espaces analytiques.

Soit V un germe de sous-ensemble analytique à l'origine de $\mathbf{C}^n$, et soit V' un germe de sous-ensemble analytique à l'origine de $\mathbf{C}^{n'}$. On appellera application analytique (ou, plus exactement, "germe" d'application analytique) de V dans V' un germe d'application continue $f: V \to V'$ tel qu'il existe un germe d'application holomorphe $g: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^{n'}$ induisant f (c'est-à-dire tel que la restriction de g à V applique V dans V' et soit égale à f). On notera $\mathrm{Hom}(V, V')$ l'ensemble des applications analytiques $V \to V'$. Il est clair que les germes de sous-ensembles analytiques (dans les différents espaces $\mathbf{C}^n$) sont les objets d'une catégorie dont les morphismes sont les applications analytiques.

Soit $A(V)$ l'algèbre analytique, quotient de H_n par l'idéal $I(V)$ des germes de fonctions holomorphes (sur $\mathbf{C}^n$) qui s'annulent identiquement sur V. A chaque application analytique $f \in \mathrm{Hom}(V, V')$ nous associons un homomorphisme d'algèbres $A(V') \to A(V)$, noté $A(f)$, comme suit: à chaque $\varphi' \in A(V')$, considéré comme germe de fonction sur V', $A(f)$ fait correspondre le germe composé $\varphi' \circ f \in A(V)$. On obtient ainsi un foncteur contravariant A de la catégorie des germes de sous-ensembles analytiques dans la catégorie des algèbres analytiques de génération finie. On observera que les algèbres analytiques obtenues de cette façon n'ont pas d'élément nilpotent $\neq 0$, puisque chacune d'elles s'identifie à une algèbre de germes de fonctions à valeurs dans $\mathbf{C}$.

Inversement, soit donnée une algèbre analytique A, de génération finie, et sans élément nilpotent $\neq 0$; montrons qu'il existe un germe de sous-ensemble analytique V tel que l'algèbre $A(V)$ soit isomorphe à A. Pour cela, nous choisissons un système fini d'éléments de l'idéal maximal $m(A)$ qui engendrent analytiquement A; soit n le nombre de ces générateurs; ce choix définit un isomorphisme $A \approx H_n/I$, où I est un idéal de H_n. Soit $G(I)$ le germe d'ensemble analytique (à l'origine de $\mathbf{C}^n$) défini par I; puisque H_n/I n'a pas d'élément nilpotent $\neq 0$, le Théorème 1 montre que H_n/I s'identifie à l'algèbre des germes de fonctions induites, sur $G(I)$, par les éléments de H_n. On peut donc prendre $V = G(I)$. Bien entendu, on peut écrire A de bien des manières sous la forme H_n/I (pour diverses valeurs de n), et par conséquent on peut avoir un autre germe d'ensemble analytique V' tel que $A \approx A(V')$. Mais on va voir que deux tels germes V et V' sont isomorphes; plus précisement, étant donnés deux isomorphismes $\varphi: A(V) \approx A$ et $\varphi': A(V') \approx A$, il existe un unique isomorphisme $f: V \to V'$ tel que $A(f): A(V') \approx A(V)$ soit égal à $\varphi^{-1} \circ \varphi'$. En effet, d'une manière générale, on a ceci:

Si λ est un homomorphisme d'algèbres $A(V') \to A(V)$, il existe un unique $f \in \mathrm{Hom}(V, V')$ tel que $\lambda = A(f)$. Démonstration: on peut d'abord relever λ en un homomorphisme $\mu: H_{n'} \to H_n$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_{n'} & \xrightarrow{\mu} & H_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ A(V') & \xrightarrow{\lambda} & A(V) \end{array}$$

soit commutatif (il suffit de relever les n' générateurs de $H_{n'}$ dans des éléments convenables de H_n, puis de prolonger en un homomorphisme $H_{n'} \to H_n$).

L'homomorphisme μ définit un germe d'application analytique $g: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^{n'}$ qui envoie V dans V' et fournit l'application f cherchée. De plus, si μ_1 et μ_2 sont deux solutions, la différence $\mu_1 - \mu_2$ applique $H_{n'}$ dans l'idéal $I(V)$, donc les applications f_1 et f_2 correspondantes de V dans V' sont égales.

En conclusion, le foncteur contravariant $\mathbf{A}$ (de la catégorie des germes de sous-ensembles analytiques dans la catégorie des algèbres analytiques de génération finie et sans élément nilpotent $\neq 0$) définit une correspondance bijective entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de germes d'ensembles analytiques, et l'ensemble des classes d'isomorphismes d'algèbres analytiques de génération finie, sans élément nilpotent $\neq 0$.

On appelle parfois germe d'espace analytique (abstrait) une classe d'isomorphisme de germes d'ensembles analytiques. Dans la correspondance précédente, aux germes d'espaces irréductibles correspondent les algèbres analytiques intègres, aux germes d'espaces normaux correspondent les algèbres analytiques intègres et intégralement closes (cf. Exposé 7, §2). En particulier, si V est un germe d'espace analytique irréductible, la clôture intégrale $\widetilde{\mathbf{A}}(V)$ de $\mathbf{A}(V)$ est une algèbre analytique de génération finie (Exposé 7, Coroll. du Théorème 2), donc est de la forme $\mathbf{A}(V')$, où V' est germe d'espace analytique normal, unique à un isomorphisme près. L'injection $\mathbf{A}(V) \to \mathbf{A}(V')$ définit un germe d'application analytique $V' \to V$; muni de cette application, le germe V' s'appelle le normalisé du germe V.

Soit A une algèbre analytique intègre, de génération finie. On définit la dimension de A, notée $\dim \mathbf{A}$, comme suit: d'après le Théorème 3 de l'Exposé 7, il existe une sous-algèbre analytique B de A, isomorphe à une algèbre H_k, telle que A soit un B-module de type fini. Choisissons un système fini de générateurs de A contenant les k générateurs de B. Ceci définit un germe de sous-ensemble analytique V d'un espace $\mathbf{C}^n$, tel que $A = \mathbf{A}(V)$; V est donc irréductible. D'après l'étude faite au paragraphe 2, V possède un ouvert partout dense qui est une variété analytique complexe de dimension (complexe) k. Comme V est indépendant (à un isomorphisme près) des choix faits, on voit que l'entier k ne dépend pas de ces choix et est donc attaché intrinsèquement à l'algèbre A; c'est la dimension de la variété analytique, ensemble des points réguliers. L'entier k est aussi appelé la dimension de A; tout germe de sous-ensemble analytique V tel que A soit isomorphe à $A(V)$ a aussi la dimension k. Les assertions suivantes sont évidentes:

Si une algèbre analytique intègre A admet un système de n générateurs (qui l'engendrent comme algèbre analytique), alors $\dim A \leq n$. Si de plus B est une sous-algèbre analytique telle que A soit un B-module de type fini, alors $\dim A = \dim B$.

Puisque la donnée d'une algèbre analytique A de génération finie, sans élément nilpotent $\neq 0$, définit un germe d'espace analytique V (à un isomorphisme près), elle définit, pour tout point de V voisin de 0, une algèbre analytique (celle des germes de fonctions induits, en ce point, par les germes de fonctions holomorphes de l'espace ambiant, pour la réalisation considérée de V dans un espace C^n). Soit, pour chaque point $x \in V$ voisin de l'origine, $A(x)$ l'algèbre analytique correspondante. Même si A est intègre, il n'est pas certain que $A(x)$ soit intègre (car V peut être irréductible à l'origine sans l'être nécessairement en tous ses points voisins de 0). Toutefois:

Proposition 6. Si l'algèbre analytique A est intègre, et si V est un germe d'espace analytique tel que $A = A(V)$, alors, en chaque point x de V voisin de l'origine, toutes les composantes irréductibles de V en x ont une même dimension, égale à $\dim A$.

Cela résulte du fait que l'ensemble des points réguliers de V est une variété analytique de dimension égale à $\dim A$.

Soit à nouveau deux germes d'espaces analytiques V et V'; soit $f \in \mathrm{Hom}(V, V')$, et soit $A(f)$: $A(V') \to A(V)$ l'homomorphisme d'algèbres correspondant. Les assertions suivantes sont triviales:

Proposition 7. Si l'application f est surjective (au sens des germes), l'homomorphisme $A(f)$ est une injection. Si l'homomorphisme $A(f)$ est surjectif, l'application $f: V \to V'$ est une injection.

En revanche, voici un résultat important qui est loin d'être trivial:

Théorème 3. Soit A un algèbre analytique intègre, de génération finie, et soit B un sous-algèbre analytique telle que A soit un B-module de type fini; (ceci implique que B est de génération finie: cf. Exposé 7, Remarque suivant le Corollaire du Théorème 1). Soit d le degré du corps $F(A)$ sur le corps $F(B)$ (on note $F(A)$ le corps des fractions de A, et $F(B)$ le corps des fractions de B). Soient V et V' des germes d'espaces analytiques tels que $A = A(V)$ et $B = A(V')$, et soit $f: V \to V'$ l'élément de $\mathrm{Hom}(V, V')$ tel que $A(f)$ soit l'injection naturelle $B \to A$. Alors:

(i) $f^{-1}(0) = \{0\}$ (au sens des germes: autrement dit, l'origine de V est un point isolé dans l'image réciproque de l'origine de V');

(ii) l'image réciproque de tout point de V' (voisin de 0) est finie, avec un cardinal inférieur à un nombre fixe;

(iii) l'application f est surjective (au sens des germes);

(iv) il existe un ouvert partout dense U' de V', dont le complémentaire dans V' est un sous-ensemble analytique, et qui jouit de la propriété que la restriction de f à $f^{-1}(U')$ est un revêtement à d feuillets; de plus, $f^{-1}(U')$ est dense dans V.

Démonstration: d'après le Théorème 3 de l'Exposé 7, il existe une sous-algèbre analytique C de B, isomorphe à une algèbre H_k, et telle que B soit un C-module de type fini. On a la relation

$$d_{A,C} = d_{A,B} \cdot d_{B,C}, \quad \text{où l'on a posé } d_{A,C} = [F(A); F(C)], \text{ etc...}$$

(donc $d_{A,B}$ n'est autre que l'entier d de l'énoncé). Soit V'' un germe de sous-ensemble analytique tel que $C = A(V'')$. Les injections $C \to B \to A$ définissent des applications

$$V \xrightarrow{f} V' \xrightarrow{g} V'',$$

dont la composée h est définie par l'injection $C \to A$. (En fait, on peut prendre pour V'' le germe d'espace $\mathbf{C}^k$ à l'origine de $\mathbf{C}^k$.) L'étude faite aux paragraphes 1 et 2 nous donne une description de chacune des applications g et h: il existe un ouvert U'' partout dense dans V'', tel que $V'' - U''$ soit un sous-ensemble analytique, que $g^{-1}(U'') = U'$ soit dense dans V' (cf. Théorème 2 ci-dessus), que $f^{-1}(U') = h^{-1}(U'') = U$ soit dense dans V (ibid.), et que:

U soit (au moyen de h) un revêtement à $d_{A,C}$ feuillets de U'';

U' soit (au moyen de g) un revêtement à $d_{B,C}$ feuillets de U''.

Il en résulte que U est un revêtement de U', dont le nombre des feuillets est $d_{A,C}/d_{B,C} = d_{A,B}$; d'ailleurs $V' - U' = g^{-1}(V'' - U'')$ est un sous-ensemble analytique de V'. Ceci démontre (iv).

De plus, on a $g^{-1}(0) = \{0\}$, donc $f^{-1}(0) = h^{-1}(0)$, et ce dernier est réduit à $\{0\}$, ce qui démontre (i). L'image réciproque h^{-1} d'un point de V'' se compose d'au plus $d_{A,C}$ points; donc l'image réciproque f^{-1} d'un point de V' se compose d'au plus $d_{A,C}$ points, ce qui démontre (ii). Il reste à prouver que l'application f est surjective au sens des germes; on vient de voir que l'image de f est dense dans V', de plus l'image d'un voisinage compact (assez petit) de 0 dans V est compacte, donc elle contient un voisinage de 0 dans V', ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Il ne faudrait pas croire que l'image réciproque f^{-1} d'un point de V' contienne toujours au plus d points; l'assertion (ii) de l'énoncé n'affirme rien d'aussi précis. Le cas où A est la clôture intégrale de B (V étant alors le "normalisé" de V') donne un contre-exemple, car alors $d = 1$, et pourtant il peut exister des points distincts de V qui ont même image dans V', comme on le verra plus tard.

Théorème 4. *Soit* $\mathbf{A}$ *une algèbre analytique intègre de génération finie, et soit* B *une sous-algèbre analytique de* A, *de génération finie. Soient* V *et* V' *des germes d'espaces analytiques tels que* $A = A(V)$ *et*

$B = \mathbf{A}(V')$, <u>et soit</u> $f\colon V \to V'$ <u>l'application telle que</u> $A(f)$ <u>soit l'injection</u> $B \to A$. <u>Pour que</u> A <u>soit un B-module de type fini, il faut et il suffit que</u> $f^{-1}(0) = \{0\}$ (<u>au sens des germes</u>).

Ce théorème est intéressant, car il donne un <u>critère géométrique</u> pour que A soit un B-module de type fini.

<u>Démonstration</u>: l'assertion (i) du Théorème 3 montre que la condition est nécessaire. Il reste à montrer qu'elle est suffisante. Supposons que l'algèbre $\mathbf{A}$ soit analytiquement engendrée par B et n éléments de l'idéal maximal $\mathbf{m}(A)$; on va faire la démonstration par récurrence sur n, la proposition étant triviale pour $n = 0$. Faisons la récurrence de $n-1$ à n, en supposant $n \geq 1$: soit $\mathbf{A}''$ la sous-algèbre analytique engendrée par B et $n-1$ des n éléments de $\mathbf{m}(A)$ qui engendrent A sur B; A est donc analytiquement engendrée par A'' et par un élément $a \in \mathbf{m}(A)$. Soit V'' un germe d'espace analytique tel que $A'' = \mathbf{A}(V'')$. Les inclusions $B \to A'' \to A$ définissent des applications

$$V \xrightarrow{g} V'' \xrightarrow{h} V'$$

dont la composée est l'application f de l'énoncé. On ne peut pas encore appliquer l'hypothèse de récurrence, car on ne sait pas encore que $h^{-1}(0) = \{0\}$. Par hypothèse, $f^{-1}(0) = \{0\}$; puisque $g^{-1}(0) \subset f^{-1}(0)$, on a $g^{-1}(0) = \{0\}$. Ceci va nous permettre de montrer que a est <u>entier</u> sur A'': en effet, soit (a_i) un système fini de générateurs de l'algèbre analytique A'', correspondant à la réalisation de V'' comme germe de sous-ensemble analytique à l'origine d'un espace numérique; la condition $g^{-1}(0) = \{0\}$ exprime que la fonction (sur V) définie par a s'annule chaque fois que les fonctions définies par les a_i s'annulent. D'après le Nullstellensatz (Théorème 1 ci-dessus), il existe une puissance a^q qui appartient à l'idéal de A engendré par les a_i; autrement dit, on a dans A une relation

$$a^q = \sum_i a_i f_i(a, a_j) ,$$

les f_j étant des fonctions holomorphes de a et des $a_j \in \mathfrak{m}(A)$. Considérons la fonction $P(x, x_i)$ des variables indépendantes x et $x_1, x_2, \ldots$ définie par

$$P(x, x_i) = x^q - \sum_i x_i f_i(x, x_j) .$$

On a $P(x, 0) \not\equiv 0$; d'après le théorème de préparation, x^q est congru, modulo P, à un polynôme $Q(x)$ de degré $< q$, à coefficients holomorphe en les x_i; donc $a^q = Q(a; a_i)$, et par suite a est entier sur A''. Donc A est un A''-module de type fini (Exposé 7, Coroll. du Th. 1).

Il s'ensuit que l'application g est surjective (Théorème 3, (iii)), et ceci entraîne que $h^{-1}(0) = \{0\}$. On peut maintenant appliquer l'hypothèse de récurrence: A'' est un B-module de type fini; par suite A est un B-module de type fini, ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire 1.</u> <u>Soient</u> V <u>et</u> V' <u>deux germes d'espace analytique</u>, V <u>étant irréductible, et soit</u> $f \in \mathrm{Hom}(V, V')$. <u>Supposons que</u> V' <u>soit le plus petit germe de sous-ensemble analytique de</u> V' <u>contenant l'image</u> $f(V)$. <u>Alors la propriété</u> (i) <u>de l'énoncé du Théorème 3 entraîne les autres propriétés</u> (ii), (iii) <u>et</u> (iv), <u>et</u> V' <u>est irréductible</u>.

En effet, le fait que le plus petit sous-ensemble analytique de V' contenant $f(V)$ est V' entraîne que l'homomorphisme $A(f)$: $A(V') \to A(V)$ est une injection. On applique alors le Théorème 4 à l'image B de $A(V') \to A(V)$; il s'ensuit que $A(V)$ est un B-module de type fini, et il n'y a plus qu'à appliquer le Théorème 3.

Dans la situation du corollaire (c'est-à-dire lorsque la propriété (i) a lieu), on dit que f: $V \to V'$ définit V comme <u>revêtement ramifié</u> de V'; le degré d du corps des fractions de $A(V)$ sur le corps des fractions de $A(V')$ s'appelle le <u>degré</u> du revêtement ramifié; d est égal au nombre des feuillets du revêtement (véritable) défini par f (cf. propriété (iv) du Théorème 3).

Corollaire 2. *Soient V et V' deux germes d'espaces analytiques, et soit $f \in \mathrm{Hom}(V, V')$ une application analytique telle que $f^{-1}(0) = \{0\}$. Alors l'image $f(V)$ est un germe de sous-ensemble analytique W de V'; si V est irréductible, W est irréductible; V et W ont alors la même dimension, et f fait de V un revêtement ramifié de W.*

Pour le voir, on regarde les images, par f, des composantes irréductibles de V, ce qui nous ramène au cas où V est irréductible. Soit V' le plus petit germe d'ensemble analytique contenant l'image $f(V)$; on applique à V' le Corollaire 1.

Corollaire 3. *Soient V et V' deux germes d'espaces analytiques. Supposons que V' soit normal (et, en particulier, irréductible), et supposons qu'une application analytique $f: V \to V'$ soit un homéomorphisme. Alors f est un isomorphisme d'espaces analytiques, et V est irréductible.*

Démonstration: (rappelons que V' est normal, par définition, si l'anneau $A(V')$ est intégralement clos). Puisque $f^{-1}(0) = \{0\}$, on peut appliquer le corollaire 2 à chacune des composantes irréductibles de V: l'image par f d'une telle composante irréductible est un germe d'ensemble analytique irréductible. Le germe V' est la réunion de ces images, et est, par hypothèse, irréductible; donc V' est l'image de l'une des composantes irréductibles de V, et puisque f est un homéomorphisme, il n'y a pas d'autre composante irréductible de V. Ainsi V est irréductible. D'après le Théorème 4, l'injection $A(f): A(V') \to A(V)$ identifie $A(V')$ à une sous-algèbre B de $A(V)$, et $A(V)$ est un B-module de type fini. Donc f fait de V un revêtement ramifié de V', dont le degré d est égal au degré du corps des fractions de $A(V)$ sur le corps des fractions de $A(V')$. Puisque f est un homéomorphisme, on a $d = 1$; donc $A(V)$ est dans le corps des fractions de $A(V')$. Mais $A(V')$ est intégralement clos par hypothèse, donc $A(f)$ est un isomorphisme de $A(V')$ sur $A(V)$.

C.Q.F.D.

Corollaire 4. Soit V un germe d'espace analytique irréductible de dimension k. Si des $f_i \in A(V)$, identifiés à des germes de fonctions sur V, s'annulent à l'origine de V et n'ont pas d'autre zéro commun au voisinage de l'origine, leur nombre h est au moins égal à k.

En effet, soit B la sous-algèbre analytique de $A(V)$ engendrée par les f_i; A est un B-module de type fini, d'après le Théorème 4; donc $\dim \mathbf{A} = \dim B \leq h$.

Proposition 8. Soit V un germe d'espace analytique irréductible, de dimension k. Soient r éléments $f_i \in A(V)$, qui, comme fonctions sur V, s'annulent à l'origine, et soit W le germe de sous-ensemble analytique de V défini par les équations $f_i = 0$. Alors toute composante irréductible de W à l'origine est de dimension $\geq k - r$.

Démonstration: soit W_j une composante irréductible de W, et soit d_j sa dimension. Il existe des points de W_j, arbitrairement voisins de 0, qui n'appartiennent à aucun des $W_{j'}$ pour $j' \neq j$, et en lesquels W est une variété analytique de dimension d_j. En un tel point a il existe donc d_j fonctions holomorphes g_α telles que le système d'équations $g_\alpha(x) = g_\alpha(a)$, $f_i(x) = f_i(a)$ (où $x \in V$) admette la solution isolée $x = a$. En appliquant le Corollaire 4 du Théorème 4 à chacune des composantes irréductibles de V au point a, on voit que $d_j + r \geq k$. Ceci établit la proposition.

§4. Un complément au Théorème 3 de l'Exposé 7.

Soit A une algèbre analytique de génération finie, que nous supposerons intègre. Au Théorème 3 de l'Exposé 7, on a considéré les systèmes d'éléments $a_1, \dots, a_k \in \mathbf{m}(A)$ tels que;

(a) les a_i soient analytiquement indépendants;

(b) A soit un module de type fini sur la sous-algèbre analytique (isomorphe à H_k) engendrée par les a_i.

Proposition 9. Soit V un germe d'espace analytique (irréductible) tel que $A = \mathbf{A}(V)$. L'ensemble des conditions (a) et (b) est équivalent à la condition suivante: le nombre k des a_i est égal à la dimension de V, et les germes de fonctions, sur V, définis par les a_i, admettent l'origine comme zéro commun isolé.

Démonstration: supposons vérifiées les conditions (a) et (b); on a déjà vu que si $\mathbf{A}(V)$ est un module de type fini sur une sous-algèbre analytique isomorphe à H_k, k est la dimension de V (cf. début du §3); l'ensemble des zéros communs aux fonctions définies par les a_i n'est autre que $f^{-1}(0)$, f désignant le germe d' application analytique $V \to \mathbf{C}^k$ défini par ces fonctions; puisque $\mathbf{A}(V)$ est de type fini sur H_k, on a $f^{-1}(0) = \{0\}$ d'après le Théorème 3. Ainsi la condition de l'énoncé est nécessaire. Montrons que réciproquement elle entraîne (a) et (b): considérons le germe d'application analytique f: $V \to \mathbf{C}^k$ défini par les fonctions a_i; d'après le Corollaire 2 au Théorème 4, $f(V)$ est un germe de sous-ensemble analytique irréductible W de $\mathbf{C}^k$, de même dimension k que V; donc $W = \mathbf{C}^k$ au sens des germes. Ceci signifie que toute fonction g holomorphe à l'origine de $\mathbf{C}^k$, telle que $g(a_1, \ldots, a_k) = 0$, est identiquement nulle, ce qui n'est pas autre chose que la condition (a). Enfin A est un module de type fini sur la sous-algèbre analytique engendrée par les a_i, en vertu du Théorème 4, et par suite (b) est vérifiée.