M. Hervé

Fonctions automorphes d'une variable étude des points paraboliques

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. n° 3, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A3_0>

Séminaire 1953-54, E.N.S.

FONCTIONS AUTOMORPHES D'UNE VARIABLE
ÉTUDE DES POINTS PARABOLIQUES
(D'après un exposé de M. Hervé, 14-12-53)

§1. Automorphismes du disque-unité.

Soit X le disque-unité $|x| < 1$. Ses automorphismes sont de la forme

$$(1) \qquad x \to e^{i\theta} \frac{x-u}{1-\bar{u}x} \quad (|u| < 1).$$

X se représente conformément sur le demi-plan Y: $\mathfrak{I}(y) > 0$, dont les automorphismes sont

$$(2) \qquad y \to \frac{ay + b}{cy + d}, \quad a, b, c, d \text{ réels}, \quad ad - bc > 0$$

(il est commode d'astreindre a, b, c, d à la condition $ad - bc = 1$; alors tout automorphisme de Y correspond à deux matrices unimodulaires réelles, opposées).

Une transformation du type (2), distincte de l'identité, possède deux points doubles, racines de l'équation $cy^2 + (d - a)y - b = 0$. S'ils sont imaginaires, un seul d'entre eux appartient à Y, et la transformation (2) est dite elliptique. S'ils sont réels et distincts, (2) est dite hyperbolique; s'ils sont confondus (réels), (2) est dite parabolique. Les transformations paraboliques dont le point double est à l'infini sont les translations $y \to y + h$; les transformations hyperboliques ayant pour points doubles 0 et ∞ sont les homothéties $y \to ky$ de rapport $k > 0$ $(\neq 1)$.

Proposition 1. Soient G un groupe discret d'automorphismes de X, et u un point du disque fermé $|x| \leq 1$. Le groupe d'isotropie G_u de u (sous-groupe des $g \in G$ tels que $g \cdot u = u$) est cyclique: cyclique d'ordre fini si $|u| < 1$, cyclique d'ordre infini ou réduit à l'identité si $|u| = 1$.

Démonstration: si $|u| < 1$, G_u est un sous-groupe discret du groupe des transformations elliptiques de point fixe u, groupe qui est isomorphe à $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Supposons $|u| = 1$; il suffit de montrer que toutes les transformations de G_u ont les mêmes points doubles u et v (v distinct ou non de u), car le groupe de toutes les transformations admettant u et v comme points doubles est isomorphe à $\mathbf{R}$. Raisonnons par l'absurde: alors il existe $g \in G_u$ ayant un point double $v \neq u$; par une transformation conforme de X sur Y, on peut supposer que u va à l'infini, et v en 0; donc g est

$$y \to ky \quad (k < 1 \text{ par exemple}).$$

Soit $g' \in G_u$ n'admettent pas 0 pour point double; g' a la forme

$$y \to k'y + h \quad (k' \neq 0, \ h \neq 0).$$

Alors $g^m g' g^{-n}$ est $y \to k'y + k^n h$; d'où une suite de transformations de G_u, toutes distinctes, et ayant pour limite $y \to k'y$, contrairement à l'hypothèse suivant laquelle G est discret.

Remarque: supposons G_u non réduit à l'identité. Si $|u| < 1$, G_u se compose des puissances d'une transformation elliptique d'ordre fini; si $|u| = 1$, G_u se compose des puissances d'une transformation parabolique ou hyperbolique admettant u comme point fixe. Dans le premier cas, on dit que u est un point elliptique pour G; dans le second, que u est un point parabolique (resp. hyperbolique) pour G. Les points elliptiques sont isolés; l'ensemble des points elliptiques, paraboliques et hyperboliques est dénombrable, comme le groupe G.

§2. Points paraboliques d'un groupe discret.

Soit u un point parabolique d'un groupe discret G. Les transformés d'un point x_0 ($|x_0| < 1$) par G_u sont sur une circonférence tangente en u à $|x| = 1$; une telle circonférence s'appelle un horicycle. Par une application conforme de X sur Y, envoyant u à l'infini, les horicycles tangents en u viennent sur les droites $\mathcal{I}(y) =$ constante > 0.

Soit $p: y \to y + h$ un générateur de G_u (on peut supposer $h > 0$). Si $g \in G$ a la forme

$$y \to \frac{ay + b}{cy + d} \qquad (ad - bc = 1),$$

$p^k g p^n$ (k et n entiers) a la forme $y \to \dfrac{a'y + b'}{c'y + d'}$ $(a'd' - b c' = 1)$, avec

$$(3) \qquad c' = c, \qquad d' = d + nhc.$$

Donc $|c|$, qui est déterminé par la donnée de g, ne dépend que de la "double classe" $G_u g G_u$.

Lemme 1. Pour tout nombre fini $M > 0$, l'ensemble des doubles classes $G_u g G_u$ pour lesquelles $|c| \leq M$ est fini.

Démonstration: pour chaque $g \in G$, de paramètres a, b, c, d $(ad - bc = 1)$, choisissons l'entier n de manière que

$$1 \leq d + nhc \leq 1 + h|c|.$$

D'après (3), on a

$$1 \leq c'^2 + d'^2 \leq c^2 + (1 + h|c|)^2 .$$

Donc $\mathscr{I}\left(\dfrac{a'i + b'}{c'i + d'}\right) = 1/(c'^2 + d'^2)$ reste compris entre $\dfrac{1}{M^2 + (1 + hM)^2}$ et 1; on peut en outre choisir l'entier k de manière que

$$\mathscr{R}\left(\frac{a'i + b'}{c'i + d'}\right) \leq h/2 .$$

Ainsi chaque double classe $G_u g G_u$ telle que $|c| \leq M$ contient un représentant $g' = p^k g p^n$ qui transforme le point $y = i$ dans un compact de Y (dépendant de M); puisque G est discret, ces représentants g' sont en nombre fini, ce qui démontre le lemme.

Corollaire du lemme 1: il existe $r > 0$ tel que, pour tout $g \notin G_u$, on ait $|c| \geq r$.

Proposition 2. *Soit G un groupe discret d'automorphismes du disque-unité X. Pour tout point parabolique u, il existe un horicycle tangent* *à u, dont l'intérieur H_u jouit de la propriété suivante:* $g \in G$, $x \in H_u$ *et* $gx \in H_u$ *entraînent* $g \in G_u$.

En effet, raisonnons sur le demi-plan Y, en supposant u à l'infini. Si $g \notin G_u$, et si g est de la forme

$$y \to \frac{ay+b}{cy+d} \qquad (ad - bc = 1),$$

on a

$$\mathcal{I}(g(y)) = \frac{\mathcal{I}(y)}{|cy+d|^2} \leq \frac{1}{r^2\ \mathcal{I}(y)} \ . \tag{4}$$

Il est donc impossible que $\mathcal{I}(y) > 1/r$ et $\mathcal{I}(g(y)) > 1/r$; ainsi l'horicycle $\mathcal{I}(y) = 1/r$ jouit de la propriété de l'énoncé.

Proposition 3. Soit G *un groupe discret d'automorphismes du disque-unité* X. *Pour tout compact* $K \subset X$ *et tout point parabolique* u, *il existe un horicycle tangent en* u, *dont l'intérieur ne rencontre aucun des transformés* $g(K)$ $(g \in G)$.

Raisonnons à nouveau sur Y, u étant à l'infini. Soient m et M les bornes inférieure et supérieure de $\mathcal{I}(y)$ pour $y \in K$. Si $g \notin G_u$, on a d'après (4)

$$\mathcal{I}(g(y)) \leq 1/(mr^2) \quad \text{pour} \quad y \in K;$$

si $g \in G_u$, on a $\mathcal{I}(g(y)) = \mathcal{I}(y) \leq M$ pour $y \in K$. L'horicycle $\mathcal{I}(y) = \sup\,(M, 1/(mr^2))$ répond aux conditions de l'énoncé.

Pour les besoins du §5, nous démontrerons encore ceci:

Lemme 1 bis. Si M *et* M' *sont finis* > 0, *l'ensemble des classes à droite* $G_u g$ *pour lesquelles on a*

$$|c| \leq M, \qquad |d| \leq M' \quad \textit{est fini}.$$

Tout d'abord, il résulte de (3) que $|c|$ et $|d|$ ne dépendent que de la classe $G_u g$. D'après le lemme 1, il n'y a qu'un nombre fini de doubles classes $G_u g G_u$ telles que $|c| \leq M$. Dans chacune d'elles, il n'y a qu'un nombre fini de classes $G_u g$ telles que $|d| \leq M'$, tout au moins si $c \neq 0$ (voir (3)). Ceci suffit à prouver le lemme 1 bis.

<u>Proposition 4. Soit G un groupe discret d'automorphismes du disque-unité X. Soit H_u l'intérieur d'un horicycle tangent en un point parabolique u; pour tout $x_0 \in X$, il n'y a qu'un nombre fini de classes à droite $G_u g$ telles que $g(x_0) \in H_u$.</u>

Raisonnons encore sur le demi-plan, u étant à l'infini. Soit y_0 le point correspondant à x_0. D'après (4), on a

$$\mathfrak{I}(g(y_0)) \leq \mathfrak{I}(y_0)/M^2$$

dès que $\sup(|c|\ \mathfrak{I}(y_0),\ \ |c\mathfrak{R}(y_0) + d|) \geq M$.

D'après le lemme 1 bis, c'est le cas de toutes les classes $G_u g$ sauf un nombre fini. La proposition 4 en résulte aussitôt.

<u>Corollaire de la Prop. 4</u>: x_0 et u étant donnés, l'ensemble des rayons des horicycles (tangents en u) qui contiennent des points gx_0 ($g \in G$) est un ensemble <u>discret</u>, n'ayant pas d'autre valeur d'accumulation que un (rayon du disque X). En particulier, il existe un <u>plus petit horicycle</u> sur lequel se trouvent des points congrus à x_0, et il existe un plus petit horicycle sur lequel se trouvent d'autres points congrus à x_0.

§3. <u>L'espace quotient complété</u>

Soit toujours G un groupe discret d'automorphismes du disque ouvert X. Soit $\hat{X}$ la réunion de X et de l'ensemble des points paraboliques pour G. Définissons sur $\hat{X}$ la topologie que voici: un sous-ensemble $U \subset \hat{X}$ est <u>ouvert</u> si:

1) pour tout $x \in U$ tel que $|x| < 1$, U est un voisinage (au sens ordinaire) de x;

2) pour tout $u \in U$ tel que $|u| = 1$ (u étant donc un point parabolique), U contient l'intérieur d'un horicycle tangent en u.

Il est immédiat que $\hat{X}$ est séparé, et que G opère dans $\hat{X}$.

L'espace quotient $\hat{X}/G$ ne diffère de X/G (qui est séparé) que par l'adjonction des classes des points paraboliques.

Théorème 1. L'espace $\hat{X}/G$ est séparé.

Démonstration: soient $x \in \hat{X}$ et $x' \in \hat{X}$, non congrus modulo G. On doit montrer que x et x' possèdent deux "voisinages" tels qu'aucun transformé de l'un par G ne rencontre l'autre. C'est évident si $|x| < 1$, $|x'| < 1$. Si $|x| < 1$ et $|x'| = 1$, cela résulte de la proposition 2: prendre pour K un voisinage compact de x. Reste à examiner le cas où x et x' sont deux points paraboliques, non congrus modulo G; ce cas sera traité plus loin (prop. 6), ce qui achèvera alors de prouver le th. 1.

On va maintenant définir, au voisinage de chaque point de $\hat{X}/G$, une structure de variété analytique complexe (de dimension un), de manière que si deux tels voisinages ont une partie commune, les structures analytiques coïncident. Sous réserve que le th. 1 soit démontré, cela définira sur $\hat{X}/G$ une structure de variété analytique complexe; les classes des points paraboliques ou elliptiques seront des points isolés de la variéte analytique $\hat{X}/G$.

Soit d'abord $x_0 \in \hat{X}$, $|x_0| < 1$. Si x_0 n'est pas un point elliptique, nous prenons, au voisinage de x_0, la coordonnée complexe locale $\frac{x - x_0}{1-\bar{x}_0 x}$ nulle en x_0. Si x_0 est un point elliptique d'ordre k, prenons comme coordonnée complexe locale $\left(\frac{x - x_0}{1-\bar{x}_0\, x}\right)^k$. Enfin, si $|x_0| = 1$, faisons une transformation conforme de X sur Y, qui envoie x_0 à l'infini, et soit $y \to y + h$ $(h > 0)$ le générateur du groupe G_{x_0}; alors $y \to \exp\left(\frac{2\pi i}{h}\, y\right) = w$ définit un homéomorphisme d'un voisinage de x_0 dans X/G, sur un voisinage de 0 du plan (w): cela résulte de la prop. 2. On prendra w comme coordonnée complexe locale, au voisinage du point x_0.

§4. Comportement des séries de Poincaré aux points paraboliques

Soit (cf. Exp. 1, §3) $J_g(x)$ la dérivée de la transformation $x \to g(x)$ du disque-unité X, pour $g \in G$. Soit $f(x)$ une fonction holomorphe et bornée pour $|x| < 1$. Considérons, comme dans l'Exp. 1, §3, la série de

Poincaré

$$L(f, m) = \sum_{g \in G} f(g\cdot x)(J_g(x))^m \quad (m \text{ entier } \geq 2),$$

qui est une forme holomorphe de poids m.

Théorème 2. Si u est un point parabolique du groupe discret G, la fonction holomorphe

$$(x - u)^{2m} L(f, m)$$

est invariante par le groupe d'isotropie G_u, et bornée à l'intérieur de chaque horicycle tangent en u.

Corollaire: au voisinage du point $u \in \hat{X}$, $(x - u)^{2m} L(f, m)$ s'exprime comme fonction holomorphe de la coordonnée locale w (cf. fin du §3).

Démonstration du Th. 2: il est d'abord immédiat que si $\varphi(x)$ est une forme de poids m, $(x - u)^{2m}\varphi(x)$ est invariante par le groupe d'isotropie G_u du point parabolique u. En effet, si $x' = g(x)$ est une transformation de G_u, on a $\dfrac{dx'}{(x' - u)^2} = \dfrac{dx}{(x - u)^2}$, donc $J_g(x) = \left(\dfrac{g\cdot x - u}{x - u}\right)^2$, et $(J_g(x))^m\varphi(g\cdot x) = \left(\dfrac{g\cdot x - u}{x - u}\right)^{2m} \varphi(g\cdot x) = \varphi(x)$, d'où le résultat. Reste à montrer que $(x - u)^{2m} L(f, m)$ est bornée à l'intérieur de chaque horicycle tangent en u. Commençons par:

Lemme 2: si u est un point parabolique pour le groupe discret G, on a, pour tout entier $m \geq 1$,

$$(5) \qquad |x - u|^{2m} \sum_{g \in G_m} |J_g(x)|^m \leq M_m ,$$

M_m ne dépendant que de l'entier m, non de $x \in X$.

En effet, le premier membre de (5) est égal à

$$(6) \qquad \sum_{g \in G} |gx - u|^{2m} .$$

La transformation $y = \lambda \dfrac{x + u}{x - u}$, où λ est une constante complexe convenable telle que $\mathfrak{I}(\lambda) < 0$, transforme X dans le demi-plan Y, envoie u

à l'infini, et transforme le générateur de G_u en $y \to y + 1$. On a

$$x - u = \frac{2\lambda u}{y - \lambda} \quad ,$$

de sorte que (6) est égal, au facteur $|2\lambda u|^{2m}$ près, à

$$\sum_{n \in Z} |n + y - \lambda|^{-2m} \quad ,$$

série qui converge normalement dans tout le demi-plan Y. Ceci démontre le lemme.

Revenons à la démonstration du théorème 2. Choisissons un ensemble Γ de représentants g_1 des classes à gauche $g_1 G_u$. On a

$$(7) \qquad L(f, m) = \sum_{g_1 \in \Gamma} \varphi_{g_1}(x) \quad ,$$

en posant

$$\varphi_{g_1}(x) = \sum_{g \in G_u} f(g_1 g \cdot x)(J_{g_1 g}(x))^m \; .$$

En tenant compte de $J_{g_1 g}(x) = J_{g_1}(gx) J_g(x)$ (cf. 1, formule (2)), on a

$$\varphi_{g_1}(x) = \sum_{g \in G_u} f_{g_1}(g \cdot x)(J_g(x))^m \quad ,$$

avec

$$f_{g_1}(x) = f(g_1 \cdot x)(J_{g_1}(x))^m \quad ,$$

fonction qui est bornée dans X, puisque f et J_{g_1} sont bornées. En vertu du lemme 2, $(x - u)^{2m} \varphi_{g_1}(x)$ est bornée dans X, et d'ailleurs invariante par G_u. On a alors, d'après (7),

$$(8) \qquad (x - u)^{2m} L(f, m) = \sum_{g_1 \in \Gamma} (x - u)^{2m} \varphi_{g_1}(x) \; ;$$

c'est une série de fonctions G_u-invariantes, dont chacune est bornée dans X, et l'on sait (1, th. 1) que cette série converge normalement sur tout compact de X. Il en résulte que la série (8) converge normalement sur tout horicycle tangent en u. Or la borne supérieure de la fonction

$$(x - u)^{2m} \varphi_{g_1}(x)$$

à l'intérieur d'un horicycle est égale à sa borne supérieure sur l'horicycle, puisque cette fonction est bornée et invariante. Ainsi la série (8) converge normalement à l'intérieur de chaque horicycle, et sa somme est donc bornée à l'intérieur de chaque horicycle. Ceci achève la démonstration du Théorème 2.

§6. Domaine fondamental

Pour $x, x' \in X$, posons $d(x, x') = \arg \operatorname{th} \left| \frac{x - x'}{1 - \bar{x}x'} \right|$. Cette métrique est invariante par tout automorphisme de X. Elle est déduite de la métrique riemannienne définie, dans le demi-plan Y, par

$$ds^2 = \frac{dy\, d\bar{y}}{(\mathfrak{I}(y))^2} .$$

Les géodésiques sont les circonférences de X orthogonales à $|x| = 1$. Le lieu des points équidistants de deux points u et v de X est la géodésique "médiatrice" du segment de géodésique joignant u et v.

Soit G un groupe discret d'automorphismes de X; choisissons $x_0 \in X$ tel que le groupe d'isotropie G_{x_0} soit réduit à l'identité. Soit Δ l'ensemble des $x \in X$ tels que

$$d(x, x_0) \leq d(x, gx_0) \quad \text{pour tout} \quad g \in G.$$

Δ est <u>fermé</u> dans X, et l'intérieur de Δ se compose des x tels que

$$d(x, x_0) < d(x, gx_0) \text{ pour } g \in G, \quad g \neq \text{identité}.$$

Δ jouit des propriétés suivantes:

(α) Δ est connexe (et même "convexe": l'arc de géodésique qui joint deux points de Δ est contenu dans Δ), et est l'adhérence de son intérieur;

(β) les intérieurs des $g(\Delta)$ sont deux à deux disjoints;

(γ) X est la réunion des $g(\Delta)$;

(δ) pour tout compact $K \subset X$, on a $g(K) \cap \Delta = \emptyset$ sauf pour un nombre fini d'éléments $g \in G$.

Δ s'appelle le <u>domaine fondamental</u> de G, relativement au point x_0.

<u>Proposition 5</u>. <u>Pour que X/G soit compact, il faut et il suffit que le domaine fondamental Δ soit compact</u>.

<u>Démonstration:</u> on va montrer que si Δ est un sous-ensemble fermé de X satisfaisant à (γ) et (δ), Δ est compact si et seulement si X/G est compact. Rappelons (2, 2) que, pour que X/G soit compact, il faut et il suffit qu'il existe un compact dont les transformés par G recouvrent X. Si Δ est compact, (γ) montre que X/G est compact. Réciproquement, soit K un compact dont les transformés recouvrent X; les $g(K)$ recouvrent a fortiori Δ, et, d'apres (δ), un nombre fini de ces transformés recouvrent Δ, qui est donc compact.

<u>Lemme 3</u>. Le groupe discret G étant donné, il est possible de choisir x_0 de façon que soit réalisée la condition suivante: pour tout point parabolique u, un horicycle tangent en u ne peut contenir deux points $g_1(x_0)$ et $g_2(x_0)$ que si $g_2g_1^{-1}$ appartient au groupe d'isotropie G_u.

En effet, les points paraboliques forment un ensemble dénombrable. Etant donnés u, $g_1 \in G$, $g_2 \in G$ tels que $g_2g_1^{-1} \notin G_u$, l'ensemble des x tels que $g_1(x)$ et $g_2(x)$ soient sur un même horicycle tangent à u est un arc de circonférence. Donc si x_0 est choisi en dehors d'un ensemble <u>maigre</u> (i.e: réunion dénombrable d'ensembles fermés sans point intérieur) convenable, x_0 satisfait à la condition du lemme.

On peut, bien entendu, astreindre en outre x_0 à la condition que le groupe d'isotropie G_{x_0} soit réduit à l'identité. Lorsque x_0 satisfait à la fois à cette condition et à la condition du lemme 3, nous dirons que x_0 est un point <u>générique</u> de X.

<u>Définition:</u> un point parabolique u est <u>associé à</u> x_0 si tous les $g \cdot x_0$ sont extérieurs à l'horicycle (tangent en u) qui passe par x_0, ou sur cet horicycle; autrement dit, si le plus petit des horicycles contenant des points $g \cdot x_0$ contient x_0 (cf. Corol. de la Prop. 4).

<u>Tout point parabolique</u> v <u>est congru</u> (mod G) <u>à un point parabolique</u> u <u>associé à</u> x_0, <u>et</u> u <u>est unique si</u> x_0 <u>est générique</u>. En effet, soit $g_0 \in G$ tel que $g_0 x_0$ soit sur le plus petit horicycle, tangent à v, contenant les gx_0; alors x_0 est sur le plus petit horicycle contenant les gx_0 et tangent à $g_0^{-1}v = u$. Si $g_1 x_0$ est sur le même horicycle (tangent à v) que $g_0 x_0$, et si x_0 est générique, alors $g_1 g_0^{-1}$ est dans G_v, donc $g_1^{-1}v = g_0^{-1}v = u$, ce qui prouve l'unicité de u.

Soit u un point parabolique associé à x_0 supposé générique. Soit Δ_u l'ensemble des $x \in \Delta$ (Δ: domaine fondamental relatif à x_0) tels que

(9) $$d(x, x_0) < d(x, gx_0) \quad \text{pour tout} \quad g \notin G_u.$$

D'après le corollaire de la Prop. 4, les gx_0 (pour $g \notin G_u$) sont tous extérieurs à un horicycle fixe, contenant à son intérieur x_0. Il en résulte que, pour tout horicycle tangent en u et assez petit, l'intérieur H_u de cet horicycle jouit des propriétés suivantes:

(a) $\Delta \cap H_u \subset \Delta_u$;

(b) les transformés de $\Delta \cap H_u$ par les $g \in G_u$ couvrent H_u.

<u>Lemme 4</u>: les relations $x \in \Delta_u$ et $gx \in \Delta$ entraînent $g \in G_u$. Sinon, en effet, on aurait

$$d(x, x_0) < d(gx, x_0) \quad \text{à cause de (9);}$$
$$d(gx, x_0) \leq d(gx, gx_0) = d(x, x_0) \quad \text{puisque} \quad gx \in \Delta,$$

d'où une contradiction.

<u>Proposition 6</u>. <u>Soient</u> u <u>et</u> v <u>deux points paraboliques distincts, tous deux associés à</u> x_0 (<u>supposé générique</u>). <u>Prenons des horicycles tangents en</u> u <u>et</u> v, <u>dont les intérieurs</u> H_u <u>et</u> H_v <u>satisfassent à</u> (a) <u>et</u> (b), <u>et assez petits pour que</u> $H_u \cap H_v = \emptyset$. <u>Alors</u>

$$H_u \cap gH_v = \emptyset \quad \underline{\text{pour tout}} \quad g \in G.$$

<u>Démonstration</u>: raisonnons par l'absurde. D'après (b), on aurait $x \in \Delta \cap H_u$ et $g \in G$ tels que $gx \in \Delta \cap H_v$. D'après (a), on a $x \in \Delta_u$, $gx \in \Delta_v$. D'après le Lemme 4, $g \in G_u$; pour la même raison, $g \in G_v$.

Puisque $u \neq v$, $G_u \cap G_v$ se réduit à l'identité, donc $x \in \Delta \cap H_u$ et $x \in \Delta \cap H_v$, ce qui est absurde puisque $H_u \cap H_v = \emptyset$.

La proposition 6, compte tenu du fait que tout point parabolique est congru (mod G) à un point associé à x_0, montre que si deux points paraboliques u et v ne sont pas congrus mod G, ils possèdent, dans l'espace $\hat{X}$ (défini au §3), des voisinages tels qu'aucun transformé de l'un ne rencontre l'autre. Ceci achève la démonstration du théorème 1, laissée en suspens au §3.

BIBLIOGRAPHIE

H. POINCARÉ, Oeuvres, t.2; notamment, Acta Math. 1 (1882), p. 193-294

FRICKE-KLEIN, Vorlesungen über die Theorie der autom. Funktionen.

L. R. Ford, Automorphic functions (Chelsea, 2e ed. 1951)

Voir aussi P. FATOU, Fonctions automorphes (t.2 d'Appell et Goursat).