J-P. Serre

Fonctions automorphes d'une variable : application du théorème de Riemann-Roch (suite)

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. n° 5, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A5_0>

FONCTIONS AUTOMORPHES D'UNE VARIABLE: APPLICATION DU THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH (Suite)

(Exposé de J-P. Serre, 11-1-54)

§3. Cas où $\hat{X}$ est compact

Conservons les notations du §2, et soit G un groupe discret d'automorphismes du disque unité Y. Nous ne supposons plus que $X = Y/G$ soit compact; le groupe G peut alors contenir des transformations paraboliques, dont les points doubles (situés sur la circonférence C: $|z| = 1$) sont dits points paraboliques de G. On sait que l'on peut rajouter ces points à Y de facon à obtenir un espace $\hat{Y}$ sur lequel opère le groupe G, et que l'espace quotient $\hat{X} = \hat{Y}/G$ est une variété analytique complexe de dimension 1 (cf. exp. 3); nous noterons encore π: $\hat{Y} \to \hat{X}$ la projection canonique de $\hat{Y}$ sur $\hat{X}$.

Si $Q \in \hat{Y}$ est un point parabolique de G, nous noterons G_Q le sous-groupe de G formé des $g \in G$ tels que $g \cdot Q = Q$. On sait (exp. 3) que G_Q est un groupe cyclique infini, engendré par une transformation de la forme:

$$\frac{1}{z' - Q} = \frac{1}{z - Q} + h \,, \qquad h \in \mathbf{C},$$

où h n'est déterminé qu'au signe près. Soit $P = \pi(Q) \in \hat{X}$, et soit t_P la fonction:

$$t_P = e^{2\pi i/h(z-Q)} \quad .$$

Cette fonction est invariante par G_Q, donc définit une fonction sur $\hat{X}$; de plus, si le signe de h est choisi convenablement, on vérifie que t_P est une <u>uniformisante</u> <u>locale</u> en P.

Soit g une fonction automorphe de poids n sur Y; la fonction $(z-Q)^{2n} \cdot g(z)$ est alors <u>invariante</u> par G_Q (Rappelons brièvement la démonstration: du fait que g est de poids n, on a $g(z) \cdot dz^n = g(z') \cdot dz'^n$, et comme $dz/(z-Q)^2 = dz'/(z'-Q)^2$, on en tire bien $g(z)\cdot(z-Q)^{2n} = g(z')\cdot(z'-Q)^{2n})$. On peut alors parler de l'<u>ordre au point</u> P de la fonction $(z-Q)^{2n}\cdot g(z)$, si cette fonction est méromorphe (ce que nous supposerons); cet ordre ne dépend que de g et de P, et sera noté $\hat{o}_P(g)$. Si g_1 et g_2 sont deux fonctions automorphes, on a $\hat{o}_P(g_1\cdot g_2) = \hat{o}_P(g_1)\cdot\hat{o}_P(g_2)$. Enfin, si $n = 1$, la forme différentielle $g\cdot dz$ est invariante par G, donc est de la forme $\pi^*(\omega)$, où ω est une forme différentielle sur X; dire que g est méromorphe en P équivaut à dire que ω est méromorphe en P, et l'on a la formule:

$$\hat{o}_P(g) = o_P(\omega)+1 \quad .$$

(En effet, on a $\omega = \lambda\cdot(z-Q)^2 g(z)\cdot dt_P/t_P$, $\lambda \neq 0$.)

Nous dirons qu'une fonction automorphe de poids n, soit g, est <u>holomorphe en</u> P si $\hat{o}_P(g) \geq 0$, ou, ce qui revient au même, si pour Q se projetant en P, la fonction $(z-Q)^{2n}\cdot g(z)$ est fonction holomorphe de l'uniformisante locale t_P. Une fonction de poids n sera dite <u>holomorphe sur</u> $\hat{Y}$ si elle est holomorphe en tout point de Y et aussi en tout point parabolique. Nous noterons D_n l'espace vectoriel formé par ces fonctions, et d_n la dimension de D_n. S'il n'y a pas de points paraboliques, ces définitions se réduisent à celles du §2.

Etudions maintenant l'espace D_n. Comme au §2, nous choisirons une fois pour toutes une fonction g, méromorphe et de poids 1 sur Y, non identiquement nulle, et méromorphe en tous les points paraboliques. Une telle fonction existe: il suffit de prendre un quotient de séries de Poincaré (cf. exp. 3). On a $g\cdot dz = \pi^*(\omega)$, où ω est une différentielle méromorphe sur $\hat{X}$.

Toute fonction méromorphe h de poids n s'écrit alors:

$$h = \tilde{f}\cdot g^n, \quad \text{avec} \quad \tilde{f} = f\circ\pi, \quad f \text{ méromorphe sur } \hat{X}.$$

Pour que h soit holomorphe en un point $P \in X$, il faut et il suffit (cf. §2) que:

$$o_P(f) \geq - n \cdot o_P(\omega) - \left[n(1 - \frac{1}{e_P}) \right], \quad e_P \text{ indice de ramification en } P.$$

De même pour que h soit holomorphe en un point parabolique $P \in \hat{X}$, il faut et il suffit que;

$$\hat{o}_P(\tilde{f}) \geq - n \cdot \hat{o}_P(g), \quad \text{c'est-à-dire:}$$

$$o_P(f) \geq - n \cdot o_P(\omega) - n \; .$$

Posons alors $e_P = \infty$ si P est un point <u>parabolique</u> de $\hat{X}$. On voit que la formule:

$$o_P(f) \geq - n \cdot o_P(\omega) - \left[n(1 - \frac{1}{e_P}) \right] \quad \text{pour tout } P \in \hat{X},$$

est nécessaire et suffisante pour que h soit holomorphe sur $\hat{Y}$.

Soit $K = (\omega)$ le diviseur de ω, et posons:

$$E_n = n \cdot K + \sum_{P \in \hat{X}} \left[n(1 - \frac{1}{e_P}) \right] .$$

On a ainsi obtenu une généralisation de la proposition 1 du §2:

PROPOSITION 3. <u>L'application</u> $f \to \tilde{f} \cdot g^n$ <u>est un isomorphisme de</u> $L(E_n)$ <u>sur</u> D_n.

COROLLAIRE. $d_n = \ell(E_n)$.

Si $\hat{X}$ n'est pas compacte, le th. de Behnke-Stein déjà cité montre que $d_n = + \infty$ (et donne d'autres renseignements, bien plus précis).

Nous supposerons à partir de maintenant <u>que</u> $\hat{X}$ <u>est compact</u>. Cette hypothèse est vérifiée dans les cas particuliers les plus importants, par exemple lorsque G est le groupe modulaire ou un sous-groupe d'indice fini du groupe modulaire.

On peut alors appliquer le théorème de Riemann-Roch au calcul de $\ell(E_n)$. Il faut d'abord montrer que le nombre

$$A = 2g - 2 + \sum (1 - \frac{1}{e_P})$$

est > 0, ce qui se fait comme au §2 (puisque les séries de Poincaré sont holomorphes sur $\hat{Y}$, d'après l'exposé 3). On en tire que $\deg(E_n) > 2g - 2$ si $n \geq 2$, d'où:

PROPOSITION 4. Si $\hat{X} = \hat{Y}/G$ est compact et de genre g, on a:

$$d_n = (2n-1)(g-1) + \sum_{P \in \hat{X}} \left[n(1 - \frac{1}{e_P})\right] \quad \text{si} \quad n \geq 2.$$

Si $n = 0$, on a $E_n = 0$, d'où $d_0 = 1$.

Si $n = 1$, on a $E_n = K + \sum_{P \in \hat{X}-X} P$; donc, s'il y a au moins un point parabolique, on a $\deg(E_1) > 2g-2 = \deg(K)$, d'où $d_1 = g-1+r$, r étant le nombre de points paraboliques.

Exemple. On prend pour G le groupe modulaire $z \to \frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc = 1$ a, b, c, d entiers, qui opère sur le demi-plan supérieur. On a $g = 0$, et les e_P sont tous nuls, sauf trois d'entre eux, égaux respectivement à $(2, 3, \infty)$ ("signature" des ramifications). On en déduit la dimension de l'espace des formes modulaires de degré $2n$; on pourra vérifier la formule obtenue en se reportant à l'exposé de Godement au Sém. Bourbaki, Février 1953.

Autre exemple: le groupe modulaire arithmétique, sous-groupe d'indice 6 du précédent, formé des $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où b et c sont pairs. On a encore $g = 0$, et la signature est (∞, ∞, ∞); c'est le groupe qui donne le revêtement universel de la sphère privée de 3 points et qui conduit au théorème de Picard.

Plus généralement, en imposant des conditions de congruence aux a, b, c, d on obtient les "groupes de congruence," qui sont des sous-groupes d'indice fini du groupe modulaire.